

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01213246 0

LEÇONS

SUR

LA THÉORIE ANALYTIQUE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

LEÇONS

SUR

LA THÉORIE ANALYTIQUE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PROFESSÉES A STOCKHOLM

(Septembre, Octobre, Novembre 1895)

SUR L'INVITATION DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

PAR

M. P. PAINLEVÉ

PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,
PROFESSEUR SUPPLÉANT AU COLLÈGE DE FRANCE.

PARIS,

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

8, Rue de la Sorbonne, 8

1897

INTRODUCTION

1. Ces leçons sont la reproduction du cours que j'ai professé à Stockholm, durant le semestre d'automne 1895, sur l'invitation de S. M. le Roi Oscar II de Suède et de Norwège.

L'objet de ce cours était d'exposer les progrès récents de la théorie *analytique* des équations différentielles.

C'est Cauchy qui, dans son *calcul des limites*, a jeté les fondements de cette théorie. Considérons un système d'équations différentielles :

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_m), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où les f_i sont des fonctions *algébriques* de $y_1, \ldots, y_m$, analytiques en x; si les f_i sont holomorphes pour $x = x_0$, $y_1 = y_1^0, \ldots, y_m = y_m^0$, Cauchy a montré que le système (1) admet une solution $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ holomorphe pour $x = x_0$ et satisfaisant aux conditions initiales $y_1(x_0) = y_1^0, \ldots, y_m(x_0) = y_m^0$. Quand les f_i ne sont pas holomorphes pour $x = x_0$, $y_1 = y_1^0, \ldots, y_m = y_m^0$, les circonstances très compliquées qui se présentent ont fait l'objet de nombreux travaux, dont les plus connus sont ceux de Briot et Bouquet, de MM. Picard, Poincaré, etc.

Mais lorsque x s'éloigne de x_0 pour varier d'une façon quelconque dans son plan, comment se comporte la solution $y_1(x), \ldots, y_m(x)$? C'est là un problème fondamental qui, jusque dans ces dernières années, n'a été abordé que pour une classe d'équations très particulières : à savoir les équations linéaires et les équations qui s'y rattachent immédiatement. Depuis les mémorables travaux de M. Fuchs, la théorie des équations linéaires a pris un développement considérable et constitue une des branches les plus importantes des mathématiques modernes.

C'est aux systèmes différentiels (1) *les plus généraux*, à l'étude des fonctions analytiques $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ définies par un tel système, de leurs singularités, etc., que sont consacrées ces leçons.

2. On conçoit que, dans ce genre de recherches, il soit indispensable d'approfondir le rôle des constantes arbitraires dont dépend l'intégrale de (1). Représentons par a une valeur numérique de x, par $b_1, \ldots, b_m$ des valeurs telles que les f soient holomorphes pour $x = a$, $y_1 = b_1, \ldots, y_m = b_m$. Il est aisé de voir, en complétant la démonstration de Cauchy, que la solution $y_1(x), \ldots, y_m(x)$, définie par les conditions initiales $y_1(a) = y_1^0, \ldots, y_m(a) = y_m^0$, constitue un système de fonctions analytiques de $x, y_1^0, \ldots, y_m^0$, soit $y_1 = \varphi_1(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, a), \ldots, y_m = \varphi_m(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, a)$, *holo-*

morphes dans le domaine de $x = a, y_1^0 = b_1, \ldots, y_m^0 = b_m$. Si maintenant $x, y_1^0, \ldots, y_m^0$ varient d'une façon quelconque, qu'advient-il des fonctions $y_1 = \varphi_1, \ldots, y_m = \varphi_m$? Tel est, sous sa forme la plus étendue, le problème que nous nous posons ici.

Mais, en étudiant ce problème, j'ai eu surtout en vue une catégorie remarquable de systèmes différentiels, à savoir les systèmes (1) dont l'intégrale générale est *uniforme*. L'importance de ces systèmes tient à deux raisons : d'une part, un tel système peut être regardé comme *intégré*, en ce sens que les modes de développement des fonctions uniformes permettront de représenter une intégrale quelconque et de la *suivre* dans tout son domaine d'existence ; d'autre part, la plupart des transcendantes usuelles introduites jusqu'ici vérifient des équations différentielles très simples, en sorte que les équations différentielles algébriques à intégrale uniforme apparaissent comme la source des transcendantes les plus naturelles. A ces équations (et pour les mêmes motifs) il convient d'adjoindre celles dont l'intégrale n'admet qu'un nombre fini de branches. Enfin, l'étude même de ces équations met en évidence le rôle tout différent que jouent, pour un système (1) quelconque, les points critiques [1] *fixes* d'une solution $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ (j'entends les points critiques indépendants de la solution considérée), et les points critiques *mobiles* (variables avec les constantes d'intégration) ; on est amené ainsi à considérer les systèmes (1) plus généraux, dont l'intégrale $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ n'acquiert que n déterminations quand x tourne autour des points critiques mobiles, sans tourner autour des points critiques fixes. Parmi ces systèmes, les systèmes (1) *à points critiques fixes* offrent un intérêt particulier et constituent une extension naturelle des équations différentielles linéaires.

En définitive, nous établirons, dans ces leçons, certaines propriétés des fonctions $y_i = \varphi_i(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, x_0)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, qui définissent l'intégrale d'un système (1) *quelconque*, mais la principale application de ces généralités portera sur *les systèmes* (1) *dont l'intégrale* $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ *ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles.*

3. Il est nécessaire, avant tout, de se rendre compte avec précision des *singularités* qui peuvent affecter les fonctions $y_i = \varphi_i(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, x_0)$.

Soit $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ un système de m fonctions analytiques de x, qui admettent le point $x = \bar{a}$ comme point singulier non algébrique [2], et soit l un chemin qui *tend* vers $\bar{a}$ sans rencontrer aucune singularité des fonctions $y_i(x)$; s'il existe des chemins l tels qu'une au moins des fonctions $y(x)$ ne tende vers aucune limite (finie ou infinie) quand x tend vers $\bar{a}$ sur l, nous convenons de dire que $x = \bar{a}$ est *un point essentiel* des fonctions $y_i(x)$; sinon, $x = \bar{a}$ est dit *un point transcendant ordinaire*, ou simplement un point *transcendant* des $y_i(x)$.

Cette définition admise, soient $x_0, y_1^0, \ldots, y_m^0$ des valeurs pour lesquelles les coefficients différentiels $f_i(x, y_1, \ldots, y_m)$ du système (1) sont holomorphes ; l'intégrale $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ de (1), définie par les conditions initiales $x_0, y_1^0, \ldots, y_m^0$, reste holomorphe, quand x varie à partir de x_0 sur un chemin L, tant que x ne dépasse pas un certain point $\bar{a}$; ce point $\bar{a}$ est un point singulier, soit *algébrique*, soit *transcendant*,

[1] Nous réservons exclusivement le nom de *points critiques* aux points autour desquels plusieurs déterminations de l'intégrale se permutent (ou aux points qui font partie d'une ligne singulière autour de laquelle plusieurs déterminations se permutent).

[2] Le point a n'est pas nécessairement isolé, mais, par exemple, peut faire partie d'une coupure.

soit *essentiel* des fonctions $y_i(x)$. Le premier cas se traite élémentairement ; le second cas conduit à l'étude des intégrales de (1) dans le voisinage de conditions initiales *singulières* $x = a$, $y_1 = b_1$, ..., $y_m = b_m$; le troisième cas semble, *a priori*, échapper à toute méthode. Aussi l'existence de *singularités essentielles mobiles*, que rien ne fait prévoir sur les équations, constitue-t-elle une des plus graves difficultés qu'on rencontre dans la théorie analytique des systèmes différentiels.

Ces points essentiels mobiles peuvent affecter les distributions les plus diverses.

1° Ils peuvent être *isolés* ou limites de points isolés.

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour l'équation algébrique du second ordre dont l'intégrale générale est $y = sn_{k^2}\,[a + \log(x + b)]$, a et b désignant deux constantes arbitraires, k^2 une constante numérique.

2° Ils peuvent former (dans une certaine aire du plan des x) un ensemble dont aucun point n'est isolé, sans que cet ensemble constitue nulle part une ligne.

Un tel exemple est fourni par les équations du troisième ordre que vérifient les fonctions fuchsiennes de la troisième famille.

3° Ils peuvent former des lignes singulières mobiles.

C'est ce qui a lieu pour les équations du troisième ordre dont l'intégrale est soit une fonction fuchsienne existant seulement dans un cercle, soit une fonction kleinéenne, admettant comme coupure une ligne non analytique sans courbure.

4. Si maintenant on étudie l'intégrale [1]

$$y_1 = \varphi_1\,(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, \overline{x}_0), \ldots, y_m = \varphi_m\,(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, \overline{x}_0)$$

comme fonction des constantes y_1^0, ..., y_m^0, il est clair que, dans les hypothèses 1°, 2° et 3°, les fonctions φ présentent (par rapport à une quelconque des variables y_i^0) des singularités transcendantes variables avec x et affectant des distributions analogues à celles que nous venons d'énumérer. Mais une nouvelle source de difficultés provient de ce fait que les fonctions φ peuvent admettre, dans le champ des variables y_i^0, des singularités essentielles indépendantes de x, comme le montre l'équation $y'' = \frac{y'^2}{y}$, dont l'intégrale est $y = y_0 e^{\frac{y'_0}{y_0}(x - x_0)}$.

Il est donc indispensable de prévoir, dans les raisonnements employés, l'existence de toutes ces espèces de singularités. On conçoit que les quelques théorèmes généraux connus sur les fonctions analytiques de plusieurs variables et leurs singularités ne soient pas ici d'un grand secours ; car ces théorèmes (en dehors de quelques propositions tout élémentaires) supposent que les singularités satisfont à certaines conditions restrictives, conditions que rien ne nous autorise à croire remplies pour les fonctions $\varphi_i\,(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, \overline{x}_0)$. Par exemple, nous ne savons pas si les singularités des φ_i sont définies par des relations *analytiques* entre les affixes des variables, et l'exemple des fonctions kleinéennes montre qu'il n'en est pas nécessairement ainsi. Tout ce que nous savons, c'est que, dans le plan d'une des variables, les singularités des φ_i sont fixes ou varient avec les autres variables d'une façon continue.

5. Ces remarques étaient nécessaires pour éclairer les résultats que je vais brièvement résumer. Ces résultats sont de nature bien différente suivant que le système (1)

(1) Étant donnée une fonction φ de plusieurs variables x_1, ..., x_n, nous représentons, dans ce qui suit, par $\varphi\,(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, x_i, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_n)$ la fonction de x_i obtenue en laissant à toutesles variables, sauf à x_i, des valeurs numériques $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ quelconques.

considéré est du premier ordre ou d'ordre supérieur. J'ai traité longuement, et d'une manière très élémentaire, le cas du premier ordre, qui comporte évidemment les théorèmes les plus précis. L'avantage, au point de vue de l'exposition, c'est que certains raisonnements, une fois développés sous leur forme la plus simple pour le premier ordre, s'étendent d'eux-mêmes aux ordres supérieurs, ce qui permet, par la suite, de réserver toute l'attention aux difficultés vraiment nouvelles qu'entraîne l'élévation de l'ordre.

6. *Équations du premier ordre.* — La théorie analytique des équations du premier ordre

$$\text{(A)} \qquad F(y' \, y, x) = 0,$$

algébriques en y', y, analytiques en x, repose sur les deux propositions suivantes, dont aucune ne subsiste pour le second ordre :

Théorème I. — Une intégrale $y(x)$ de (A) *ne peut admettre, comme points singuliers non algébriques que certains points fixes $x = \xi$ qui se mettent en évidence sur l'équation même.* Quand l'équation (A) est algébrique en x, ces points ξ sont en nombre fini et s'obtiennent algébriquement.

Théorème II. — Soit y_0 la valeur de $y(x)$ pour $x = x_0$, et soit $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ l'intégrale générale de (A). *Si $\overline{x}$, $\overline{x}_0$ désignent deux valeurs numériques quelconques distinctes des valeurs ξ, la fonction $y = \varphi(\overline{x}, y_0, \overline{x}_0)$ ne présente dans tout le plan des y_0 (à distance finie ou infinie) que des points singuliers algébriques* [1].

Ces propositions entraînent d'importantes conséquences pour une équation *quelconque*

$$(\text{A}_1) \qquad F_1(y', y, x) = 0$$

algébrique en y', y, x. Elles montrent, par exemple, qu'une transformation homographique à deux variables, effectuée sur x, y, ramène (A_1) à une équation dont aucune intégrale n'a de points *essentiels.* Elles permettent d'étendre aux intégrales d'une équation (A_1) *quelconque* le célèbre théorème de M. Picard *sur les zéros des fonctions entières :* supposons, pour simplifier l'énoncé, que (A_1) ne possède aucune solution de la forme $y = \text{C}^{\text{te}}$; si $y(x)$ est une transcendante quelconque (uniforme ou non) vérifiant (A_1), l'égalité

$$y(x) - b = 0$$

admet une infinité de racines, exception faite pour un nombre *fini* de valeurs de b qui sont *fixes* et mises en évidence par l'équation différentielle.

7. Passons aux équations (A) dont l'intégrale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles. Il résulte aussitôt des théorèmes I et II que l'intégrale $y = \varphi(x, y_0, \overline{x}_0)$ d'une telle équation est fonction algébrique de y_0. Inversement, si l'intégrale $y = \varphi(x, \text{C})$ d'une équation (A) est une fonction algébrique de la constante arbitraire C, $y(x)$ n'ac-

[1] La valeur $x = \xi$ peut être une singularité essentielle de $\varphi(x, y_0, x_0)$, quels que soient y_0, x_0 ; quand il n'en est pas ainsi, la fonction $\varphi(\xi, y_0, \overline{x}_0)$ peut admettre, dans le plan des y_0, des singularités transcendantes ou essentielles. Les mêmes remarques s'appliquent aux valeurs $x_0 = \xi$.

quiert autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de déterminations. La classe des équations (A) dont l'intégrale générale y (x) est une fonction algébrique de la constante (convenablement choisie), et la classe des équations (A) dont l'intégrale y (x) n'admet qu'un nombre fini de branches permutables autour des points critiques mobiles, se confondent donc. Il en est tout autrement pour les équations du second ordre : la première classe n'est qu'une catégorie de la seconde.

Les équations (A) *à points critiques fixes* sont les plus simples de la classe en question. Ces équations ont déjà fait l'objet des recherches de M. Fuchs et de M. Poincaré. M. Fuchs a formé les conditions nécessaires pour qu'une équation (A) ait ses points critiques fixes. M. Poincaré, par une belle méthode d'intégration, est parvenu à ce résultat bien remarquable que l'intégrale y (x) d'une équation (A) à points critiques fixes s'obtient algébriquement, ou par quadratures, ou dépend d'une équation de Riccati.

Mais les travaux des deux illustres géomètres prêtaient à deux objections bien différentes que les théorèmes I et II permettent seuls de lever : M. Fuchs s'est borné à exprimer que toute solution y (x) de (A), qui, pour $x = x_0$, prend une valeur *déterminée* y_0, est uniforme dans le domaine de x_0 ; on pouvait se demander si toutes les équations (A) répondant aux conditions de M. Fuchs avaient vraiment leurs points critiques fixes ; appliquées au second ordre, ces conditions conduisaient à regarder comme à points critiques fixes des équations dont l'intégrale possède, en réalité, des points mobiles à la fois essentiels et critiques ; pour le premier ordre, il se trouve que les conditions de M. Fuchs sont suffisantes, mais c'est en vertu du théorème I. Quant à la méthode de M. Poincaré, elle s'appuie sur la correspondance *birationnelle* qui existe entre les valeurs y (x), y' (x) d'une solution et les valeurs initiales y_0, y'_0 ; mais la démonstration de M. Poincaré établit seulement que ladite correspondance est *biuniforme* [1] ; les équations intégrées par M. Poincaré avaient donc bien leurs points critiques fixes, mais il n'était pas certain qu'elles fussent les seules. Appliquée au second ordre, la méthode de M. Poincaré n'épuisait pas toutes les équations à points critiques fixes. Pour le premier ordre, l'objection s'évanouit si on tient compte du théorème II : la relation entre y, y' et y_0, y'_0 ne peut être biuniforme sans être birationnelle.

8. Considérons maintenant une équation (A) dont l'intégrale n'acquiert que n déterminations autour des points critiques mobiles. Les théorèmes I et II permettent d'établir *qu'une telle équation se ramène algébriquement à une équation* (A) *dont les points critiques sont fixes*.

J'insiste sur cette dernière proposition, qui peut sembler évidente au premier abord. Prenons, pour plus de simplicité, une équation (A) algébrique en y', y, x, soit :

$$(A_1) \qquad F_1(y', y, x) = 0.$$

Si l'intégrale générale y (x) de (A_1) prend exactement n valeurs autour des points critiques mobiles, il est clair qu'elle vérifie une relation (et une seule) de la forme

$$y^n + R_{n-1}y^{n-1} + \ldots R_1 y + R_0 = 0,$$

[1] On montre, il est vrai, bien aisément que toute correspondance *biuniforme* entre deux surfaces de Riemann qui n'admet, sur une de ces surfaces, que des points singuliers *isolés*, est nécessairement *birationnelle*. Mais la correspondance entre y', y et y'_0, y_0 pouvait, *a priori*, admettre des singularités plus compliquées, des lignes singulières par exemple, ainsi que cela a lieu pour le 3ᵉ ordre.

où les R sont des fonctions de x et d'une constante c, dont les points critiques dans le plan des x sont *fixes*. Si on élimine c entre les R_i, $\frac{dR_i}{dx}$, ces fonctions s'expriment à l'aide d'une d'entre elles (soit R_0) et de x. Mais, d'une part, il n'est pas évident que les fonctions

$$R_i = \psi_i (R_0, x), \qquad \frac{dR_i}{dx} = \psi'_i (R_0, x)$$

soient algébriques en R_0; si la chose est vraie, c'est à cause du théorème II, qui montre que les R_i sont algébriques en y_0. D'autre part, cette première condition remplie, il n'est pas évident que les coefficients $a(x)$ de ces fonctions algébriques ψ'_i, ψ_i de R_0, soient algébriques en x; si la chose est vraie, c'est à cause du théorème I, qui permet d'exprimer algébriquement qu'une équation (A_1) a ses points critiques fixes. Étendue *au second ordre*, la proposition analogue n'est plus exacte en général, parce que les $R_i(x, y_0, y'_0)$ peuvent renfermer sous forme transcendante les constantes y_0, y'_0. Dans le cas même *du premier ordre*, la proposition étendue *à tous les points critiques tant fixes que mobiles* est en défaut. Je m'explique : supposons que l'intégrale générale $y(x)$ de (A_1) soit une fonction qui n'admette, dans tout le plan des x, que N branches ; elle vérifie une relation (et une seule) de la forme

$$y^N + R_{N-1}(x,C)\, y^{N-1} + \ldots + R_1(x,C)\, y + R_0(x,C) = 0,$$

où les R_i sont des fonctions uniformes de x qui dépendent algébriquement d'une constante C. Si on élimine C entre les R_i, $\frac{dR_i}{dx}$, les fonctions

$$R_i = \psi_i (R_0, x), \qquad \frac{dR}{dx} = \psi'_i (R_0, x)$$

algébriques en R_0, ne sont pas en général algébriques en x ; leurs coefficients sont des intégrales particulières, parfaitement déterminées, de certaines équations différentielles non intégrables ; et cela tient à ce qu'on ne sait pas exprimer algébriquement que l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation (A_1) est *uniforme*.

D'après ce qui précède, représentons par (E_n) une équation (A_1) quelconque dont l'intégrale $y(x)$ n'acquiert que n valeurs autour des points critiques mobiles, par T_n une solution quelconque $y(x)$ d'une équation (E_n) : toute équation (E_n) se ramène algébriquement à une équation (E_1) ; *toute transcendante* T_n *s'exprime algébriquement en fonction de* x *et d'une transcendante* T_1. Au contraire, soit (E'_n) une équation (A_1) quelconque dont l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à n branches, soit T'_n une solution quelconque d'une telle équation : *une transcendante* T'_n *n'est pas, en général, une combinaison algébrique de* x *et de transcendantes* T'_1.

9. La nature de l'intégrale $y(x)$ se trouvant ainsi définie dans l'hypothèse où $y(x)$ n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, une question se pose d'elle-même : « *Étant donnée une équation* (A), *comment reconnaître si elle* « *rentre dans la catégorie étudiée ?* »

J'établis d'abord à ce sujet la proposition suivante : « *On sait reconnaître, à l'aide* « *d'un nombre fini d'opérations, si l'intégrale* $y(x)$ *d'une équation* (A) *donnée ne prend* « (*autour des points critiques mobiles*) *qu'un nombre donné* n *de valeurs : quand il en*

« *est ainsi, l'équation s'intègre algébriquement, ou se ramène algébriquement soit à*
« *une équation de la forme*

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = h(x)\,dx,$$

« *soit à une équation de Riccati.* »

Mais est-il possible de traiter la même question sans se donner n ou une limite supérieure de n? Il n'y avait guère lieu de l'espérer d'après les essais infructueux tentés sur *le cas particulier le plus simple, celui où x ne figure pas explicitement dans* (A). Comme l'intégrale d'une équation

$$(\alpha) \qquad F(y', y) = 0$$

ne saurait admettre de points singuliers fixes, la question est, dans ce cas, de reconnaître si l'intégrale $y(x)$ de (α) est une fonction à un nombre fini de branches : quand il en est ainsi, $y(x)$ est une fonction algébrique de x, ou de $e^{\lambda x}$, ou de $sn_{k^2}\,\lambda x$, λ et k^2 étant numériques ; dans la première hypothèse, le problème se traite élémentairement ; dans la seconde, tout revient à déterminer si une certaine intégrale abélienne, dont tous les infinis sont logarithmiques, n'a qu'une période : c'est là une question qu'on ne sait traiter que dans des cas très particuliers, par les méthodes *arithmétiques* de Tchebycheff et Zolotareff. Enfin, dans la troisième hypothèse, la difficulté est de savoir si une certaine intégrale abélienne de première espèce n'a que deux périodes : ce problème est encore à résoudre.

Il était donc naturel de penser que la question analogue, relative aux équations (A) où x figure explicitement, était plus inabordable encore. En approfondissant la forme de l'intégrale générale $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ par rapport à la constante, je suis parvenu néanmoins au théorème suivant :

Étant donnée une équation

$$(A_1) \qquad F_1(y', y, x) = 0$$

algébrique en y', y, x, on sait (à l'aide d'un nombre fini d'opérations) reconnaître si l'intégrale $y(x)$ est une fonction TRANSCENDANTE *qui ne prend qu'un nombre fini* (NON DONNÉ) *de valeurs autour des points critiques mobiles, ou ramener l'équation aux quadratures.*

De plus, dans les cas singuliers où on sait seulement ramener l'équation aux quadratures, il reste à déterminer si une certaine équation $G\left(\frac{du}{dx}, u\right) = 0$ a, comme intégrale, une fonction à un nombre fini de branches : de sorte que *la question posée serait complètement résolue pour une équation* (A_1) *quelconque, si elle l'était pour toutes les équations où x ne figure pas.* Ces dernières équations, les plus simples en apparence, constituent (au point de vue qui nous occupe) un type exceptionnel qui met en défaut la théorie des fonctions et exige des recherches *arithmétiques.*

10. Une autre circonstance bien remarquable, c'est que les mêmes méthodes, quand on les emploie à reconnaître si l'intégrale de (A_1) est *algébrique*, sont loin de conduire à des résultats aussi précis : le cas *algébrique* apparaît donc ici comme plus compliqué que le cas *transcendant.* J'ai consacré deux leçons au problème de l'intégration algébrique des équations du premier ordre. Ce problème, sur lequel M. Darboux a publié,

en 1877, un mémoire magistral, a été repris dans ces dernières années par M. Autonne, M. Poincaré et moi. Les méthodes proposées jusqu'ici, quand on les combine, permettent, dans des cas très étendus, de reconnaître si une équation donnée (A_1) s'intègre algébriquement ou de ramener l'équation aux quadratures. J'ai indiqué explicitement les cas pour lesquels ces méthodes sont sûrement insuffisantes, et j'ai montré que la question ne saurait faire aucun progrès essentiel si on n'introduit pas, d'une manière ou d'une autre, une condition, distincte de celles que nous possédons déjà, pour exprimer que l'intégrale algébrique est mise sous forme *irréductible.*

Ce qui m'a décidé à insister longuement sur ce point, ce n'est pas seulement l'importance intrinsèque d'un problème si naturel et, en apparence, si simple, c'est aussi la multitude de questions (intéressant les équations différentielles) dans lesquelles la même difficulté, relative à l'irréductibilité d'une relation algébrique, est l'obstacle principal et veut être surmontée par des procédés analogues. Nous serons amené, par exemple, dans la suite de ces leçons, à considérer les équations du second ordre qui admettent une intégrale première

$$\varphi\,(y', y, x, C) = 0,$$

où φ est un polynôme en y' y, C. Quand on n'exprime d'aucune manière que la courbe $\varphi\,(y', y, \overline{x}, \overline{C}) = 0$ est irréductible, il est clair qu'on ne peut espérer reconnaître, en général, si une équation quelconque donnée possède une telle intégrale première.

11. *Systèmes différentiels du second ordre.* — Dès que l'ordre du système différentiel dépasse l'unité, des complications toutes nouvelles s'introduisent, dont la plus grave est l'existence possible de points essentiels mobiles (critiques ou non). Les types connus d'équations de second ordre dont l'intégrale présente cette singularité sont si simples qu'il ne semblait pas douteux qu'une équation de second ordre *prise au hasard* n'en fût affectée. C'est le contraire qui est vrai : *les systèmes* (1) *dont l'intégrale générale possède des points essentiels mobiles, forment une classe exceptionnelle.*

Considérons, pour fixer les idées, un système du second ordre :

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = f_1\,(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_2\,(x, y, z),$$

où f_1, f_2 sont rationnels en y, z. Si on remplace y par $\frac{y}{t}$, z par $\frac{z}{t}$, le système s'écrit :

$$(2) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{tdy - ydt}{tA - yC} = \frac{tdz - zdt}{tB - zC}$$

où X, A, B, C sont des polynômes homogènes en y, z, t, le premier de degré q, les autres de degré $q + 1$ (analytiques en x).

Dans l'étude analytique d'un tel système, les théorèmes suivants jouent un rôle fondamental.

Théorème I. — Si les polynômes X, A, B, C sont les plus généraux de leur degré, l'intégrale générale

$$(3) \qquad y = \varphi\,(x, y_0, z_0, \overline{x_0}), \qquad z = \psi\,(x, y_0, z_0, \overline{x_0}), \qquad t = 1$$

du système donné *ne peut admettre de singularités mobiles non algébriques.*

Théorème II. — Pour que l'intégrale générale $y = \varphi$, $z = \psi$ admette des singularités transcendantes mobiles, il faut (mais il ne suffit pas) que les égalités

$$X = 0, \qquad tA - yC = 0, \qquad yB - zC = 0, \qquad zC - tB = 0$$

soient compatibles (quelque soit x) pour des valeurs de y, z, t, qui ne soient pas toutes nulles.

Théorème III. — Pour que l'intégrale générale $y = \varphi$, $z = \psi$ admette des singularités essentielles mobiles, il faut (mais il ne suffit pas) que le polynôme $X(y, z, t, x)$ [ou un de ses diviseurs $X_1(y, z, t, x)$] définisse une intégrale première particularisée du système (2).

12. Quand il existe des singularités transcendantes ou essentielles mobiles, l'intégrale générale $y = \varphi$, $z = \psi$, considérée comme fonction des deux constantes y_0, z_0, est affectée de singularités transcendantes variables avec x. Mais peut-elle présenter des singularités non algébriques *indépendantes* de x ? A cette question répond ce nouveau théorème :

Théorème IV. — Pour que les fonctions $y = \varphi(\overline{x}, y_0, \overline{z_0}, \overline{x_0})$, $z = \psi(\overline{x}, y_0, \overline{z_0}, \overline{x_0})$ [ou $y = \varphi(\overline{x}, \overline{y_0}, z_0, \overline{x_0})$, $z = \psi(\overline{x}, \overline{y_0}, z_0, \overline{x_0})$] présentent dans le plan des y_0 (ou dans le plan des z_0) des singularités non algébriques indépendantes de x, *il faut (mais il ne suffit pas) que la condition du théorème III soit remplie. De plus, les affixes d'une telle singularité rendus homogènes, soit $y_0 = \frac{Y_0}{T_0}$, $z_0 = \frac{Z_0}{T_0}$, vérifient la relation*

$$X(Y_0, Z_0, T_0, x_0) = 0. \tag{4}$$

En particulier, quand l'intégrale générale $y(x)$, $z(x)$ n'admet, comme singularités mobiles, que des points singuliers algébriques, les fonctions $y = \varphi$, $z = \psi$, regardées comme fonctions d'une des deux constantes y_0, z_0, n'admettent que des singularités algébriques, *à moins que la condition du théorème III ne soit remplie.* Dans ce dernier cas, les affixes des singularités transcendantes (rendus homogènes) vérifient la relation (4).

13. Les propositions s'étendent à un système (1) *quelconque* où les $f_i(y_1, \dots y_m, x)$ sont algébriques en $y_1, \dots, y_m$. Elles entraînent d'importantes conséquences : considérons, par exemple, un système

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \tag{1''}$$

où X, Y, Z sont algébriques en x, y, z, et où x, y, z jouent un rôle *symétrique* ; j'entends par là qu'on se propose d'étudier les relations entre x, y, z définies par (1)″. On voit aussitôt qu'une transformation homographique à trois variables effectuée sur x, y, z ramène le système (1)″ à une forme telle que la nouvelle intégrale $y(x)$, $z(x)$ ne présente plus de singularités *essentielles.* On n'a plus dès lors à se préoccuper que des singularités *transcendantes.*

Quand la variable indépendante est, au contraire, *donnée*, notamment quand on veut étudier les systèmes dont l'intégrale générale $y(x)$, $z(x)$ n'acquiert qu'un nombre fini

de valeurs autour des points critiques mobiles, il est loisible seulement d'effectuer sur y, z une transformation algébrique (où x figure analytiquement) et de changer x en $g(x)$. Mais ces transformations ne font pas disparaître les singularités essentielles mobiles de l'intégrale, s'il en existe. Pour appliquer à la discussion de ces singularités les théorèmes I, II et III, j'ai dû préciser les propriétés d'une fonction uniforme (ou à n branches) dans le voisinage d'un point singulier.

14. Quand une fonction analytique $y(x)$, uniforme dans une certaine aire A, admet dans cette aire le point $x = \overline{a}$ comme point singulier (non polaire) *isolé*, on sait qu'elle est complètement indéterminée dans le domaine de $x = \overline{a}$; d'une façon plus précise, un théorème de M. Picard exprime qu'elle prend une infinité de fois toutes les valeurs $y = A$, sauf deux au plus. La même proposition subsiste évidemment si $\overline{a}$ est un point limite de points transcendants isolés. Mais *qu'arrive-t-il quand* $\overline{a}$ *appartient à un ensemble parfait* E *de points singuliers?* La seule chose qui soit certaine, *a priori*, c'est que les fonctions $y(x)$, $y'(x)$ ne peuvent être *toutes deux* continues dans un cercle de centre $\overline{a}$, si petit que soit le rayon de cercle. Deux cas sont à distinguer, suivant que $\overline{a}$ fait ou non partie d'une *coupure*, autrement dit suivant que l'ensemble parfait E est *bien enchaîné ou mal enchaîné*. Dans le premier cas, il est possible que $y(x)$, $y'(x)$ tendent vers une limite, quand x tend vers $\overline{a}$ sans rencontrer de points E. *Dans le second cas*, au contraire, je montre que $\overline{a}$ *ou bien est un point essentiel de* $y(x)$ (j'entends que y est indéterminé quand x tend vers $\overline{a}$ sans rencontrer de points E) (*ou bien est un point limite de points essentiels* [1].

De plus, soit A une aire attenant à une ligne (c'est-à-dire à un ensemble parfait bien enchaîné de points E); *si la fonction* $y(x)$ *est holomorphe dans* A *et s'annule en chaque point* E, *elle est identiquement nulle.*

15. Ces propositions, jointes aux théorèmes I, II, III, IV, conduisent à partager les systèmes du second ordre en deux catégories. Considérons une équation

$$\text{(B)} \qquad F(y'', y', y, x) = 0$$

algébrique en y'', y', y, analytique en x, et convenons d'appeler *transformée algébrique* de (B) toute équation du second ordre qui se déduit de (B) en remplaçant y par $z = \chi(y, y', x)$, où χ est algébrique en y, y', et analytique en x. Nous dirons que *l'équation* (B) *est de*

(1) On peut préciser beaucoup ce théorème et montrer que $y(x)$ est complètement indéterminé pour $x = \overline{a}$; j'entends que (dans le domaine de $x = \overline{a}$) $y(x)$ s'approche autant que l'on veut de toute valeur donnée à l'avance. Mais j'ai seulement esquissé dans ces leçons la démonstration assez délicate de cette dernière proposition à laquelle nous n'aurons pas recours par la suite. J'ai insisté, d'autre part (pages 440-441), sur la nécessité de séparer les transcendantes *uniformes* en trois grandes classes T, T', T'': T représentant les transcendantes qui possèdent au moins un point essentiel isolé, T' celles qui possèdent un ensemble parfait mal enchaîné de points singuliers, T'' celles qui n'ont d'autres singularités transcendantes que des coupures. Aux transcendantes T s'appliquent les deux théorèmes de M. Picard.

1° L'égalité $T(x) - A = 0$ a une infinité de racines, sauf au plus pour deux valeurs de A.

2° Si deux fonctions T vérifient une relation algébrique, cette relation est de genre zéro ou 1.

Ces deux théorèmes sont en défaut pour les fonctions T', comme pour les fonctions T'', ainsi qu'il résulte des travaux de M. Poincaré. Deux fonctions T' (ou deux fonctions T'') peuvent vérifier une relation algébrique de genre quelconque. Il existe des fonctions T' (ou T'') qui ne prennent pas q valeurs données à l'avance (si grand que soit q). Mais, tandis qu'une transcendante T' s'approche autant qu'on le veut de toute valeur A, le module d'une transcendante T'' peut, par exemple, rester inférieur à un nombre positif fini N.

LA CLASSE SINGULIÈRE, *si elle satisfait (ainsi que toutes ses transformations algébriques) aux deux conditions suivantes :*

1° Une branche au moins de la fonction $y''(y', \overline{y}, \overline{x})$ définie par (B) est telle que $\frac{y''}{y'^2}$ reste fini pour $y' = \infty$;

2° La fonction $y''(y', y, x)$ admet au moins un pôle $y = G(x)$ (d'ordre égal à 1 ou plus grand que 1) indépendant de y'. Ce pôle peut être d'ailleurs $y = \infty$: j'entends par là que, dans la transformée de (B) en $y = \frac{1}{z}$, la fonction $z''(z', z, x)$ admet $z = o$ comme pôle (d'ordre au moins égal à 1), quels que soient z' et x.

Toute équation (B), qui n'est pas de la classe singulière est dite de la CLASSE GÉNÉRALE. Pour qu'une équation (B) soit de la classe générale, il faut donc et il suffit qu'une de ses transformées algébriques échappe à une des deux conditions précédentes.

Cette définition admise, on établit le théorème suivant :

Soit E_n une équation (B) quelconque dont l'*intégrale générale* $y(x)$ n'acquiert qu'un nombre n de valeurs autour des points critiques mobiles. *Si* E_n *est de la classe* GÉNÉRALE, $y(x)$ *est une fonction* ALGÉBRIQUE *des deux constantes* y_0, y'_0.

Si E_n *est de la classe* SINGULIÈRE, *ou bien* $y(x)$ *a des singularités* ESSENTIELLES MOBILES, *ou bien* $y(x)$ *n'a d'autres singularités mobiles que des pôles. Dans ce dernier cas,* $y = \varphi(\overline{x}, y_0', y_0, \overline{x}_0)$ *est une fonction* TRANSCENDANTE (*à un nombre fini de branches*) *de* y'_0, y_0, *et admet* $y'_0 = \infty$ *comme point essentiel ainsi qu'une au moins des valeurs* $y_0 = G(\overline{x}_0)$; *en dehors des valeurs* $y'_0 = \infty$, $y_0 = G(\overline{x}_0)$, *elle ne présente que des singularités algébriques.*

Sous une forme plus brève, on peut dire que *l'intégrale d'une équation* E_n *renferme les constantes* y_0, y'_0 *sous forme* ALGÉBRIQUE *ou* TRANSCENDANTE, *suivant que* E_n *appartient à la classe* GÉNÉRALE *ou à la classe* SINGULIÈRE.

Une classification et des théorèmes analogues s'appliquent à un système (1) quelconque.

16. D'après ce qui précède, ce sont les équations E_n de la classe *générale* dont l'étude est évidemment la plus simple. Tout d'abord, je montre que, pour ces équations, le cas de n quelconque se ramène au cas de $n = 1$; autrement dit, *toute équation dont l'intégrale est une fonction algébrique des deux constantes est réductible algébriquement à une équation dont l'intégrale* $y(x)$ *a ses points critiques fixes et renferme rationnellement les constantes* y_0, y'_0, y''_0 [liées par la relation $F(y''_0, y'_0, y_0, \overline{x}_0) = o$]. Cette proposition comporte les mêmes remarques que la proposition analogue relative au premier ordre (§ 8).

Tout revient donc à étudier les équations dont l'intégrale dépend rationnellement de y_0, y'_0, y''_0. C'est M. Picard, dans ses belles et profondes recherches sur les fonctions algébriques de deux variables, qui a considéré, le premier, cette catégorie d'équations, et les résultats auxquels il est parvenu constituent une des plus importantes applications de ses théorèmes bien connus sur les transformations birationnelles des surfaces algébriques. Ces résultats, et ceux que j'ai obtenus en prenant comme point de départ les recherches de M. Picard, *permettent d'élucider la nature de l'intégrale dans tous les cas où elle dépend algébriquement des constantes.* On trouve que toute équation E_n de la classe générale ou bien équivaut à une combinaison *de deux équations du premier*

ordre à points critiques fixes, ou bien se ramène *algébriquement* soit à une équation *linéaire*, soit *à un système hyperelliptique* (5) :

$$(5)\qquad \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}+\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=h(x)\,dx,\qquad \frac{ydy}{\sqrt{R(y)}}+\frac{zdz}{\sqrt{R(z)}}=k(z)\,dx,$$
$$R=a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3+a_4y^4+a_5y^5.$$

Pour établir ces résultats, j'ai dû faire une longue digression sur les transformations des surfaces algébriques. Les leçons 15 et 16 renferment une théorie *complètement achevée* des surfaces qui admettent un groupe continu fini de transformations birationnelles. Cette théorie comporte beaucoup d'autres applications : elle permet, par exemple, de *former explicitement tous les groupes continus finis à deux variables qui sont algébriques.*

J'ai eu besoin aussi de m'appuyer sur le célèbre théorème qu'a *énoncé* (sans en indiquer de démonstration) M. Weierstrass *sur les fonctions de plusieurs variables qui possèdent un théorème d'addition*. La 16e leçon contient une démonstration rigoureuse de ce théorème, démonstration qui présente de très profondes difficultés.

J'ajoute que les méthodes et les résultats indiqués dans ce paragraphe s'étendent sans modification *à un système différentiel quelconque dont l'intégrale ne dépend que d'un nombre* FINI *de constantes qui y figurent* ALGÉBRIQUEMENT.

17. Les propositions précédentes montrent que les transcendantes à n branches définies par une équation E_n de la classe *générale* ne se distinguent pas de celles qu'introduisent les équations linéaires et les quadratures. La même conclusion s'applique-t-elle aux équations E_n de la classe *singulière?*

L'intégrale $y(x)$ d'une telle équation est nécessairement une fonction transcendante de y_0, y'_0. Mais deux cas sont à distinguer, suivant qu'il est ou non possible de choisir les constantes d'intégration *de façon que $y(x)$ soit une fonction algébrique d'une des constantes*. Je conviens de dire que l'intégrale est, dans le premier cas, une fonction *semi-transcendante*, dans le second cas une fonction *transcendante des deux constantes*.

Dans le premier cas, j'ai réussi à élucider la nature de l'intégrale, et j'ai montré que l'équation E_n équivaut à une combinaison de deux équations du premier ordre à points critiques fixes. Les seules équations E_n de la classe singulière qui ne soient pas nécessairement réductibles aux équations du premier ordre, sont donc celles *dont l'intégrale renferme les deux constantes sous forme transcendante de quelque façon qu'on les choisisse.*

J'ai dû préciser, à ce sujet, le sens qu'il convient d'attacher ici au mot *irréductibilité*. Dans la plupart des travaux qui traitent de la réduction des équations différentielles, les variables qui figurent dans les équations jouent un rôle *symétrique ;* on regarde, par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=dx$$

comme définissant une relation entre x et y (relation qui dépend d'une constante). Au contraire, dans les problèmes qui font l'objet principal de ces leçons, la variable indépendante est *donnée* ; on se propose d'étudier les transcendantes $y(x)$ engendrées par l'équation :

$$y'^2=(1-y^2)(1-k^2y^2),$$

ou les transcendantes $y(x)$ engendrées par l'équation :

$$y'^2 = \frac{1}{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

et les deux problèmes sont distincts : le point de vue de Legendre et celui d'Abel et de Jacobi, au lieu d'être confondus comme tout à l'heure, sont maintenant séparés.

En assujettissant la variable indépendante *à rester la même*, j'ai été conduit à une définition précise de l'irréductibilité, définition plus restreinte que celle qu'il faudrait adopter dans d'autres recherches, mais qui s'imposait ici [1]. Une fois adoptée cette définition (qui se trouve développée dans la 21e leçon), on peut établir ce théorème : *Pour qu'une équation* E_n *de la classe singulière (algébrique en* y'', y' y, x*) soit irréductible, il faut et il suffit que son intégrale soit une fonction transcendante (et non semi-transcendante) des deux constantes.*

18. La question est maintenant de savoir s'il existe de telles équations E_n. La réponse est affirmative, ainsi qu'on le montre en formant un type d'équations à points critiques fixes dont l'intégrale est une fonction uniforme de y_0, y'_0, qui reste transcendante par rapport aux deux constantes quelles que soient les constantes qu'on substitue à $y_0 y'_0$.

Quant à la formation de toutes les équations E_n irréductibles et de la classe singulière, c'est là un problème du plus haut intérêt, mais qui exige encore de longues recherches. Je me suis borné à donner un aperçu des principaux résultats que j'ai obtenus jusqu'ici, tels que *la détermination de toutes les équations à points critiques fixes de la forme :*

$$y'' = \mathrm{R}(y', y),$$

où R *est rationnel en* y', y *et indépendant de* x*; la détermination (en supposant le genre* p *de la surface* $\mathrm{F}(y'', y', y, \bar{x}) = 0$ *supérieur à l'unité) de toutes les équations* $\mathrm{F}(y'', y', y, x) = 0$, *dont l'intégrale générale* $y(x)$ *n'a comme singularités mobiles que des pôles*, etc. Dans ce dernier problème, la théorie des transformations *biuniformes* des surfaces algébriques joue un rôle essentiel. Ces résultats et d'autres, encore incomplets, seront exposés en détail dans des mémoires ultérieurs.

19. J'observe, enfin, qu'à un système de la forme (1) il est loisible de substituer un système différentiel quelconque (S) portant sur m fonctions $y_1, \ldots, y_m$ de q variables $x_1, \ldots, x_q$, algébrique par rapport aux y et à leurs dérivées, et dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre *fini* de constantes. Toutes les propositions énoncées plus haut pour un système (1) s'étendent à un tel système (S).

Appliquées, en particulier, aux systèmes (S) de la forme :

$$\mathrm{P}_{1,i}(y_1, \ldots, y_m)\, dy_1 + \ldots + \mathrm{P}_{m,i}(y_1, \ldots, y_m)\, dy_m = dx_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où les premiers membres sont des différentielles totales exactes, ces généralités per-

[1] C'est ainsi que l'équation algébrique $\mathrm{F}(y''', y'', y', y) = 0$ qui engendre la fonction modulaire $y = \varphi(x)$, est *irréductible* au sens que nous adoptons, bien que cette équation se ramène par des quadratures à une équation de Riccati, quand on y regarde x comme une fonction de y.

mettent d'édifier toute une théorie des fonctions méromorphes $2m$ fois périodiques de m variables, sans rien emprunter à la doctrine des courbes algébriques. Elles permettent encore de *déterminer toutes les fonctions uniformes* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *définies par l'inversion de deux différentielles totales algébriques*

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du, \qquad P_1(x, y)\,dx + Q_1(x, y)\,dy = dv;$$

ces couples $x(u, v)$, $y(u, v)$ renferment notamment un type *quadruplement périodique et non méromorphe*. Mais le développement de ces indications m'eût entraîné trop loin.

20. C'est au point de vue de la théorie des fonctions analytiques que je me suis placé jusqu'ici. Mais il est clair que les méthodes précédentes s'appliquent aussi bien, et même se simplifient, quand, au lieu d'embrasser le domaine complexe de la variable, on se restreint *aux valeurs réelles*. Dans une dernière leçon, j'ai exposé quelques-unes des principales conséquences qu'entraînent ces méthodes pour les systèmes différentiels *où la variable et les fonctions sont réelles*, et notamment pour les équations de la *Dynamique*.

Soit S un système matériel à n degrés de liberté, dont les liaisons sont indépendantes du temps, et qui est soumis à des forces fonctions seulement de la position de S. Le problème général de la Dynamique consiste à calculer la position de S à un instant t *quelconque*, connaissant ses conditions initiales pour $t = 0$. Théoriquement la chose est-elle toujours possible? C'est la première question qui se pose. Quand S passe par certaines positions *singulières*, on sait que les équations de la mécanique ne suffisent plus nécessairement à déterminer le mouvement ultérieur du système. Mais une singularité beaucoup plus inattendue peut arrêter l'étude du mouvement: il arrive (ainsi qu'on le voit sur des exemples extrêmement simples) que S ne tende vers aucune position limite ni vers l'infini quand t tend vers un certain instant t_1.

On serait, il est vrai, porté à croire que de telles singularités ne se présentent jamais dans les problèmes naturels, puisqu'un système matériel occupe toujours à un instant donné une position déterminée. L'argument ne serait fondé que si les formules de la Dynamique correspondaient *rigoureusement* à la réalité. A ce compte, deux points matériels s'attirant suivant les lois de Newton ne devraient jamais se rencontrer, parce que la vitesse d'un élément de matière ne saurait devenir infinie. Dans ce dernier cas, le paradoxe se lève aussitôt quand on observe que les deux éléments matériels, ayant toujours des dimensions finies, se choqueront avant que leurs vitesses soient infinies; mais leurs vitesses, au moment du choc, seront d'autant plus grandes que leurs dimensions seront plus petites. C'est une explication du même genre qui rend compte de la singularité que je signale: si, pour $t = t_1$, les fonctions $x_i(t)$ qui définissent la position de S deviennent indéterminées, c'est que S, *avant l'instant* t_1, passe par un état où les hypothèses et lois de forces, qui ont permis de mettre le problème en équations, cessent d'être suffisamment exactes; mais S n'atteint cet état qu'après une période d'*affolement* d'autant plus accentuée que ces hypothèses et lois sont plus voisines de la réalité.

Il y a donc le plus grand intérêt à savoir reconnaître, sur un système d'équations de Lagrange donné, si les singularités de cette nature existent ou non. Quand on montre qu'elles existent, on met en évidence la particularité la plus remarquable du mouvement;

quand on montre qu'elles n'existent pas, on est certain de pouvoir suivre indéfiniment le mouvement de S, au moins tant que S ne passera pas par une position singulière.

L'application *au domaine réel* des théorèmes énoncés plus haut sur les singularités essentielles mobiles conduit à d'importantes propositions, parmi lesquelles je cite la suivante :

« *Théorème.* — Admettons qu'il n'existe pas de positions singulières de S à distance « finie et que les forces dérivent d'un potentiel U ($x_1, \ldots, x_n$) qui soit, ainsi que les coef- « ficients de la force vive 2T, une fonction de $x_1, \ldots, x_n$ à un nombre fini de branches.

« Admettons de plus que, K désignant le moment d'inertie de S relativement à « l'origine, $\frac{U}{K^2}$ reste moindre qu'une quantité finie A pour toute position de S. Quand « t tend vers t_1 (quels que soient t_1 et les conditions initiales), les x_i, x'_i tendent vers des « valeurs finies déterminées [1] ; les $x_i(t)$ se laissent développer en séries de polynômes :

$$x_i(t) = \sum_{r=0}^{r=\infty} P_r^{(i)}(t) \tag{7}$$

« convergentes pour t quelconque, séries dont les coefficients successifs se calculent en « fonctions des conditions initiales *par de simples différentiations*, comme ceux d'une « série de Taylor, et qui jouissent, par rapport à la convergence, la différentiation, etc., « des principales propriétés d'une série de Taylor. »

On peut dire que les séries (7) *intègrent* les équations du mouvement, au sens moderne de ce mot. C'est dans le type que je viens de définir que rentrent les problèmes intéressant *le corps solide fixé par un de ses points*.

Le problème des n corps ne rentre pas dans la catégorie en question ; mais à ce problème s'applique la proposition suivante :

Si, t tendant vers t_1, *certains des n corps ne tendent vers aucune position limite à distance finie, il existe au moins quatre corps* $M_1, \ldots, M_\nu$ ($\nu \geqq 4$), *qui ne tendent vers aucune position limite, et tels que le minimum* $\rho(t)$ *des distances mutuelles* r_{ij} *de ces points* $M_1, \ldots, M_\nu$ *tende vers zéro avec* $t - t_1$, *sans qu'aucune des quantités* r_{ij} *tende constamment vers zéro.*

La singularité en question ne saurait donc se produire que par suite de croisements de ν astres entre eux ($\nu \geqq 4$), croisements de plus en plus fréquents quand t tend vers t_1 et de plus en plus semblables à des chocs. Ces *pseudo-chocs* ont déjà été signalés par M. Poincaré comme pouvant donner naissance (pour $n > 3$) à des solutions périodiques d'une nature particulière.

Pour $n = 3$, la proposition énoncée montre que les trois corps tendent nécessairement vers des positions limites à distance finie quand t tend vers t_1. Il suit de là que, dans le cas de trois corps, les coordonnées x_i, y_i, z_i, des trois astres se laissent développer en séries de la forme (7), convergentes quel que soit t, exception étant faite pour les conditions initiales telles qu'au bout d'un temps fini t_1 deux des astres se choquent en un point déterminé de l'espace.

Ces considérations suffisent, je crois, à montrer l'intérêt que présente, *au point de vue du réel*, la théorie analytique des équations différentielles.

[1] On suppose (ce qui est toujours possible) les x_i choisis de façon qu'ils restent finis tant que tous les points de S sont à distance finie.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

Équations différentielles du premier ordre

DEUXIÈME PARTIE

Équations différentielles d'ordre supérieur

ERRATA

Pages 234, ligne 8 (en marge): *au lieu de* (1)', *lire* (2).

— 359, les lignes 17 et 18 doivent être ponctuées ainsi : « ce sont — ou des fonctions hyperelliptiques, X (u,v), Y (u,v) (qui peuvent être dégénérées) dans lesquelles on a remplacé u par $\lambda x + a$, v par $\mu x + b$, — ou des fonctions elliptiques de x ... »

— 360, ligne 10 : *au lieu de :* « fonctions algébriques de x, ou de e^{gx}, ou de $\wp(x, g_2, g_3)$, *lire ;* « fonctions algébriques d'une constante b et de u, où u désigne soit $x + a$, soit e^{gx+a}, soit $\wp(x + a, g_2, g_3)$. »

— 411, la dernière ligne de la note 2 (au bas de la page) doit être ponctuée ainsi : « x_0 fait partie des points ξ' [qui annulent Q' (z', o, x) quel que soit z'], ou des points ξ. »

— 438, 2ᵉ ligne de la note 1 : *au lieu de :* « entamons un point x_i », *lire :* « entourons un point x_i. »

— 442, 7ᵉ ligne à partir du bas : *au lieu de :* « ne prend que n valeurs m autour... », *lire :* « ne prend que n valeurs autour... »

— 547, 3ᵉ ligne à partir du bas : *au lieu de :* « $y = x^2 + \frac{1}{1^{x^2}}$ », *lire :* « $y = x^2 + \frac{1}{e^{x^2}}$ ».

Tours. — Imprimerie DESLIS FRÈRES.

Première Leçon.

Considérations générales sur les singularités des Équations différentielles.

L'objet principal de ces leçons est l'étude des équations différentielles dont l'intégrale générale est une fonction analytique uniforme ou à un nombre fini n de déterminations.

Pour comprendre l'importance de cette étude, il suffit de remarquer qu'une équation dont l'intégrale est uniforme doit être regardée comme intégrée au sens moderne de ce mot. Dans ces dernières années, en effet, grâce surtout aux travaux de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler, la représentation des fonctions uniformes a fait de tels progrès, qu'il sera toujours possible, si l'intégrale est uniforme, de la définir et de la suivre dans tout son domaine d'existence à l'aide d'un développement unique, et c'est en cela précisément que consiste l'intégration entendue dans son sens le plus large. Il y aurait donc grand intérêt à mettre en évidence une classe aussi étendue d'équations intégrables. La même remarque s'applique aux intégrales à n déterminations.

Mais l'importance de cette classe d'équations apparaît mieux encore si on observe que la plupart des transcendantes auxiliaires, dont le rôle est si considérable (fonctions exponentielle, elliptiques, fuchsiennes, etc), intègrent

des équations différentielles algébriques très simples[1]. Les équations différentielles apparaissent donc comme la source des transcendantes uniformes les plus remarquables, susceptibles notamment de contribuer à l'intégration d'autres equations différentielles dont l'intégrale n'est plus uniforme.

Points critiques fixes et points critiques mobiles —— Quand on approfondit les conditions necessaires pour qu'une équation ait son intégrale uniforme, on se trouve amené par la nature même du problème à le décomposer en deux problèmes successifs, et cela de la manière suivante : étant donnée une equation différentielle, les points critiques d'une de ses intégrales sont les uns fixes (indépendants de l'intégrale considérée), les autres mobiles (variables avec l'intégrale considérée). Par exemple, l'intégrale $y = \sqrt{\log x + C}$ de l'équation $y' = \frac{1}{2xy}$, admet le point critique fixe $x = 0$ et le point critique mobile $x = e^{-C}$. Pour que l'intégrale générale d'une équation soit uniforme, il faut d'abord qu'elle ne présente pas de points critiques mobiles, ensuite qu'elle ne présente pas de points critiques fixes, et l'étude de ces deux conditions exige des méthodes toutes différentes. On est conduit ainsi à généraliser le problème primitif, et à introduire, comme équations intermédiaires, les équations dont l'intégrale a ses points critiques fixes ; nous donnerons à ces équations, le nom d'équations différentielles à points critiques fixes. Cette classe d'équations est d'ailleurs remarquable par elle-même, elle constitue une extension des équations linéaires, dont une propriété fondamentale est précisément d'avoir toutes leurs singularités fixes, en sorte que plusieurs des méthodes développées pour les équations linéaires sont applicables (moyennant certaines modifications)

---

[1] La fonction Γ fait exception à cette remarque.

à une équation quelconque dont les points critiques sont fixes.

Dans l'étude des intégrales à n déterminations, on se trouve amené de la même manière à séparer les points critiques en points fixes et en points mobiles, dont le rôle est tout différent. D'une façon précise, étant donnée une équation quelconque, marquons, dans le plan de la variable complexe x, les points critiques fixes ξ de l'intégrale générale, et faisons varier x d'une façon quelconque, sans tourner autour d'un de ces points ξ : il suffit, par exemple, de joindre ces points ξ par des coupures que x est assujetti à ne pas franchir. Si partant d'un point x avec une valeur quelconque de l'intégrale $y(x)$, on revient au même point x avec un nombre limité n de valeurs de y, et cela de quelque manière que le point x ait varié dans son plan sans franchir les coupures, on dit que l'intégrale $y(x)$ n'acquiert que n valeurs autour des points critiques mobiles. Quand il en est ainsi, l'intégrale y vérifie une relation algébrique de degré n dont les coefficients $A(x)$ ont leurs points critiques fixes. Pour que l'intégrale soit une fonction à un nombre fini de déterminations, il faut que ces coefficients $A(x)$ soient eux-mêmes des fonctions à q déterminations. Par exemple, l'intégrale $y = \sqrt{C + \log x}$ n'acquiert que deux valeurs autour des points critiques mobiles $x = e^{-C}$, au lieu qu'une infinité de valeurs se permutent autour du point fixe $x = 0$.

Dans les leçons qui vont suivre, nous établirons un certain nombre de résultats généraux qui s'appliquent à toutes les équations différentielles où la fonction et ses dérivées figurent algébriquement et où la variable indépendante entre d'une façon analytique quelconque; mais nous aurons surtout en vue les équations dont l'intégrale n'acquiert que n déterminations autour des points critiques mobiles.

Singularités des équations différentielles.

Ce sont les singularités de l'intégrale qui compliquent si profondément l'étude des équations différentielles et arrêtent la convergence des développements. Il importe avant tout, de bien prévoir les singularités diverses qu'on est exposé à rencontrer.

Citons d'abord quelques exemples empruntés à l'équation du premier ordre :

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0$$

algébrique en y', y, x. Il est clair que l'intégrale d'une telle équation peut présenter des points critiques algébriques ; on s'en assure en formant les équations dont l'intégrale générale est :

$$y = \frac{1}{x-C} \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{x-C},$$

C désignant une constante ; ces fonctions admettent le point mobile $x = C$ la première comme pôle, la seconde comme point critique. Mais l'intégrale d'une équation (1) peut aussi admettre des points singuliers transcendants comme le montrent les équations :

$$(2) \qquad y' + \frac{y^2}{x} = 0, \quad y' + \frac{y}{x^2} = 0, \qquad y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x},$$

qui ont respectivement comme intégrale :

$$y = \frac{1}{C + \log x}, \quad y = C e^{\frac{1}{x}}, \quad y = \sin(C + \log x);$$

le point $x = 0$ est (quel que soit C) un point critique transcendant de la première intégrale, un point essentiel de la seconde, un point à la fois essentiel et critique transcendant de la troisième.

En éliminant x entre une de ces équations (2) et l'équation qui s'en déduit par dérivation, on forme aussitôt des équations du second ordre dont l'intégrale admet des points transcendants mobiles, à savoir les équations :

$$(3) \qquad y'' + \frac{2y'^2}{y} + \frac{1}{y^2} = 0, \quad \frac{yy''}{y'^2} = 1 + 2\sqrt{-\frac{y}{y'}}, \quad y'' + \frac{yy'^2}{1-y^2} = \frac{y'^2}{\sqrt{1-y^2}},$$

dont l'intégrale est :

$$y = \frac{1}{C + \log(x - C')} \quad y = C e^{\frac{1}{x-C'}}, \quad y = \sin\left[C + \log(x - C')\right],$$

C et C' représentant les deux constantes d'intégration.

Les équations du troisième ordre offrent la singularité plus curieuse encore de coupures essentielles variables avec les constantes d'intégration. Un exemple remarquable en est fourni par l'équation du troisième ordre que vérifie la fonction modulaire. Rappelons rapidement la manière de former cette équation.

Partons de l'intégrale elliptique :

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - 27y(\xi+1)}},$$

et soit $A(y)$, $B(y)$ les deux périodes de cette intégrale. Posons : $x = \frac{A(y)}{B(y)}$; la fonction x de y ainsi définie ne possède, dans tout le plan des y, que trois points singuliers, à savoir $y=0$, $y=1$, $y=\infty$, et autour de ces points (qui sont de l'espèce logarithmique) se permutent une infinité de valeurs de x qui se déduisent de l'une d'entre elles x_1 par la formule :

$$(4) \qquad x = \frac{m x_1 + n}{p x_1 + q},$$

m, n, p, q étant des entiers, positifs, nuls ou négatifs, assujettis à la condition $mq - np = \pm 1$. Inversement à une valeur de x correspond une seule valeur de y, soit $y = \varphi(x)$: la fonction $\varphi(x)$, dite fonction modulaire, est une fonction uniforme de x, qui ne change pas quand on effectue sur x la transformation (4), et qui admet l'axe réel comme coupure essentielle.

Ceci posé, soit $x_1(y)$ une détermination quelconque du rapport $\frac{A(y)}{B(y)}$, et soit $x(y)$ une fonction définie par la relation

$$(5) \qquad x_1 = \frac{ax + b}{cx + d},$$

α, β, c, d étant des constantes. Éliminons α, β, c, d entre l'équation (5) et les trois équations qui s'en déduisent en dérivant trois fois par rapport à y; un calcul tout élémentaire donne:

$$(6)\qquad \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 = \frac{x_1'''}{x_1'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x_1''}{x_1'}\right)^2.$$

Le second membre de (6), d'après cela, a une valeur indépendante de la détermination choisie pour $x_1(y)$; c'est donc une fonction uniforme $G(y)$ et comme cette fonction est dénuée de points essentiels,[1] c'est une fonction rationnelle de y, qu'on calcule aisément.

On trouve: $G(y) = \frac{1}{2(y-1)^2} + \frac{4}{9}\frac{1}{y^2} - \frac{41}{72}\frac{1}{y(y-1)}$.

La fonction $x(y)$ définie par (4) vérifie donc l'équation différentielle algébrique:

$$\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 = \frac{1}{2(y-1)^2} + \frac{4}{9}\frac{1}{y^2} - \frac{41}{72}\frac{1}{y(y-1)}.$$

Si maintenant nous prenons y comme fonction et x comme variable, il vient:

$$(7)\qquad \frac{y'''}{y'^3} - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^4} = \frac{1}{2(y-1)^2} + \frac{4}{9}\frac{1}{y^2} - \frac{41}{72}\frac{1}{y(y-1)},$$

équation dont l'intégrale générale est $y = \varphi\left(\frac{\alpha x + \beta}{c x + d}\right)$, φ représentant la fonction modulaire. Cette intégrale est une fonction uniforme de x, qui (pour des valeurs quelconques des constantes α, β, c, d) admet une ligne singulière, à savoir le cercle dans lequel se transforme l'axe réel du plan des x quand on change x en $\frac{\alpha x + \beta}{c x + d}$. Si on pose $x = u + iv$, $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, ... $d = d' + i d''$, ce cercle a pour

---

[1] Les seuls points qui peuvent être points essentiels de $G(y)$ sont les points $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$; or en ces points $G(y)$ ne saurait devenir indéterminé, puisque $\frac{A(y)}{B(y)}$ n'est pas indéterminé, non plus que ses dérivées première, seconde et troisième

équation :

$$o = (u^2+v^2)(a'c''-a''c') + u(a'd''-a''d'+b'c''-b''c') + v(c'b'+c''b''-a'd'-a''d'') + b'd''-b''d',$$

et il varie avec a, b, c, d.

Ces exemples nous conduisent à la classification suivante des singularités des équations différentielles : soit S un système quelconque de m équations du premier ordre :

$$(S) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i\,(y_1, y_2, \ldots\ldots y_m, x), \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

où les f_i sont algébriques en $y_1, \ldots y_m$ et dépendent de x d'une façon quelconque.(1) Soit d'autre part $y_1(x) \ldots y_m(x)$ une intégrale de S holomorphe dans le voisinage du point x_0, et soit enfin $\bar{a}$ le premier point singulier qu'on rencontre quand x s'éloigne de x_0 sur un chemin quelconque L : au point $\bar{a}$, toutes les fonctions $y_i(x)$, ou certaines d'entre elles, cessent d'être régulières. Pour ces fonctions, le point $\bar{a}$ est soit un point singulier algébrique, soit un point singulier transcendant. Dans ce dernier cas, trois circonstances sont à distinguer :

1° $\bar{a}$ ne fait pas partie d'une ligne singulière et les fonctions $y_1(x), \ldots\, y_n(x)$ tendent respectivement (quand x tend vers $\bar{a}$ d'une façon quelconque) vers des limites déterminées ou vers l'infini. Le point $\bar{a}$ est dit alors point transcendant ordinaire de l'intégrale. Par exemple, $x = o$ est un point transcendant ordinaire de $y = \log x$, ou de $y = \frac{1}{\log x}$.

2° $\bar{a}$ ne fait pas partie d'une ligne singulière, mais une au moins des fonctions $y_i(x)$ devient indéterminée quand x tend vers $\bar{a}$. Le point $\bar{a}$ est dit alors point essentiel de l'intégrale. Par exemple, $x = o$ est un point essentiel de la fonction $y = e^{\frac{1}{x}}$ ou de la fonction :

$$y = \sin \log x.$$

---

(1) Une équation différentielle d'ordre m, algébrique en $y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}$, peut toujours se mettre sous la forme S.

3° $\bar{x}$ fait partie d'une coupure de l'intégrale. Tel est le cas du point $x = o$ pour la fonction modulaire. Le point $\bar{x}$ est dit encore singularité essentielle.

L'existence de singularités essentielles mobiles constitue une des plus graves difficultés qui se présentent dans la théorie des équations différentielles. On n'aperçoit, en effet, a priori aucun moyen d'étudier dans le voisinage d'un point x_o celles des intégrales qui deviennent indéterminées en ce point, ni même de décider si de telles intégrales existent ou non.

Il convient d'insister sur ce point qui n'a été mis en pleine lumière qu'assez récemment. Jusque dans ces dernières années, les travaux consacrés aux équations différentielles ne prévoyaient pas explicitement l'existence de points essentiels mobiles, bien qu'on connût depuis longtemps des exemples très simples de cette singularité. En particulier, pour exprimer que l'intégrale d'un système S est uniforme, on croyait suffisant d'exprimer que, x_o étant une valeur quelconque, les solutions qui pour $x = x_o$ ont des valeurs déterminées, sont uniformes dans le domaine de x_o, alors qu'en réalité l'intégrale peut présenter des points ou des lignes essentiels autour desquels plusieurs déterminations se permutent.

C'est ainsi que la démonstration classique de l'uniformité de la fonction elliptique $y = sn\, x$ définie par l'équation:

$$(8) \qquad y'^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$$

se borne à constater que l'intégrale de (8) qui pour $x = x_o$ est égale à y_o ou infinie, admet le point x_o comme point régulier ou comme pôle. Il est clair que cette démonstration est tout à fait insuffisante et qu'il faut la compléter en établissant qu'aucune intégrale ne devient indéterminée pour $x = x_o$. Si le résultat est ici exact, le même raisonnement conduirait en général (et a conduit en effet) aux plus

graves erreurs. Appliquons le par exemple à l'équation :

$$(9) \qquad y'' = y'^2 \left[\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} - \frac{1}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} \right],$$

dont l'intégrale générale est $y = \wp\,(a + \log(x+b))$, où $\wp$ désigne la fonction $\wp$ de M. Weierstrass qui correspond aux valeurs g_2, g_3 des deux invariants, et a, b deux constantes arbitraires. Soit x_0 une valeur finie quelconque, y_0 et y'_0 deux valeurs quelconques (finies ou non); si une solution $y(x)$ de (9) tend vers y_0 quand x tend vers x_0 sur un certain chemin l, et si sa dérivée y' tend vers y'_0, la fonction $y(x)$ est sûrement de caractère rationnel dans le domaine de $x = x_0$.(1) D'après le raisonnement erroné que je signale, l'intégrale générale $y(x)$ serait donc uniforme dans tout le plan, alors qu'elle admet en réalité une infinité de branches.

Ces remarques font comprendre l'importance pour le premier ordre du théorème suivant qui sera démontré dans les leçons prochaines.

« Les singularités transcendantes ou essentielles d'une équation « du premier ordre, $\qquad (10) \qquad F\,(y', y, x) = 0,$
« algébrique en y' et y, sont fixes. »

En particulier, pour qu'une équation (10) ait ses points critiques fixes, il suffit que son intégrale n'offre pas de points critiques algébriques mobiles. C'est ce qui explique pourquoi, en se contentant d'écrire ces dernières conditions, on est arrivé dans le cas du premier ordre à des résultats exacts; c'est ce qui explique aussi pourquoi on est demeuré si longtemps sans s'apercevoir de l'insuffisance du raisonnement.

---

(1) En effet, le seul point x (à distance finie) où une solution $y(x)$ ne soit pas méromorphe c'est le point $x = -b$. Or $y(x)$ est indéterminée quand x tend vers $-b$ sur un chemin l, quelque soit le chemin l.

De l'intégrale considérée comme fonction des constantes. — Le théorème énoncé marque une différence profonde entre le premier ordre et les ordres supérieurs. Une différence presque aussi importante apparaît quand on étudie l'intégrale comme fonction des constantes. Considérons la solution $y_1(x) \dots y_m(x)$ du système (S) déterminée par les conditions : $y_i = y_i^0$ pour $x = x_0$: Cette solution varie avec les quantités $y_1^0, \dots y_m^0, x^0$, et on peut écrire : $y_1 = \psi_1(x, y_1^0, \dots y_m^0, x_0), \dots y_m = \psi_m(x, y_1^0, \dots y_m^0, x_0)$. Il est loisible de donner à x_0 une valeur numérique et d'étudier $\psi_1, \dots \psi_m$ comme fonctions des m constantes distinctes d'intégration $y_1^0, \dots y_m^0$. Dans le cas du premier ordre, nous verrons que la fonction $y = \psi(x, y_0, x_0)$ est une fonction analytique de y_0 qui, dans tout le champ de cette variable, ne saurait présenter que des singularités algébriques, et cela pour les mêmes raisons qui s'opposent à l'existence de singularités transcendantes mobiles de l'intégrale $y(x)$. Au contraire, dès que l'ordre du système (S) dépasse l'unité, l'intégrale, considérée comme fonction des constantes, peut présenter des singularités non algébriques, alors même que l'intégrale $y_1(x)$, $y_m(x)$ a tous ses points singuliers fixes. Par exemple l'intégrale du système :

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = \frac{y'^2}{y}$$

s'écrit :

$$y = y_0 \, e^{\frac{y'_0}{y_0}(x - x_0)} \qquad y' = y'_0 \, e^{\frac{y'_0}{y_0}(x - x_0)} ;$$

y et y' sont deux fonctions holomorphes de x, de y'_0 et de $\frac{1}{y_0}$; les points $y'_0 = \infty$, $y_0 = 0$, sont des points essentiels de ces deux fonctions.

Quand l'intégrale générale $y_1(x), \dots y_m(x)$ est affectée de singularités transcendantes mobiles, les fonctions : $\psi_1 \dots \psi_m$ de $y_1^0, \dots y_m^0$, présentent toujours des singularités non algébriques, variables avec x. Par exemple, l'équation :

$$\frac{yy''}{y'^2} = 1 + 2\sqrt{-\frac{y}{y'}}$$

a pour intégrale:

$$y = y_0 e^{\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)\sqrt{-\frac{y_0}{y'_0}} + \frac{y_0}{y'_0}}},$$

et cette intégrale regardée comme fonction de y_0, y'_0 admet les singularités essentielles fixes $y_0 = 0$, $y'_0 = \infty$, et les singularités essentielles (variables avec x) données par la relation analytique:

$$(x - \bar{x}_0)^2 y'_0 + y_0 = 0.$$

Quand l'intégrale générale $y_1(x), \ldots y_m(x)$ possède des lignes essentielles mobiles, les fonctions $\psi_1, \ldots \psi_m$, où on fait varier une seule des quantités y_i^0, présentent dans le champ de cette variable des coupures essentielles variables avec x. C'est ainsi que l'intégrale de l'équation (7) vérifiée par la fonction modulaire, peut s'écrire $y = \psi(x, y_0, y'_0, y''_0, x_0)$, ψ étant une fonction uniforme de x, y_0, y'_0, y''_0, x_0; si on pose $x = u + iv$, $y = U + iV$, $y' = U' + iV'$, ... la coupure de la fonction $y(x)$ est un cercle.

$$(11) \qquad u^2 + v^2 + \lambda u + \mu v + \nu = 0,$$

λ, μ, ν, désignant des fonctions analytiques réelles de $U_0, V_0, U'_0, V''_0, U''_0, V''_0$. Si on fait varier seulement y''_0 par exemple, la fonction ψ de y''_0 admet comme coupure essentielle la ligne du plan des y''_0 définie par la relation (11) entre U''_0, V''_0.

Bien plus, certaines équations analogues à l'équation (7) et où la fonction algébrique $G(y)$ est seule modifiée, ont comme intégrale générale une fonction analogue à la fonction modulaire mais qui présente, comme coupure essentielle, au lieu d'un cercle une ligne non analytique: cette ligne a une tangente mais non plus une courbure continue. On peut répéter, au sujet de la fonction: $y = \psi(x, y_0, y'_0, y''_0, x_0)$ qui définit l'intégrale, les remarques relatives à l'équation (7), à cela près que la relation (11) doit être

remplacés par une relation non analytique entre les variables réelles $u, v, U_0 \ldots V_0''$, soit $H(u, v, U_0, V_0, U_0', V_0', U_0'', V_0'') = 0$; quand on laisse constantes toutes les variables x, y_0, y_0', y_0'' sauf une seule, la relation $H = 0$, définit, dans le plan de cette dernière variable, une coupure essentielle de ψ, qui n'est pas une ligne analytique.

Ces singularités inattendues montrent nettement la nécessité de raisonner avec une rigueur minutieuse en de telles matières, et de ne rejeter à priori aucune hypothèse, si invraisemblable qu'elle paraisse.

Les leçons prochaines seront consacrées à une étude détaillée des équations du premier ordre. Dans les leçons suivantes, nous exposerons à larges traits, les principaux résultats qu'on ait obtenus jusqu'ici, au point de vue qui nous occupe, pour les ordres supérieurs.

Deuxième Leçon.

Équations différentielles du premier ordre et du premier degré.

Rappel de quelques définitions et propriétés des fonctions analytiques. Je commencerai par rappeler quelques définitions et théorèmes généraux dont nous aurons besoin par la suite.

Une fonction analytique w d'une variable complexe x est dite holomorphe pour $x = a$ si elle est développable en série de Taylor procédant suivant les puissances de $x - a$. Elle est holomorphe dans une aire A du plan des x si elle est

holomorphe pour tout point $x = a$ de cette aire.

Considérons maintenant une fonction w de plusieurs variables complexes, soit de trois variables x, y, z. La fonction w est holomorphe pour $x = a$, $y = b$, $z = c$, si on peut décrire, dans les trois plans de x, de y et de z, trois cercles C, C', C'', de centres a, b, c et de rayons assez petits pour que la fonction w, regardée comme fonction d'une quelconque des variables x, y, z, soit holormorphe à l'intérieur du cercle correspondant, et cela quand les deux autres variables reçoivent des valeurs constantes intérieures aux deux autres cercles. Quand il en est ainsi, la fonction w est aussi holomorphe pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, si x_0, y_0, z_0 sont intérieurs respectivement à C, C', C'', autrement dit, elle est holomorphe dans le domaine C, C', C''. Il suit de là que, pour x_0, y_0, z_0 voisins de a, b, c, la fonction w est aussi holomorphe à l'intérieur de trois cercles de centres x_0, y_0, z_0, et de rayons supérieurs à un nombre fixe ; en effet, si on a :

$$|a - x_0| < \frac{r}{2}, \quad |b - y_0| < \frac{r'}{2}, \quad |c - z_0| < \frac{r''}{2},$$

r, r', r'' étant les rayons de C, C', C'', la fonction w est holomorphe dans les trois cercles :

$$|x - x_0| < \frac{r}{2}, \quad |y - y_0| < \frac{r'}{2}, \quad |z - z_0| < \frac{r''}{2}.$$

Nous dirons qu'une fonction $w(x, y, z)$ est algébroïde pour $x = a$, $y = b$, $z = c$ si à l'intérieur de trois cercles C, C', C'' de centres a, b, c et de rayons suffisamment petits, elle se comporte comme une fonction algébrique, autrement dit si elle vérifie une relation de la forme :

$$A_0 w^m + A_1 w^{m-1} + \dots + A_{m-1} w + A_m = 0,$$

$A_0, A_1 \dots A_m$ étant des fonctions holomorphes de x, y, z, à l'intérieur des cercles C, C', C''. Quand il en est ainsi, la fonction w est algébroïde pour $x = x_0$; $y = y_0$, $z = z_0$, si x_0, y_0, z_0 sont intérieurs respectivement à C, C', C'', c'est à dire qu'elle est algébroïde dans le

domaine C, C', C''. D'après cela, soit x_0, y_0, z_0 des valeurs voisines de a, b, c,

$$|a - x_0| < \frac{r}{2}, \quad |b - y_0| < \frac{r'}{2}, \quad |c - z_0| < \frac{r''}{2};$$

la fonction w est algébroïde à l'intérieur des trois cercles de centres x_0, y_0, z_0 et de rayons $\frac{r}{2}, \frac{r'}{2}, \frac{r''}{2}$.

En particulier, si $w(x, y, z)$ est de la forme $\frac{A_1}{A_0}$, A_1 et A_0 étant holomorphes pour $x = a$, $y = b$, $z = c$, nous dirons que la fonction w est méromorphe pour $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Théorème de Cauchy relatif aux équations du premier ordre — Étant donnée une équation différentielle du premier ordre,

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

Cauchy a montré que, si le coefficient différentiel f est holomorphe pour $x = a$, $y = b$, cette équation admet une intégrale $y(x)$ qui pour $x = a$, est holomorphe et égale à b.

D'une façon plus précise, supposons que $f(x, y)$ soit holomorphe quand x et y varient respectivement dans leur plan à l'intérieur[1] des cercles C et Γ de rayons r et ρ et de centres a et b; soit M le module maximum de $f(x, y)$ dans ce domaine. L'intégrale $y(x)$ égale à b pour $x = a$ est holomorphe dans un cercle de centre a et de rayon au moins égal à $\lambda = r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2Mr}}\right)$.

D'après cela, soit C_1 et Γ_1 deux cercles concentriques à C et à Γ, mais de rayons $\frac{r}{2}$ et $\frac{\rho}{2}$, et soit x_0, y_0 deux points intérieur respectivement à C_1 et à Γ_1. L'intégrale $y(x)$ qui est égale à y_0 pour $x = x_0$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon au moins égal à $\frac{r}{2}\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2Mr}}\right) = \frac{\lambda}{2}$, valeur indépendante de x_0, y_0; soit $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ cette intégrale. La fonction $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ est une fonction holomorphe des trois variables x, y_0, x_0 pour $x = a$, $y_0 = b$, $x_0 = a$. En effet, les coefficients

---

[1] Et sur les circonférences.

de la série entière en $(x-x_0)$ qui définit $y(x)$ sont des fonctions analytiques de y_0, x_0, holomorphes dans le domaine

$$(D) \qquad |y_0 - b| \leq \frac{\rho}{2}, \quad |x_0 - a| \leq \frac{r}{2},$$

et d'après la démonstration même de Cauchy, pour toute valeur de x telle que $|x - x_0|$ soit moindre que $\frac{\lambda}{2}$, cette série converge uniformément dans le domaine (D) ; il suit de là que $\varphi(x ; y_0, x_0)$ est une fonction holomorphe de x, y_0, x_0 dans le domaine :

$$|x - a| < \frac{\lambda}{4}, \quad |y_0 - b| < \frac{\rho}{2}, \quad |x_0 - a| < \frac{\lambda}{4};$$

en particulier, φ est est holomorphe pour $x = a$, $y = b$, $x_0 = a$.

Qu'il n'existe qu'une intégrale holomorphe et égale à b pour $x = a$, c'est ce qui ressort en toute évidence du théorème de Cauchy. Mais ne saurait-il exister d'autres intégrales non holomorphes au point a et prenant en a la valeur b? Il n'en est rien. Pour le voir, faisons tendre x vers a sur un certain chemin L[1], et admettons qu'une intégrale de (1), $y = \varphi(x)$ tende vers b: en un point x_0 de L suffisamment voisin de a (et qu'on peut toujours prendre à une distance de a moindre que $\frac{\lambda}{2}$), la valeur correspondante y_0 de y est intérieure au cercle Γ_1; l'intégrale $y = \varphi(x)$, holomorphe à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon $\frac{\lambda}{2}$, est holomorphe au point a et se confond avec l'intégrale de Cauchy.

Qu'arrive-t-il quand $f(x,y)$ est infini pour $x = a$, $y = b$ la fonction $\frac{1}{f(x,y)}$ étant holomorphe pour $x = a$, $y = b$? Dans ces conditions, l'équation :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} = f_1(y, x),$$

---

[1] Le chemin L peut admettre le point a comme point asymptote et sa longueur peut croître indéfiniment quand x tend vers a. La seule condition à laquelle est astreint L est la suivante : si petit que soit ε, il existe sur L un point x_1 tel qu'au delà de ce point le chemin L reste intérieur au cercle de centre a et de rayon ε.

admet une intégrale et une seule $x(y)$ qui tend vers a quand y tend vers b, et cette intégrale est holomorphe pour $y=b$. Si la valeur $x=a$ est un pôle de $f(x,y)$ quel que soit y, autrement dit si $f_1(y,a)$ est identiquement nul, cette intégrale se réduit à $x \equiv a$, et l'équation (1) n'admet pas d'intégrale égale à b pour $x=a$. Ce cas particulier écarté, soit q l'ordre de multiplicité de la racine $y=b$ de l'équation $f_1(a,y)=0$; l'intégrale $x(y)$ en question est de la forme:

$$x-a = h\,(y-b)^{q+1} + K(y-b)^{q+2} + \dots\dots, \quad (h \neq 0);$$

l'équation (1) admet donc une intégrale égale à b pour $x=a$, et cette intégrale admet le point $x=a$ comme point critique algébrique, autour duquel $(q+1)$ valeurs se permutent : toute intégrale de (1) qui tend vers b quand x tend vers a, se confond avec la précédente.

Application aux équations du premier ordre et du premier degré _ Ces généralités rappelées, considérons une équation du premier ordre dont le coefficient différentiel soit une fraction rationnelle en y, soit:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(y,x)}{Q(y,x)},$$

P et Q désignant deux polynômes en y qui pour x quelconque sont premiers entre eux. Les coefficients $\alpha_i(x)$, $\beta_j(x)$ de P et de Q sont des fonctions analytiques quelconques de x.

Donnons à x une valeur x_0 quelconque, pour laquelle les branches considérées des coefficients $\alpha_i(x)$, $\beta_j(x)$ sont holomorphes et qui n'annule pas tous les β_j, et supposons qu'une intégrale $y(x)$ prenne en x_0 la valeur y_0. Trois cas sont possibles.

1er Cas _ $Q(y_0,x_0) \neq 0$; il existe alors une intégrale et une seule qui tend vers y_0 quand x tend vers x_0, et cette intégrale est holomorphe pour $x=x_0$.

2e Cas _ $Q(y_0,x_0)=0$, $P(y_0,x_0) \neq 0$; il existe alors

une intégrale égale à y_0 pour $x=x_0$ et qui admet le point x_0 comme point critique algébrique. Toute intégrale qui tend vers y_0 quand x tend vers x_0 se confond avec la précédente.

3° Cas – $Q(y_0, x_0)=0$, $P(y_0, x_0)=0$. La discussion de ce cas est loin d'être élucidée. Il arrive qu'il n'existe aucune intégrale égale à y_0 pour $x=x_0$, ou qu'il en existe plusieurs ou une infinité; le point x_0 peut être un point singulier transcendant de ces intégrales.

La transformée en $\frac{1}{y}=z$ de l'équation (1) permet de discuter de la même manière les intégrales qui deviennent infinies pour $x=x_0$. Cette transformée peut s'écrire :

$$(2) \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{P(\frac{1}{z}, x)}{Q(\frac{1}{z}, x)} = \frac{P_1(z, x)}{Q_1(z, x)},$$

et si x_0 n'annule pas à la fois $P_1(0, x)$, $Q_1(0, x)$, l'intégrale de l'équation (2) qui s'annule pour $x=x_0$ admet le point x_0 comme point algébrique.

En définitive, marquons, dans le plan des x, tous les points $x=\xi_p$ qui sont des singularités des coefficients α_i, β_j de P ou de Q, ou qui annulent tous les β_j; marquons aussi tous les points ξ_p qui définissent l'abscisse d'une intersection des deux courbes $P(y, x)=0$, $Q(y, x)=0$, ou un zéro commun de $P_1(0, x)$, $Q_1(0, x)$[1]. En tout point x_0 distinct des points ξ_p, une intégrale qui devient soit égale à y_0, soit infinie, admet nécessairement le point x_0 comme point algébrique. Pour que la proposition soit vraie, il suffit même que y tende vers y_0 quand x tend vers x_0 sur un chemin donné.

---

(1) Le point $x=\infty$ est un des points ξ_p si pour la transformée de (1) en $\frac{1}{x}=X$, à savoir $\frac{dy}{dX} = \frac{-1}{X^2}\frac{P(y, \frac{1}{X})}{Q(y, \frac{1}{X})}$, le point $X=0$ fait partie des points Ξ; autrement, $x=\infty$ est un point ordinaire.

Démonstration d'un théorème fondamental

Nous allons établir maintenant le théorème que nous avons déjà signalé

Une intégrale quelconque $y(x)$ de l'équation (1) ne saurait présenter en dehors des points ξ_p de points singuliers transcendants.

D'après ce qui précède, la proposition sera établie, si nous montrons que, x tendant vers un point $\bar{a}$ sur un chemin L (qui ne passe par aucun des points ξ_p), une intégrale $y(x)$ ne peut devenir indéterminée.

Il nous est loisible de supposer que $\bar{a}$ est le premier point non algébrique de $y(x)$ qu'on rencontre sur le chemin L, autrement, soit x_1 ce premier point, on remplacerait $\bar{a}$ par x_1. Ceci admis, l'hypothèse que $y(x)$ devient indéterminé quand x tend vers $\bar{a}$ sur le chemin L va nous conduire à une contradiction.

Voici, en deux mots, l'esprit du raisonnement : marquons, dans le plan des y, les m racines $Y_1, \ldots Y_m$ de l'équation $Q(y, x) = 0$. Décrivons de ces points comme centres des cercles $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ de rayon ϱ très petit, en même temps que de l'origine comme centre un cercle Γ de rayon R très grand, et soit A l'aire intérieure au cercle Γ et extérieure aux cercles γ. Si x_0 est très-voisin de $\bar{a}$ et si y_0 est un point de l'aire A, le coefficient différentiel $\frac{P}{Q}$ est holomorphe pour $x = x_0$, $y = y_0$; l'intégrale qui est égale à y_0 pour $x = x_0$ est holomorphe dans un cercle de centre x_0, dont le rayon λ est supérieur à un certaine limite l quand x_0 reste voisin de $\bar{a}$ et quand y_0 varie dans l'aire A. D'autre part, si $y(x)$ est indéterminé quand x tend vers $\bar{a}$ sur L, il existe des valeurs x_0 de x, aussi voisines de $\bar{a}$ que l'on veut, pour lesquelles la valeur de y est intérieure à l'aire A ; autrement y tendrait vers l'infini ou vers une des valeurs $Y_1, \ldots Y_m$ quand x tend vers $\bar{a}$. En prenant x_0 à une distance de $\bar{a}$ moindre que l, on voit que $y(x)$ serait holomorphe au point $\bar{a}$, ce qui est contre l'hypothèse.

Précisons maintenant les détails du raisonnement : soit μ la limite inférieure de $|y|$ quand x varie sur l_1 entre un point x_1 et le point $\bar{a}$, (μ peut être nul). Quand x_1 tend vers $\bar{a}$, μ reste inférieur à un certain nombre fini μ_0 ; autrement, $y(x)$ tendrait vers l'infini lorsque x tend vers a. Nous prendrons le rayon R du cercle Γ supérieur à μ_0. De même, soit μ_i la limite supérieure de $|y - Y_i|$ quand x varie entre x_1 et $\bar{a}$, [μ_i peut être infinie]; quand x_1 tend vers a, μ_i reste supérieur à un certain nombre positif μ_i^0, autrement y tendrait vers Y_i lorsque x tend vers $\bar{a}$. Nous donnerons au rayon ρ des cercles γ une valeur inférieure à tous les μ_i^0. Dans ces conditions, on pourra trouver des valeurs de x aussi voisines qu'on veut de a, pour lesquelles la valeur de y sera intérieure à l'aire A.

Décrivons maintenant, dans le plan des x, du point $\bar{a}$ comme centre, un cercle c de rayon r assez petit pour que, x variant dans c et sur son contour, les racines $y_1(x), \dots y_m(x)$ de $Q(y,x) = 0$ restent très voisines de $Y_1, \dots Y_m$, par exemple soient comprises à l'intérieur des cercles γ' concentriques aux cercles γ et de rayon $\frac{\rho}{2}$. Quand x varie dans c, et y dans l'aire A extérieure aux cercles γ' et intérieure au cercle Γ' de rayon $R + \frac{\rho}{2}$ (concentrique à Γ), la fonction $\frac{P(y,x)}{Q(y,x)}$ est holomorphe et son module reste inférieur à une certaine limite M ; soit d'autre part x_0 un point distant de $\bar{a}$ de moins de $\frac{r}{2}$, et y_0 un point de l'aire A ; l'intégrale égale à y_0 pour $x = x_0$, est holomorphe à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon $l = \frac{r}{2}(1 - e^{\frac{\rho}{2Mr}})$, comme on le voit aussitôt en entourant les points x_0 et y_0 de cercles de rayons $\frac{r}{2}$ et $\frac{\rho}{2}$.

Nous avons donc bien établi en toute rigueur ce théorème : Les seuls points singuliers transcendants possibles d'une équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(y,x)}{Q(y,x)} \tag{1}$$

sont les points ξ énumérés plus haut et que l'équation différentielle met-

elle-même en évidence.

Remarque sur les points singuliers ξ_p. — Si le point ξ_p n'est pas un point singulier du coefficient différentiel quel que soit y, le raisonnement précédent montre encore que $y(x)$ ne saurait devenir indéterminé quand x tend vers ξ sur un chemin quelconque. Le point ξ_p peut donc être un point transcendant, mais non un point essentiel de l'intégrale générale.

Il en est de même si ξ_p est un point critique algébrique des coefficients de $\frac{P}{Q}$, sans être un pôle d'ordre au moins égal à 1 de $\frac{P}{Q}$. En effet, on se débarrasse de cette singularité en posant $x-\xi_p = X^n$, et l'équation transformée

$$\frac{dy}{dX} = n X^{n-1} \frac{P(y, X^n)}{Q(y, X^n)}$$

a son coefficient différentiel holomorphe pour $X = 0$ quand y est quelconque ; autrement $x = \xi_p$ serait un pôle de $\frac{P(y,x)}{Q(y,x)}$ d'ordre au moins égal à 1 pour y quelconque.

Il y a lieu, d'après cela, de partager les points ξ en deux classes ξ' et ξ'', la première étant formée de tous les points ξ qui sont des singularités transcendantes des coefficients de $\frac{P}{Q}$, ou des pôles, d'ordre au moins égal à 1, de $\frac{P}{Q}$ pour y quelconque. Les points ξ' peuvent être (mais ne sont pas nécessairement) des singularités transcendantes ordinaires ou essentielles des intégrales ; les points ξ'' ne peuvent être que des singularités transcendantes.

Si notamment P et Q sont deux polynômes en x et y les points ξ' sont les zéros communs à tous les coefficients $B_j(x)$ du polynôme $Q = \Sigma B_j y^j$.

Équations à points critiques fixes. — Appliquons immédiatement le théorème que nous venons de démontrer à la recherche des équations :

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(y,x)}{Q(y,x)},$$

dont les points critiques sont fixes.

Il suffit, d'après le théorème, d'exprimer qu'il n'existe pas de points critiques algébriques mobiles. Il faut d'abord, pour cela, que le coefficient différentiel soit un polynôme en y; autrement pour x_0 quelconque, l'intégrale égale à y_0 admet le point x_0 comme point critique, si y_0 est une racine de $Q(y, x_0) = 0$. On peut donc supposer $Q \equiv 1$. La même condition doit être remplie pour l'équation transformée en $\frac{1}{y} = z$ à savoir:

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 P\left(\frac{1}{z}, x\right);$$

pour que le second membre de cette nouvelle équation soit un polynôme en z, il faut et il suffit que $P(y,x)$ soit au plus du second degré en y. Quand ces conditions sont remplies, il ne saurait exister de points critiques algébriques mobiles : tous les points critiques sont donc fixes. D'où cette conclusion:

Les équations (1) dont les points critiques sont fixes sont les équations de Riccati.

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda(x) y^2 + \mu(x) y + \nu(x).$$

Dans ce cas particulier, on pouvait reconnaître que les conditions nécessaires exprimées sont suffisantes, sans s'appuyer sur le théorème fondamental, mais seulement sur la propriété élémentaire de l'équation de Riccati d'avoir, comme intégrale générale, une fonction du premier degré de la constante, soit:

$$(4) \qquad y = \frac{C f_1 + f_2}{C \varphi_1 + \varphi_2};$$

il est clair que les seuls points critiques ou transcendants de $y(x)$ sont les points analogues de $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$, qui sont fixes.

La différence profonde qui existe entre les points critiques fixes et les points critiques mobiles, apparaît ici en toute évidence. On voit avec quelle facilité nous avons exprimé qu'il

n'existe pas de points critiques mobiles. Si maintenant, nous voulons qu'il n'existe pas non plus de points critiques fixes, autrement dit si nous voulons que l'intégrale soit uniforme, nous avons à traiter une question d'une toute autre nature et qui est loin d'être résolue. Une courte digression sur l'équation de Riccati le fera mieux comprendre.

De l'équation de Riccati. — Étant donnée une équation (3) quelconque, on sait qu'on la ramène à la forme:

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + \mu_1 y + \nu_1$$

en changeant y en $\frac{-y}{\lambda}$, puis à la forme

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 + M(x) = 0,$$

en changeant y en $y + \frac{\mu_1}{2}$. Si maintenant on pose:

$$(6) \qquad y = \frac{z'}{z},$$

l'équation (5) devient:

$$(7) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + M(x)\, z = 0,$$

équation linéaire et homogène. A une solution de l'équation (7) correspond une solution de l'équation (5) d'après (6). Inversement, montrons qu'à trois solutions de l'équation (5) correspond algébriquement une solution de l'équation (7).

Soit z_1, z_2 deux solutions de (7), les expressions $y_1 = \frac{z_1'}{z_1}$, $y_2 = \frac{z_2'}{z_2}$ sont deux solutions de (5), et l'intégrale générale de (5) peut s'écrire, d'après (6),

$$(8) \qquad y_3 = \frac{z_1' + C z_2'}{z_1 + C z_2} = \frac{y_1 z_1 + C y_2 z_2}{z_1 + C z_2}$$

D'autre part, z_1 et z_2 vérifient évidemment la relation:

$$z_1 z_2'' - z_2 z_1'' = 0, \text{ ou bien } z_1 z_2' - z_2 z_1' = \alpha,$$

α désignant une constante, ce qui s'écrit encore:

(9) $$z_1 z_2 = \frac{\alpha}{y_2 - y_1}.$$

Si on tire z_1, z_2 des équations (8) et (9), il vient:

$$-\frac{1}{\alpha C} z_1^2 = \frac{y_2 - y_3}{(y_2-y_1)(y_3-y_1)}, \quad \frac{-C}{\alpha} z_2^2 = \frac{y_3 - y_1}{(y_2-y_3)(y_2-y_1)},$$

et comme $\frac{1}{\sqrt{-\alpha C}} z_1$, $\sqrt{-\frac{C}{\alpha}} z_2$ sont encore des intégrales de (7), on voit qu'à trois intégrales de (5), y_1, y_2, y_3 correspond l'intégrale z_1 de (7):

(10) $$z_1^2 = \frac{y_2 - y_3}{(y_2-y_1)(y_3-y_1)}$$

Le rapport de deux intégrales z_1, z_2 de (7) peut se mettre sous la forme:

(11) $$-\frac{z_1}{z_2} = \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}$$

Ceci posé, partons d'une équation de Riccati quelconque (3); si son intégrale générale est uniforme, il en est de même des coëfficients λ, μ, ν, comme on le voit aussitôt en éliminant C entre l'intégrale générale (4) et sa dérivée. Il suit de là que la transformée (5) a aussi son intégrale uniforme. Considérons seulement le cas où la fonction $M(x)$ est rationnelle.

Si l'équation (7) a son intégrale uniforme, il en est de même de l'équation (5), mais la réciproque n'est pas vraie; quand l'intégrale de (5) est uniforme, les égalités (10) et (11) nous montrent seulement que l'intégrale générale $z(x)$ de (7) est de la forme:

(12) $$z = \sqrt{G(x)}\,(\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2),$$

φ_1 et φ_2 étant ainsi que $G(x)$ des fonctions uniformes, α et β deux constantes. Inversement, si $z(x)$ est de la forme (12), l'intégrale de (5) est uniforme.

Tout revient donc à reconnaître si l'intégrale de (7) est de la forme (12). La question se traite aisément quand tous

les points singuliers de l'équation linéaire (7) sont réguliers (au sens de M. Fuchs), sauf peut-être un seul qu'on peut toujours supposer être le point à l'infini. Mais quand deux points singuliers au moins de (7) sont irréguliers, on ne sait pas reconnaître en général si l'intégrale est uniforme, a fortiori si elle est de la forme (12). C'est là une difficile question, qu'on doit regarder comme une question de haute arithmétique, à laquelle se rattachent les travaux de M. Poincaré, Thomé, Von Koch, etc, sur les intégrales irrégulières des équations linéaires.

Nous rencontrerons à plusieurs reprises l'équation de Riccati comme élément de réduction, et la question se posera, par la suite, de reconnaître si son intégrale est une fonction à un nombre fini de valeurs.[1] Il est clair que cette question est encore plus compliquée que la précédente. Les théorèmes de M. F. Klein sur les groupes finis de substitutions linéaires fournissent d'importantes indications sur le nombre possible de valeurs de l'intégrale, et leurs ramifications; mais la question reste ouverte: Il est un cas pourtant où elle se résout aisément, c'est le cas où tous les points singuliers de (7) sont réguliers sauf peut-être un seul (soit $x=\infty$), et où aucun des points réguliers n'est un point critique, sauf un seul; il suffit alors que ce dernier point soit algébrique.

Troisième Leçon

De l'intégrale considérée comme fonction de la constante.

Nous avons, à la fin de la dernière leçon, déterminé bien aisément toutes les équations à points critiques fixes

(1) _ Voir à ce sujet la 13e Leçon.

parmi les équations de la forme :

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(y,x)}{Q(y,x)},$$

P et Q désignant des polynômes en y. Mais le procédé employé n'est d'aucune utilité pour traiter le problème plus général, qui consiste à étudier les équations (1) dont l'intégrale n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles. C'est en considérant l'intégrale comme fonction de la constante, que nous résoudrons ce nouveau problème.

Soit x_0 un point quelconque du plan des x (distinct des points singuliers ξ), et soit $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ l'intégrale qui pour $x = x_0$ est égale à y_0. Nous allons voir que la fonction φ, où on regarde y_0 comme la variable, ne présente dans tout le champ des y_0 que des singularités algébriques.

Précisons bien la définition de cette fonction φ : pour cela, joignons par des coupures les points ξ_p (points qui comprennent notamment les points critiques des coefficients $\alpha_i(x)$ $\beta_j(x)$ de P, Q), et dans tout ce qui va suivre, assujettissons la variable x à ne pas franchir ces coupures. Moyennant cette restriction, le coefficient différentiel $\frac{P(y,x)}{Q(y,x)}$ garde constamment une valeur unique (une fois adoptée[1] la détermination des $\alpha_i(x)$, $\beta_j(x)$ pour $x = x_0$). Ceci posé, soit y_0 une valeur quelconque et soit $y(x)$ l'intégrale qui pour $x = x_0$ est égale à y_0 : quand on passe de x_0 à x sur un chemin quelconque L qui n'a aucun point commun avec les coupures, on arrive en x avec une valeur déterminée de y, pourvu toutefois que L ne renferme aucun point critique mobile de $y(x)$; en déformant le chemin L, on peut arriver en x avec toutes les autres déterminations

---

[1] Quand on adopte une autre détermination des α_i, β_j, à la nouvelle équation différentielle correspond une nouvelle intégrale :

de $y(x)$ qui se permutent autour des points critiques mobiles, et avec celles-là seulement. En laissant fixe le point x_0, on définit donc ainsi une fonction des variables x, y_0, et cela pour des valeurs quelconques de x et de y_0 (à cela près que x ne doit pas faire partie des coupures); soit $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ cette fonction; les diverses valeurs de la fonction φ qui correspondent à des valeurs données de x et de y_0, sont les diverses valeurs qu'acquiert au point x l'intégrale $y(x)$ égale à y_0 pour $x = x_0$, quand on va de x_0 au point x sur un chemin qui ne franchit aucune des coupures.

Quand on regarde x comme la variable, la fonction $y = \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ est une fonction analytique de x qui ne présente dans tout le champ des x, en dehors des coupures, que des singularités algébriques. Regardons maintenant y_0 comme la variable et montrons que la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ est dans tout le champ des y_0 une fonction analytique, qui ne présente que des singularités algébriques.

Lemmes — Nous savons déjà que, a étant un point du plan des x distinct des points ξ_p, et b un point du plan des y distinct des zéros de $Q(y, a)$, l'intégrale $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ égale à y_0 pour $x = x_0$ est une fonction holomorphe de x, y_0, x_0 pour $x = a$, $y_0 = b$, $x_0 = a$. Il suit de là que pour $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ suffisamment voisins de a et b, la fonction $\varphi(x, y_0, \bar{\alpha})$ est une fonction de x, y_0 holomorphe dans deux cercles de rayons fixes et de centres α et β.

Qu'arrive-t-il quand b coïncide avec un des zéros de $Q(y, a)$, sans que $P(b, a)$ soit nul? Nous allons voir que la fonction $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ est algébroïde pour $x = a$, $y_0 = b$, $x_0 = a$. Partons en effet de l'équation:

$$(2) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{Q(y, x)}{P(y, x)}$$

dont l'intégrale peut s'écrire:

$$(3) \qquad x = x_0 + \psi(y, x_0, y_0),$$

$y = \varphi_1(x, y_0, x_0)$; la fonction φ_1 se permute avec la fonction φ quand x tourne autour des points ξ. Tout ce qui suit s'applique à une quelconque de ces fonctions φ.

la fonction ψ étant holomorphe pour $y = b$, $x_0 = \alpha$, $y_0 = b$, c'est à dire dans un certain domaine :

$$|y-b| < \rho, \quad |x_0 - \alpha| < r, \quad |y_0 - b| < \rho.$$

Soit q l'ordre de multiplicité de la racine $y = b$ de $Q(y, \alpha) = 0$; $y = b$ est un zéro d'ordre $q+1$ de l'expression $\psi(y, \alpha, b)$. Décrivons du point b comme centre un cercle Γ de rayon moindre que ρ et qui ne renferme ni ne rencontre aucun autre zéro de $\psi(y, \alpha, b)$: l'expression : $x - x_0 - \psi(y, x_0, y_0)$ garde un module supérieur à un certain nombre positif M quand le point y parcourt la circonférence Γ et quand x, x_0, y_0 restent voisins de $x = \alpha$, $x_0 = \alpha$, $y_0 = b$, soit :

$$(D) \quad |x - \alpha| < r_1, \quad |x_0 - \alpha| < r_1, \quad |y_0 - b| < \rho_1,$$

et l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{\psi'_y \, dy}{\psi - (x - x_0)}$, égale à $(q+1)$ pour $x = \alpha$, $x_0 = \alpha$, $y_0 = b$, reste égale à $(q+1)$ quand x, x_0, y_0 varient dans le domaine D. Si donc on donne à x, x_0, y_0 des valeurs quelconques qui appartiennent au domaine D, l'équation (3) en y a exactement $(q+1)$ racines intérieures à Γ : toute racine y de (3) qui pour $x = x_0$ est égale à y_0 (x_0 et y_0 faisant partie du domaine D), est une de ces $(q+1)$ racines et ne peut sortir de Γ tant que $|x - \alpha|$ reste moindre que r_1, autrement M serait nul. L'intégrale $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ vérifie donc l'équation (3) et sa valeur reste intérieure au cercle Γ quand x, x_0, y_0 varient dans le domaine D : c'est donc une fonction algébroïde de x, y_0, x_0 dans ce domaine, puisqu'elle n'y admet que $(q+1)$ valeurs et n'y présente que des singularités algébriques [1]. Il suit de là que pour α et β voisins de α, b, la fonction $y = \varphi(x, y_0, \alpha)$ est une fonction algébroïde de x, y_0, quand x, y_0 varient dans deux cercles de rayons fixes et

---

[1] La fonction y vérifie une relation de la forme :

$$y^{q+1} + A_1 y^q + \cdots\cdots + A_q y + A_{q+1} = 0,$$

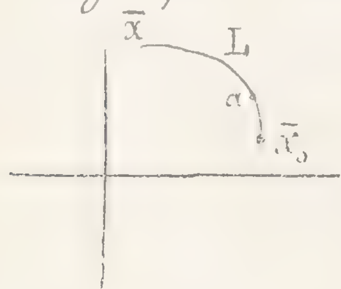
où les A sont des fonctions de x, y_0, x_0 holomorphes pour $x = \alpha$, $y_0 = b$, $x_0 = \alpha$.

centres α et β.

Remarque. – La fonction $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ admet (dans le domaine D) les valeurs $\bar{x}$, $\bar{y}_0$, $\bar{x}_0$ comme valeurs régulières, ou comme singularités algébriques suivant que $\frac{\partial \psi}{\partial y}(y, x_0, y_0)$ s'annule ou non pour $y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$, autrement dit suivant que $\bar{x}$ n'est pas ou est un point critique de l'intégrale $y(x)$ égale à $\bar{y}_0$ pour $x = \bar{x}_0$, ou enfin suivant que $Q(y, \bar{x})$ s'annule ou non pour $y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$.

Nous venons d'étudier ainsi la fonction $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ dans le voisinage des valeurs $x = a$, $y_0 = b$, $x_0 = a$, $\underline{a}$ n'étant pas un des points ξ. La transformation $\frac{1}{y} = z$ permet d'étendre tout ce qui précède au cas où b est infini, c'est à dire aux grandes valeurs de y_0. Étudions maintenant la fonction φ pour des valeurs quelconques de x, y_0, en donnant à x_0 une valeur numérique.

Démonstration d'un théorème sur la fonction $y = \varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$. – Nous partons d'un point $\bar{x}_0$ sur un chemin quelconque L qui n'a aucun point commun avec les coupures et qui aboutit à un point quelconque $\bar{x}$; nous voulons montrer que la fonction de y_0 ainsi définie, $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ n'admet dans tout le plan des y_0 que des singularités algébriques.



Donnons en effet à y_0 une valeur quelconque $\bar{y}_0$ et montrons que φ est une fonction algébroïde de y_0 dans le voisinage de $\bar{y}_0$. Pour cela, faisons varier x sur L de $\bar{x}_0$ à $\bar{x}$; tant que x garde une valeur α suffisamment voisine de x_0, la fonction $y = \varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ est algébroïde pour $x = \alpha$, $y_0 = \bar{y}_0$: soit $\overline{x_0 \alpha}$ le plus grand segment de L pour lequel cette condition soit remplie ; la fonction $\varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ n'est plus algébroïde pour $x = \bar{\alpha}$, $y_0 = \bar{y}_0$. Montrons que cette hypothèse est absurde.

Quand x tend vers $\bar{\alpha}$, l'intégrale $y(x) = \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ tend vers une valeur b (qui peut être infinie) ; autrement dit, α tendant

vers $\bar{\alpha}$, la valeur $\beta = \varphi(\alpha, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ tend vers b; nous savons que, α et β tendant vers a, b, l'intégrale $y = \varphi(x, y_1, \alpha)$, égale à y_1 pour $x = \alpha$, est une fonction algébroïde de x, y_1 dans un certain domaine

$$|x - \alpha| < r, \quad |y_1 - \beta| < \rho,$$

r et ρ étant deux nombres fixes; en prenant α suffisamment voisin de $\bar{\alpha}$, on voit que $\varphi(x, y_1, \alpha)$ est algébroïde en x, y_1 pour $x = \bar{\alpha}$, $y_1 = \beta$; mais la fonction $\varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ s'obtient en remplaçant, dans $\varphi(x, y_1, \alpha)$, y_1 par $\varphi(\alpha, y_0, \bar{x}_0)$ fonction algébroïde de y_0 pour $y_0 = \bar{y}_0$ et égale à β pour $y_0 = \bar{y}_0$. La fonction $\varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ est donc algébroïde pour $x = \alpha$, $y_0 = \bar{y}_0$, ce qui est contre l'hypothèse.

Un tel point $\bar{\alpha}$ ne pouvant exister entre x_0 et $\bar{x}$, ni coïncider avec $\bar{x}$, la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ (où $\bar{x}, \bar{x}_0$ ont des valeurs quelconques) est donc algébroïde pour $y_0 = \bar{y}_0$, et comme le raisonnement s'applique pour $\bar{y}_0 = \infty$, on voit que la fonction $\varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ ne présente, dans tout le champ des y_0, que des singularités algébriques. C.Q.F.D.

Corollaire — Complétons ce théorème en montrant que si $\bar{x}$ n'est pas un point critique de l'intégrale particulière $y(x) = \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$, φ est méromorphe en x, y_0 pour $x = \bar{x}$, $y_0 = \bar{y}_0$, (autrement dit, φ ou $\frac{1}{\varphi}$ est holomorphe pour $x = \bar{x}$, $y_0 = \bar{y}_0$).

Reprenons à nouveau le chemin L, et admettons que $\bar{y}_0$ soit un point critique de la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$, sans que $\bar{x}$ soit un point critique de l'intégrale particulière $y = \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$. Il est loisible d'admettre que les valeurs de cette intégrale aux deux extrémités de L sont finies (sinon, on changerait y en $\frac{1}{y+h}$), et que le chemin L (au besoin légèrement modifié) ne rencontre aucun des pôles ou des points critiques de cette intégrale, si ce n'est toutefois le point x_0 dans le cas particulier où $Q(\bar{y}_0, \bar{x}_0)$ est nul. Dans ces conditions, soit β la valeur pour $x = \alpha$ de l'intégrale particulière: $y = \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$; $Q(\beta, \alpha)$ ne s'annule en aucun point α de L, sauf

peut être au point x_0.. Ceci posé, on sait que, α étant un point de L voisin de x_0, la fonction $y=\varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ est holomorphe pour $x=\alpha, y_0=\bar{y}_0$; soit $\overline{x_0 a}$ le plus grand segment de L pour lequel cette condition soit remplie, et soit b la valeur en $\bar{a}$ de l'intégrale $y=\varphi(x,\bar{y}_0,\bar{x}_0)$; quand α et β sont très voisins de a et b, la fonction $\varphi(x, y_0, \alpha)$ [qui représente l'intégrale égale à y_1 pour $x=\alpha$] est holomorphe dans un certain domaine.

$$|x-\alpha|<r, \qquad |y_1-\beta|<\rho;$$

et le raisonnement fait ci-dessus montre que l'existence d'un point tel que $\bar{a}$ est impossible. C.Q.F.D.

En particulier, la fonction $\varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ ne peut admettre un point critique $y_0=\bar{y}_0$ indépendant de x; autrement un point x quelconque serait un point critique de l'intégrale particulière:

$$y=\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0).$$

La même démonstration établit que si $y_0=\bar{y}_0$ est un pôle de $\varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$, le point $\bar{x}$ est un pôle de l'intégrale $y=\varphi(x, y_0, x_0)$. Toutefois, le point $y_0=\infty$ peut être un pôle de φ, quel que soit x et $\bar{x}_0$; dans ce cas, $z=0$ est une intégrale de la transformée en $\frac{1}{y}=z$, de l'équation (1).

Observons d'ailleurs que si $\bar{x}$ est un point critique (distinct des points ξ) de l'intégrale $y=\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$, $\bar{y}_0$ est en général un point critique de la fonction $\varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$. En effet, les points critiques mobiles de l'intégrale générale, sont donnés par la relation analytique:

$$Q(\varphi, x) \equiv R(x, y_0, \bar{x}_0)=0;$$

soit $x=g(y_0)$ une racine de cette équation; elle peut se développer (sauf pour des valeurs exceptionnelles de $\bar{y}_0$), de la manière suivante:

$$x=g(y_0)=\bar{x}+h(y_0-\bar{y}_0)+K(y_0-\bar{y}_0)^2+\cdots\cdots, \quad (h\neq 0),$$

d'autre part, l'intégrale $y=\varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ s'écrit:

$$y = \lambda (x-g)^{\frac{1}{m}} + \mu (x-g)^{\frac{2}{m}} + \cdots,$$

et pour $x = \bar{x}$ se réduit à :

$$y = (y_0 - \bar{y}_0)^{\frac{1}{m}} L + (y_0 - \bar{y}_0)^{\frac{2}{m}} M + \cdots,$$

$L, M, \ldots$ étant comme $\lambda, \mu \ldots$ des fonctions de y_0 holomorphes pour $y_0 = \bar{y}_0$; cette dernière expression admet le point $y_0 = \bar{y}_0$ comme point critique.

On verrait de la même manière que si $\bar{x}$ est un pôle mobile de l'intégrale $y = \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$, le point y_0 est un pôle de la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$.

On arrive ainsi à cette conclusion : la fonction de y_0, $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$, ne présente à distance finie ou infinie que des singularités algébriques : ses points critiques $y_0 = \bar{y}_0$ sont tous variables avec $\bar{x}$, et l'intégrale $y(x) = \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ admet le point $x = \bar{x}$ comme point critique ; il en est de même pour les pôles $y_0 = \bar{y}_0$; à cela près que $y_0 = \infty$ peut être pôle de φ, quels que soient $\bar{x}$ et $\bar{x}_0$.

Ce qu'il nous importe de retenir d'ailleurs, c'est que toutes les singularités de $\varphi(\bar{x}, y_0^*, \bar{x}_0)$ sont algébriques, mais j'ai insisté sur le corollaire qui montre bien comment les points critiques $y_0 = \bar{y}_0$ s'introduisent.

Remarque — Le même raisonnement appliqué à la constante x_0 montrerait que la fonction de x_0, $y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}_0, x_0)$, n'admet comme singularités variables avec $\bar{x}$ que des singularités algébriques, mais elle peut de plus admettre des points critiques fixes, qui coïncident nécessairement avec des points ξ de l'espèce ξ' (voir page 26), et ces points $x_0 = \xi'$ peuvent être des points transcendants ou essentiels de $\varphi(\bar{x}, \bar{y}_0, x_0)$.

Il faut bien se garder de conclure de ce qui précède que φ est une fonction algébrique de y_0 ; pour une équation (1) prise au hasard, une infinité de valeurs de φ se permutent autour des points critiques $y_0 = \bar{y}_0$ de la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$. Les équations (1)

pour lesquelles l'intégrale dépend algébriquement de y_0 forment une classe remarquable qui se confond précisément, comme nous l'allons voir, avec celle des équations dont l'intégrale n'acquiert que n déterminations autour des points critiques mobiles.

Équations dont l'intégrale générale n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles. Envisageons d'abord les équations à points critiques fixes. L'intégrale $y(x)$ n'admettant qu'une valeur quand on part de x_0 avec la valeur y_0 de y et quand on fait varier x sans franchir les coupures, la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ n'est susceptible que d'une détermination : c'est donc une fonction uniforme de y_0 et comme elle n'admet dans tout le plan des y_0 (à distance finie ou infinie) que des points singuliers algébriques, c'est une fonction rationnelle de y_0.

$$y = R(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0),$$

il est clair inversement, que si y est de cette forme, les points critiques de $y(x) = R(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ sont fixes.

En permutant $\bar{x}$ et $\bar{x}_0$, on a de même,

$$y_0 = R(\bar{x}_0, y, \bar{x}),$$

ce qui exige que R soit du premier degré en y_0 :

$$y = \frac{A(x, \bar{x}_0) + B(x, \bar{x}_0)\, y_0}{C(x, \bar{x}_0) + D(x, \bar{x}_0)\, y_0}.$$

Comme nous avons vu à la fin de la dernière leçon que les équations (1) à points critiques fixes sont les équations de Riccati, on retrouve bien ce résultat classique, que l'intégrale d'une équation de Riccati est une fonction linéaire de la constante.

Passons aux équations (1) dont l'intégrale générale n'acquiert qu'un nombre fini n de valeurs autour des points critiques mobiles. Quand x varie dans son plan sans franchir les

coupures, et quand y_0 varie d'une façon quelconque, la fonction $y = \varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ n'acquiert que n déterminations qui représentent les n branches $y_1 \dots y_n$ (permutables autour des points critiques mobiles) de l'intégrale égale à y_0 pour $x = x_0$. D'après cela, considérons une fonction symétrique quelconque de $y_1, y_2, \dots y_n$, soit $y_1 + y_2 + \dots + y_n$: cette expression est une fonction uniforme de y_0 dont tous les points singuliers sont algébriques, c'est-à-dire une fonction rationnelle de y_0. Il suit de là que l'intégrale peut s'écrire :

$$(a) \qquad y^n + R_{n-1}(x, y_0, \bar{x}_0)\, y^{n-1} + \dots + R_1(x, y_0, \bar{x}_0)\, y + R_0(x, y_0, \bar{x}_0) = 0,$$

$R_{n-1}, \dots R_0$ étant des fractions rationnelles en y_0. Inversement, une fonction $y(x)$ définie par une telle relation, n'acquiert au plus que n déterminations autour des points critiques mobiles ; car x variant sans franchir les coupures, les R ont une valeur unique pour x, y_0 donnés, et y n'est susceptible que de n déterminations[1]. Si, comme nous le supposons, n est le nombre exact de valeurs de y qui se permutent autour des points mobiles, la relation algébrique (a) entre y et y_0 est irréductible (pour x, $\bar{x}_0$ quelconques).

En permutant x et $\bar{x}_0$, on voit que l'intégrale $y(x)$ vérifie aussi l'équation :

$$(b) \qquad y_0^n + R_{n-1}(\bar{x}_0, y, x)\, y_0^{n-1} + \dots + R_0(\bar{x}_0, y, x) = 0,$$

ce qui exige que les $R_p(\bar{x}_0, y, x)$ soient au plus de degré n en y (les deux équations (a) et (b) étant irréductibles). De plus, soit y_0, y_1, y les valeurs d'une intégrale $y(x)$ pour $x = \bar{x}_0$, $x = x_1$, x ; on a :

$$R_\ell(\bar{x}_0, y, x) = R_\ell(\bar{x}_0, y_1, x_1) = R_\ell(\bar{x}_0, y_0, \bar{x}_0) = C.$$

---

[1] Les R considérés comme fonctions de x ont leurs points critiques fixes (ces points font partie des points ξ et ξ') ; considérés comme fonctions de x_0, ils n'admettent aussi que des points critiques fixes, qui font partie des points ξ'. Mais nous n'aurons pas

nombre n' moindre que n.

En définitive, étant donnée une équation (1), on peut reconnaître à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques linéaires si une intégrale ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre donné n de valeurs, et on ramène dans ce cas, l'équation (1), à une équation de Riccati,

$$(e) \qquad \frac{du}{dx} = G u^2 + H u + K$$

par une transformation :

$$u = \frac{y^n + A_{n-1}\, y^{n-1} + \cdots + A_1 y}{B_{n-1}\, y^{n-1} + \cdots + B_1 y + 1},$$

les fonctions A_i, B_i, G, H, K étant des fonctions rationnelles des coefficients de (1) et de leurs dérivées.

Si on veut maintenant que l'intégrale générale $y(x)$ de l'équation (1) soit une fonction à un nombre fini de valeurs, il faut encore que l'équation de Riccati (e) ait comme intégrale générale une fonction à q valeurs (q étant un entier quelconque); j'ai signalé dans la dernière leçon, la difficulté de ce nouveau problème.

Il convient d'insister sur cette conclusion : Les transcendantes uniformes ou à n valeurs définies par l'intégrale générale d'une équation (1), se ramènent algébriquement aux transcendantes analogues définies par l'équation de Riccati, c'est à dire par l'équation linéaire et homogène du second ordre.

Quatrième Leçon.

Équations différentielles du premier ordre et de degré quelconque.

Nous allons étendre les résultats obtenus dans les deux leçons précédentes aux équations non résolues par rapport à y', soit :

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0,$$

où F est un polynôme en y', y, dont les coefficients sont des fonctions analytiques quelconques de x.

Nous rencontrerons dans ce qui va suivre des fonctions uniformes d'un point (x, X) d'une courbe algébrique irréductible:

$$(S) \qquad G(x, X) = 0.$$

Je rappelle la définition d'une telle fonction: Soit $y(x)$ une fonction analytique de la variable complexe x, et y_0 une de ses valeurs pour $x = x_0$; supposons qu'à y_0 on puisse faire correspondre une racine X_0 de l'équation $G(x_0, X) = 0$ telle que si on part de x_0 avec la valeur y_0 de y et X_0 de X, y reprenne la même valeur chaque fois que x et X reprennent les mêmes valeurs: la fonction $y(x)$ est dite fonction uniforme du point analytique (x, X). Ceci revient à dire encore que $y(x)$ est une fonction uniforme sur la surface de Riemann définie par (S). Une telle fonction peut toujours (et d'une seule manière) se représenter ainsi:

$$y(x) = A_0(x) + A_1(x) X + \cdots\cdots A_{m-1}(x) X^{m-1},$$

m désignant le degré de G en X, et les A_i étant uniformes en x.

Si la fonction $y(x)$ ne présente que des singularités algébriques, $A_0, A_1 \ldots\ldots A_{m-1}$ sont des fractions rationnelles en x; y est alors une fonction rationnelle du point analytique (x, X).

Soit $y(x)$, $Y(x)$ deux fonctions rationnelles du point analytique (x, X); si on élimine x entre y et Y, on obtient une certaine relation algébrique:

$$(\Sigma) \qquad H(y, Y) = 0;$$

nous dirons que la courbe (S) est une transformée rationnelle de la courbe (Σ), entendant par là que si on remplace, dans H, y et Y par deux fonctions rationnelles en x, X

$$(r) \qquad y = A_0(x) + A_1(x) X + \cdots + A_{m-1}(x) X^{m-1}; \qquad Y = B_0(x) + B_1(x) X + \cdots + B_{m-1}(x) X^{m-1};$$

la relation ainsi obtenue est une conséquence de la relation (S).

Les relations (r) définissent x et X en fonction de y quand on tient compte de (S) : si ces fonctions sont elles-mêmes des fonctions rationnelles du point analytique (y, Y), les deux courbes (S) et (s) sont dites transformées birationnelles l'une de l'autre.

Étude d'une intégrale de l'équation (1) dans le voisinage de ses conditions initiales — Nous pouvons toujours supposer que la relation (1) entre y' et y est irréductible, sauf pour des valeurs exceptionnelles de x ; soit (pour x quelconque) p le genre de cette relation, et m son degré en y'.

Joignons, dans le plan des x, par des coupures, les points critiques ξ des coefficients $a_i(x)$ de F, et dans tout ce qui va suivre assujettissons x à ne pas franchir ces coupures. Moyennant cette restriction, une fois adoptée la détermination des $a_i(x)$ pour $x = x_0$, la fonction y' de x, y est une fonction à m déterminations dans tout le champ des x, y ; l'équation (1) équivaut à m équations

$$(1)' \quad \frac{dy}{dx} = f_1(y,x), \quad \frac{dy}{dx} = f_2(y,x), \ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = f_m(y,x),$$

où $f_1, f_2 \ldots\ldots f_m$ sont des fonctions holomorphes pour $x = x_0$, $y = y_0$, si x_0, y_0 ne sont pas des valeurs exceptionnelles ; l'équation (1) admet m intégrales égales à y_0 et holomorphes pour $x = x_0$, et qui satisfont respectivement aux m équations (1)'.

Précisons et complétons ce théorème. Supposons que pour $x = a$, $y = b$, une certaine détermination de y' soit holomorphe, et soit

$$(2) \qquad y' = f(y, x),$$

cette détermination : l'intégrale $y(x)$ de cette équation égale à y_0 pour $x = x_0$, soit $y = \varphi(x, y_0, x_0)$, est une fonction holomorphe de x, y_0, x_0 pour $x = a$, $y_0 = b$, $x_0 = a$.

Qu'arrive-t-il quand $f(y, x)$, n'est plus holomorphe pour $x = a$, $y = b$? Les singularités de la fonction y' de y, définie

par la relation algébrique (1) (où on laisse x constant), sont des pôles ou des points critiques algébriques : soit $y = g(x)$ un de ces points critiques, $y = h(x)$ un de ces pôles. Si $D(y,x)$ est le discriminant de F relatif à y' et si $A_m(y,x)$ est le coefficient de y'^m dans F, $y - g(x)$ divise D, et $y - h(x)$ divise A_m. Il peut se faire que deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ coïncident, c'est à dire que $y = g(x)$ soit à la fois un point critique et un pôle de y', soit pour la même branche, soit pour deux branches différentes, mais peu importe.

Marquons maintenant dans le plan des x tous les points ξ pour lesquels deux au moins des fonctions $g_1(x), \dots g_\mu(x)$, distinctes, deviennent égales, (leur valeur commune pouvant être infinie) ; marquons aussi les points ξ qui sont des points singuliers des coefficients $\alpha_i(x)$ de F ou qui annulent $A_m(y,x)$ quel que soit y. Marquons encore les points ξ pour lesquels il existe une valeur η telle que tous les coefficients $A_m, \dots A_0$ de $y'^m, y'^{m-1}, \dots$ dans l'équation (1) s'annulent pour $x = \xi$, $y = \eta$. Joignons enfin à ces points ξ ceux de la transformée en $\frac{1}{y} = z$ qui ne se confondent pas avec les précédents.[1]

Occupons-nous d'abord des pôles de y'. Soit α un point du plan des x distinct des points ξ, et $b = h(\alpha)$ une valeur de y telle que la détermination considérée de y' soit infinie pour $x = \alpha$, $y = b$, la fonction $\frac{1}{y'}$, étant holomorphe pour les mêmes

---

[1] Cette transformée :

$$B_m(z,x)\, z'^m + B_{m-1}(z,x)\, z'^{m-1} + \dots + B_0(z,x) = 0$$

introduit de nouveaux points ξ si la valeur $z = 0$ est un pôle ou un point critique de z' quel que soit z, ou si les expressions :

$$B_m(0,x),\ B_{m-1}(0,x), \dots\dots B_0(0,x)$$

s'annulent toutes pour certaines valeurs ξ de x. En changeant y en $\frac{1}{y+k}$ on peut toujours faire en sorte que les points ξ de l'équation (1) et de sa transformée en $\frac{1}{y}$ coïncident.

valeurs. Soit toujours :

$$(2) \qquad y' = f(y, x)$$

la détermination considérée de y' : le raisonnement de la page 34, montre que l'intégrale de l'équation (2) égale à b pour $x = a$ admet le point a comme point critique algébrique d'ordre $q+1$ (q désignant la multiplicité de la racine $y = b$ de l'équation $\frac{1}{f(y,a)} = 0$); l'intégrale égale à y_0 pour $x = x_0$, soit $y = \varphi(x, y_0, x_0)$, est une fonction algébroïde (à $(q+1)$ déterminations) de x, y_0, x_0 pour $x = a$, $y_0 = b$, $x_0 = a$.

Supposons maintenant que pour $x = a$, la détermination de y' considérée, soit $y' = f(y, x)$, admette $y = b = g(a)$ comme point critique (qui peut être en même temps un pôle). La fonction $g(x)$ est holomorphe pour $x = a$, et si nous posons $y = g + z$, l'équation (2) devient :

$$(3) \qquad \frac{dz}{dx} = -g'(x) + f(z+g, x) \equiv f'(z, x);$$

la fonction f' de la variable z admet le point $z = 0$ comme point critique quel que soit $\bar{x}$; pour $\bar{x}$ voisin de a ou égal à a, les autres points critiques $z_1 = g_1(x) - g(x)$, etc. restent à une distance finie de $z = 0$. Soit ν le nombre des valeurs de $f'(z, \bar{x})$ qui se permutent autour de $z = 0$ pour $\bar{x}$ voisin de a.[1] La fonction $f(Z^\nu, x)$, [ou son inverse $\frac{1}{f'}$], est holomorphe pour $Z = 0$ et $x = a$;

---

(1) Quand on tourne ν fois autour du point $z = 0$, la fonction $F(z, a)$ reprend la même valeur : décrivons en effet du point $z = 0$ comme centre un cercle très petit qui ne renferme à son intérieur, pour $\bar{x}$ voisin de a, aucun autre point critique que $z = 0$; si, quand on parcourt ν fois cette circonférence, on revient au point de départ avec une autre valeur $f_1'(z, a)$, pour $\bar{x}$ voisin de a on reviendra au point de départ avec une valeur $f_1'(z, \bar{x})$ voisine de $f'(z, a)$, et ν ne sera pas le nombre des valeurs de $f'(z, \bar{x})$ permutables autour de $z = 0$.

soit $\psi(Z,x) \equiv f'(Z^\nu, x)$. La transformation $z = Z^\nu$ conduit à l'équation différentielle :

$$(4) \qquad \frac{dZ}{dx} = \frac{1}{\nu Z^{\nu-1}} \psi(Z,x) \equiv \chi(Z,x).$$

Deux hypothèses sont alors possibles :

1er Cas. – La fonction ψ renferme Z en facteur au moins à la puissance $\nu-1$. L'intégrale $Z(x)$ de l'équation (4) égale à zéro pour $x=b$, est holomorphe pour $x=b$: il en est donc de même de l'intégrale de (2) égale à b pour $x=\alpha$. De plus, l'intégrale de (4) égale à Z_0 pour $x=x_0$, soit $Z = \Phi(x, Z_0, x_0)$, est une fonction holomorphe de x, Z_0, x_0 pour $x=\alpha, Z_0 = 0, x_0 = \alpha$; l'intégrale de (2), égale à y_0 pour $x = x_0$, à savoir $y = g(x) + \Phi\left\{x, (y_0 - g(x_0))^{\frac{1}{\nu}}, x_0\right\} \equiv \varphi(x, y_0, x_0)$ est donc une fonction algébroïde de x, y_0, x_0 pour $x=\alpha$, $y_0 = b = g(\alpha)$, $x_0 = \alpha$.

Remarque – On peut préciser la nature de cette fonction algébroide $y = \varphi(x, y_0, x_0)$. La détermination considérée de y' vérifie une relation de la forme :

$$(5) \qquad y'^\nu + \alpha_{\nu-1}(y,x)\, y'^{\nu-1} + \cdots\cdots + \alpha_1(y,x)\, y' + \alpha_0(y,x) = 0$$

où $\alpha_{\nu-1}, \ldots \alpha_0$ sont holomorphes pour $x=\alpha$, $y=b$. Je dis que la fonction $\varphi(x, y_0, x_0)$ est pour $x=\alpha$, $y_0=b$, $x_0=\alpha$, une fonction holomorphe de x et une fonction rationnelle des variables y_0', y_0, x_0 liées par la relation :

$$(5)' \qquad y_0'^\nu + \alpha_{\nu-1}(y_0, x_0)\, y_0'^{\nu-1} + \cdots\cdots + \alpha_1(y_0, x_0)\, y_0' + \alpha_0(y_0, x_0) = 0,$$

autrement dit, φ peut s'écrire :

$$y = \varphi(x, y_0, x_0) \equiv y_0'^{\nu-1} \beta_{\nu-1}(x, y_0, \nu_0) + y_0'^{\nu-2} \beta_{\nu-2}(x, y_0, x_0) + \cdots + \beta_0(x, y_0, x_0),$$

les β_i étant holomorphes pour $x=\alpha$, $y_0 = b$, $x_0 = \alpha$.

La chose sera établie si je montre que $(y_0 - g(x_0))^{\frac{1}{\nu}}$ ou Z_0 est une fonction rationnelle (pour $z_0 = 0$, $x_0 = \alpha$) des variables Z_0', z_0, x_0 liées par la relation :

$$(6) \qquad Z_0'^\nu + \gamma_{\nu-1}(z_0, x_0)\, z_0'^{\nu-1} + \cdots\cdots + \gamma_0(z_0, x_0) = 0,$$

qui se déduit de (5)' en changeant y_0 en $g(x_0)+z_0$ et y'_0 en $g'(x_0)+z'_0$; or on peut écrire :

$$(7) \qquad z'_0 = \delta_0(x_0) + Z_0\,\delta_1(x_0) + \cdots + Z_0^q\,\delta_q(x_0) + \cdots,$$

(les δ étant holomorphes pour $x_0=\alpha$), avec

$$(8) \qquad z_0 = Z_0^{\nu},$$

et pour un système quelconque z'_0, z_0, x_0 vérifiant (6) les équations (7) et (8) en Z_0 n'ont qu'une racine commune ; autrement, deux valeurs distinctes de z_0 conduiraient à la même détermination de z'_0, et le nombre des déterminations de Z'_0 qui se permutent autour de $z_0=0$ serait moindre que ν. Il suit de là que Z_0 est bien une fonction rationnelle des variables (z'_0, z_0, x_0) liées par (6), (dans le domaine de $x_0=\alpha$, $z_0=0$, bien entendu). C. Q. F. D.

2ᵉ. Cas ——— Supposons maintenant que, dans l'équation (4), $\psi(Z,x)$ ne renferme pas $Z^{\nu-1}$ en facteur. L'intégrale de (4) égale à zéro pour $x=\alpha$ admet le point α comme point critique algébrique (pourvu du moins que $x=\alpha$ n'annule pas le premier coefficient du développement de $\psi(Z,x)$ suivant les puissances croissantes de Z). De plus l'intégrale $Z(x)$ de (4) égale à Z_0 pour $x=x_0$ est une fonction algébroïde à $(q+1)$ valeurs de x, Z_0, x_0 pour $x=\alpha$; $Z_0=0$, $x_0=0$; q désigne l'ordre du pôle $Z=0$ de $\frac{\psi(Z,\alpha)}{Z^{\nu-1}}$.

Quant à l'intégrale $z(x) \equiv Z^{\nu}$ de (3), égale à zéro pour $x=\alpha$, elle admet aussi le point $x=\alpha$ comme point critique algébrique autour duquel $(q+1)$ valeurs se permutent. En effet, nous savons que Z peut s'exprimer rationnellement (pour x et y voisins de a et b) en fonction des variables z', z, x liées par la relation (3) : $Z = R(z', z, x)$; si donc r valeurs seulement de l'intégrale $z(x)$ se permutent autour $x=\alpha$, $[r < q+1]$, il suffit de remplacer dans R, z par $z(x)$ et z' par $\frac{dz}{dx}$ pour voir que r valeurs seulement de $Z(x)$ se permutent autour de α.

Il suit de là que l'intégrale $y(x)$ de l'équation (2), égale à b pour $x = \alpha$, admet le point $x = \alpha$, comme point critique algébrique. De plus, l'intégrale de (2) égale à y_0 pour $x = x_0$, soit $y = \varphi(x, y_0, x_0)$, est une fonction algébroïde de x, y_0, x_0 pour $x = \alpha$; $y_0 = b$, $x_0 = \alpha$; d'une façon plus précise, φ est (dans le domaine de $x = \alpha$, $y_0 = b$, $x_0 = \alpha$) une fonction algébroïde à $(q+1)$ déterminations de x et des trois variables y'_0, y_0, x_0 liées par (5)'.

Remarque. – La fonction $\psi(Z, x)$, si elle n'est pas infinie pour $x = \alpha$, $Z = 0$, peut se développer ainsi:

$$(9) \qquad \psi(Z, x) \equiv Z^\lambda u_\lambda(x) + Z^{\lambda+1} u_{\lambda+1}(x) + \cdots$$

λ étant un entier positif ou nul. Si λ est moindre que $\nu - 1$, le raisonnement précédent est en défaut quand $x = \alpha$ annule $u_\lambda(x)$: il faut joindre aux points ξ les zéros du coefficient $u_\lambda(x)$ attaché à chaque développement de y'.

Lorsque $\psi(Z, x)$ est infini pour $x = \alpha$, $Z = 0$, la fonction $\frac{1}{\psi}$ peut se mettre sous la forme (9) et aucune difficulté ne se présente.[1]

Observons encore que nous avons compté parmi les points ξ tous les points $\bar{x}$ pour lesquels deux points critiques $y = g_1(\bar{x})$, $y = g_2(\bar{x})$ de la fonction $y' = f(y, \bar{x})$ viennent à se confondre. En réalité, ces points ne donnent lieu à difficulté, qu'autant que les deux points critiques appartiennent à la même branche de l'intégrale; voici ce que j'entends par là : à la valeur ξ correspond au moins une valeur η, telle que y variant dans un cercle c de centre η et de rayon donné aussi petit qu'on veut, une branche au moins de la fonction $y'(y, \bar{x})$ admette dans c plus

---

(1) y', et par suite ψ, ne peut être de la forme $\frac{0}{0}$ si $x = \alpha$ n'est pas un des points ξ.

d'un point critique, pour $\bar{x}$ voisin de ξ. (Quand x tend vers ξ, ces points critiques tendent vers η).

En définitive, en outre des points ξ qui sont des points singuliers de y' quel que soit y, ou auxquels correspondent des valeurs η telles qu'une détermination de y' soit de la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = \xi$, $y = \eta$, il nous faut marquer encore les points $\bar{x} = \xi$ pour lesquels deux points critiques de la même branche de la fonction $y'(y, \bar{x})$ viennent se confondre. De plus, considérons un développement d'une branche quelconque de la fonction $y'(y, \bar{x})$ autour d'un point critique $y = g(\bar{x})$; ν étant le nombre des valeurs de y' qui se permutent autour de ce point, la différence $y' - g'(\bar{x})$ sera de la forme:

$$u_\lambda(\bar{x})\,(y - g(\bar{x}))^{\frac{\lambda}{\nu}} + u_{\lambda+1}(\bar{x})\,[y - g(x)]^{\frac{\lambda+1}{\nu}} + \cdots\ ;$$

si λ est positif et moindre que $\nu - 1$, les zéros $\bar{x} = \xi$ de $u_\lambda(\bar{x})$ seront encore des points ξ.

Enfin, il faudra ajouter à tous ces points, les nouveaux points ξ que pourra introduire la transformée de l'équation en $\frac{1}{y}$.

Conclusion — Une conclusion essentielle des développements précédents est la suivante: Toute intégrale qui tend vers une valeur b quand x tend vers a sur un certain chemin, admet le point $x = a$ comme point algébrique, si a n'est pas un des points ξ. La chose est évidente, si on observe que les m intégrales de (1) égales à y_0 pour $x = x_0$ sont algébroïdes dans un cercle de centre x_0 et de rayon fixe pour x_0, y_0 voisins de a, b (voir 2e Leçon, page 20). Enfin, la transformation en $\frac{1}{y}$ permet d'étendre la proposition au cas où b est infini.

Il est dès lors très facile de démontrer, comme dans la seconde leçon (pages 23-24) le théorème suivant:

Une intégrale quelconque de l'équation (1) ne peut présenter en dehors des points ξ que des singularités algébriques.

Soit en effet, $Y_1, \ldots Y_m$ les valeurs de $g_1(x), \ldots g_\mu(x)$, $h_1(x), \ldots h_\nu(x)$ au point $x = \alpha$ (distinct des points ξ). Décrivons encore, des points $Y_1, \ldots Y_m$ comme centres, des cercles γ de rayon ρ très petit, et de l'origine du plan des y comme centre, un cercle Γ, de rayon très grand R. Soit A l'aire intérieure à Γ et extérieure aux γ. Pour x très voisin de α, $[(x-\alpha) \leq r]$, les valeurs de $g_1(x), \ldots h_\nu(x)$ diffèrent peu de $Y_1, \ldots Y_m$, par exemple restent comprises dans des cercles γ' de rayon $\frac{\rho}{2}$, concentriques aux cercle γ.[1] Soit Γ' un cercle concentrique à Γ et de rayon $R + \frac{\rho}{2}$, A' l'aire intérieure à Γ' et extérieure aux γ': les m déterminations de la fonction $y'(y, x)$ sont holomorphes tant que x ne sort pas du cercle c de centre α et de rayon r, et y de l'aire A'; soit M le module supérieur de ces m fonctions dans ce domaine. Une quelconque des intégrales de l'équation (1) égales à y_0 pour $x = x_0$ est holomorphe dans un cercle fini, de centre x_0 et de rayon au moins égal à $\lambda = \frac{r}{2}\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2Mr}}\right)$ (nombre fixe), et cela pourvu que x_0 soit distant de α de moins de $\frac{r}{2}$ et que y_0 appartienne à l'aire A.

D'autre part, si l'intégrale $y(x)$ considérée ne tend ni vers une des valeurs Y_i, ni vers l'infini quand x tend vers α, on peut toujours choisir une fois pour toutes le nombre ρ assez petit et le nombre R assez grand pour que, x tendant vers α, y ne reste pas extérieur à l'aire A. Pour des points x_0 distants de α de moins de λ, la valeur y_0 de $y(x)$ sera donc intérieure à A, et l'intégrale

---

[1] Si pour $x = \alpha$, une ou plusieurs des fonctions g, h, deviennent infinies, pour x voisin de α ces valeurs sont extérieures au cercle Γ'. Cette remarque s'applique au cas d'une équation (1) du 1er degré.

$y(x)$ sera holomorphe pour $x=\alpha$. C. Q. F. D.

Des points singuliers ξ — Comme dans le cas d'une équation du premier degré, nous distinguerons les points ξ en deux catégories ξ' et ξ'', la première étant formée de tous les points ξ qui sont des points transcendants ou des pôles (d'ordre égal ou supérieur à 1) d'une détermination de y', quel que soit y.

On peut répéter, pour les points ξ'', le raisonnement précédent ; il s'ensuit que ces points peuvent être des points transcendants, mais non des points essentiels des intégrales $y(x)$. Les points ξ' peuvent être (mais ne sont pas nécessairement) des points essentiels.

Equations (1) à points critiques fixes — Pour qu'une équation (1) ait ses points critiques fixes, nous savons maintenant qu'il suffit que les points critiques algébriques de l'intégrale soient fixes.

Pour cela, il faut d'abord que, x étant quelconque, y' ne devienne pas infini pour une valeur finie de y, ce qui exige que le coëfficient $A_m(y,x)$ de y'^m dans F soit indépendant de y : l'équation peut alors s'écrire :

$$y'^m + A_{m-1}(y,x)\, y'^{m-1} + \cdots + A_0(y,x) = 0,$$

les $A_i(y,x)$ étant des polynômes en y.

Il faut de plus que la même condition soit remplie pour la transformée en $\frac{1}{y} = z$,

$$z'^m - z^2 A_{m-1}\left(\frac{1}{z}, x\right) z'^{m-1} + \cdots \pm z^{2m} A_0\left(\frac{1}{z}\, x\right) = 0,$$

ce qui exige que A_{m-1}, A_{m-2} .... A_1, A_0 soient respectivement des polynômes en y de degré au plus égal à $2, 4, \ldots 2(m-1), 2m$.

Si maintenant on donne à x une valeur fixe quelconque, on sait étudier les différents développements de la fonction $y'(y,x)$ autour de ses points critiques $y=g(x)$. Si ν valeurs d'une branche de y' se permutent autour de $y-g(x)$, il faut que la

différence $y'(y,x)-g'(x)$, calculée pour cette branche, soit au moins d'ordre $\nu-1$ par rapport à $[y-g(x)]^{\frac{1}{\nu}}$. Il faut enfin que la même condition soit remplie pour la transformée en $\frac{1}{y}$.

Ces conditions, qui se traduisent toutes algébriquement, sont suffisantes. Quand elles sont remplies, il ne saurait exister de points critiques mobiles de l'intégrale : donc tous les points critiques sont fixes.. Les conditions algébriques en question, peuvent se former à l'aide d'opérations linéaires, comme on le montre sans peine.

Application aux équations du second degré en y' ——— Appliquons ces résultats aux équations du second degré en y'. Tout d'abord, l'équation doit être de la forme :

$$(\alpha) \qquad y' = P(y,x) + \sqrt{Q(y,x)},$$

P et Q étant respectivement des polynômes au plus du second degré et du quatrième degré en y. Il faut ensuite que toutes les racines d'ordre impair $y = g(x)$ du polynôme Q soit des intégrales singulières. Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

Il importe de montrer que l'équation (α) s'intègre quand ces conditions sont remplies. Effectuons en effet sur y, une transformation homographique quelconque :

$$(b) \qquad y = \frac{\lambda(x)y_1 + \mu(x)}{\lambda_1(x)y_1 + \mu_1(x)}, \qquad (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1 \equiv 1);$$

un calcul tout élémentaire montre que la transformée s'écrit :

$$(\alpha)' \qquad \frac{dy_1}{dx} = P_1(y_1, x) + \sqrt{Q_1(y_1, x)},$$

Q_1 désignant le polynôme qui se déduit de Q en y remplaçant y_1 par l'expression (b) et en multipliant par $(\lambda_1 y + \mu_1)^4$. La nouvelle équation a encore ses points critiques fixes d'après (b), et il est loisible d'admettre que le polynôme placé sous le radical est effectivement du quatrième degré.

Ceci posé, deux cas sont à distinguer, suivant que les quatre racines de l'équation $Q=0$ en y sont (pour x quelconque) distinctes ou non. Il ne saurait exister d'ailleurs qu'une seule racine multiple, (autrement Q serait carré parfait et l'équation (α) se décomposerait en deux équations de Riccati). Plaçons nous d'abord dans ce cas particulier, où une racine est multiple: deux racines sont toujours d'ordre impair, et on peut se servir de la transformation (b) pour ramener ces deux racines à être zéro et l'infini; on a alors:

$$\frac{dy_1}{dx} = P_1(y_1, x) + (\alpha y_1 + \beta)\sqrt{y_1};$$

$y_1 = 0$ étant une intégrale singulière, P_1 s'annule pour $y_1 = 0$, et la même remarque appliquée à la transformée en $\frac{1}{y_1}$ montre que P_1 n'a pas de terme en y_1^2; l'équation considérée est donc de la forme:

$$\frac{dy_1}{dx} = \gamma y_1 + (\alpha y_1 + \beta)\sqrt{y_1},$$

et si l'on pose $y_1 = z^2$, il vient:

$$2\frac{dz}{dx} = \alpha(x) z^2 + \gamma(x) z + \beta(x),$$

équation de Riccati.

Dans le cas particulier traité, l'équation (α) se ramène donc algébriquement à une équation de Riccati. L'intégrale générale de (α) est de la forme:

$$y = \frac{C^2 \varphi_1(x) + C\varphi_2(x) + \varphi_3(x)}{C^2 \psi_1(x) + C\psi_2(x) + \psi_3(x)},$$

C désignant la constante arbitraire.

Passons au cas général où les quatre racines de $Q(y,x)=0$ sont distinctes. Servons-nous de la transformation (b) pour ramener trois des racines de Q à être trois nombres fixes, 0, 1, 2 par exemple: $y=0$, $y=1$, $y=2$, solutions singulières de $(\alpha)'$,

doivent annuler identiquement $P_1(y,x)$, et comme P_1 est du second degré en y, ceci n'est possible que si P_1 est identiquement nul. La quatrième racine $y = g_1(x)$ de Q_1 ne saurait être alors intégrale singulière que si $g_1'(x)$ est identiquement nul, c'est à dire si g_1 est une constante. L'équation $(\alpha)'$ s'écrit donc:

$$\frac{dy_1}{\sqrt{R(y_1)}} = A(x)\,dx,$$

$R(y_1)$ étant un polynôme du quatrième degré en y_1 à coefficients constants, polynôme qu'on peut toujours supposer ramené à la forme canonique $(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)$ moyennant une transformation homographique à coëfficients constants. L'intégrale générale de $(\alpha)'$ est donc ici :

$$y_1 = sn\left[J(x)+C\right],$$

$J(x)$ étant donné par la quadrature $\int_{x_0}^{x} A(x)\,dx$.[1] Les seuls points de $y_1(x)$ qui ne soient pas des pôles sont les points singuliers de $A(x)$ qui sont fixes.

Quant à l'intégrale de (α), c'est une fonction homographique de y_1 dont les coëfficients se calculent algébriquement en fonction de ceux de (α).

En général, la fonction $y_1(x)$ prend une infinité de valeurs autour des points critiques fixes : pour que cette fonction soit uniforme quel que soit C, il faut et il suffit que toutes les déterminations de $J(x)$ soient de la forme $J_1(x) + m\omega + n\omega'$, ω et ω' étant deux périodes primitives de sn_{k^2}. La condition est évidemment suffisante; elle est nécessaire, car si on a quel que

---

(1) Observons qu'à l'aide de cette intégration élémentaire on vérifie bien (sans s'appuyer sur le théorème général), que l'absence de points critiques mobiles algébriques, entraine, pour une équation (α), l'absence de tous points critiques mobiles.

soit C :

$$sn\ (J_1 + C) = sn\ (J_2 + C),$$

$J_1 - J_2$ est une période de sn_{k^2}.

Si notamment $A(x)$ est algébrique, pour que $y_1(x)$ soit uniforme quel que soit C, il faut d'abord que $A(x)$ soit rationnel, ensuite que toutes ses périodes soient de la forme $m\omega + n\omega'$. La fonction $y_1(x)$ s'obtient alors en remplaçant, dans $sn_{k^2}\,u$, la variable u par $\frac{1}{2i\pi}[\rho(x) + \omega \log R(x) + \omega' \log R_1(x)]$, ρ, R et R_1 étant des fractions rationnelles.

Etant donnée une fraction $A(x)$, soit $\frac{1}{x}$ par exemple ; on ne sait pas d'ailleurs reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, si $\int A(x)\,dx$ n'a comme périodes que des périodes de sn_{k^2}.

Pour que $y_1(x)$ n'ait qu'un nombre fini de valeurs, il faut et il suffit que toutes les valeurs de $\int_{x_0}^{x} A(x)\,dx$ se déduisent d'un nombre fini d'entre elles par l'addition de périodes de sn_{k^2}.

Cinquième Leçon.

Equations du premier ordre et de degré quelconque (suite) De l'intégrale considérée comme fonction de la constante

Equations différentielles de genre inférieur à 3.. Les résultats obtenus à la fin de la dernière leçon permettent d'intégrer ou de ramener à une équation de Riccati, toute équation :

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0$$

à points critiques fixes, pourvu que le genre de la relation algébrique (1) entre y' et y soit (pour x quelconque) inférieur à 3.

Pour le voir, plaçons-nous d'abord dans le cas où

ce genre p est nul.

A l'aide de calculs algébriques, on sait alors exprimer rationnellement y et y' en fonction d'un paramètre t, soit :

$$(2) \qquad y = R\,(t,x) \quad , \quad y' = \rho\,(t,x),$$

R et ρ désignant deux fractions rationnelles en t dont les coefficients dépendent de x, et cela de telle façon qu'à chaque point (y, y') de la courbe unicursale (1) corresponde une seule valeur de t :

$$(3) \qquad t = S\,(y', y, x),$$

S désignant une fraction rationnelle en y', y.

Si, dans (3), on remplace y, y' par une intégrale $y(x)$ de (1) et sa dérivée, t devient une fonction de x qui vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\partial R}{\partial t} \quad \frac{dt}{dx} + \frac{\partial R}{\partial x} = \rho\,(t,x),$$

équation de la forme :

$$(4) \qquad \frac{dt}{dx} = P\,(t,x) \;,$$

P étant rationnel en t. Quand $y(x)$ a ses points critiques fixes, il en est de même de $t(x)$ d'après l'équation (3). L'équation (1) se ramène donc algébriquement à une équation de Riccati (4). Quand on remplace, dans (2), $t(x)$ par l'intégrale de (4), $t = \dfrac{C\varphi + \psi}{C\varphi_1 + \psi_1}$, on voit que y est une fraction rationnelle en C de degré n, si n désigne le degré de l'équation (1) en y, y'.

Si le genre p est égal à 1, on exprime y et y' en fonction de t et d'un radical $\theta = \sqrt{t(t-1)(t-2)[t-g(x)]} \equiv \sqrt{Q(t,x)}$, soit :

$$(5) \qquad y = R\,(t,\theta,x) \;,\; y' = \rho\,(t,\theta,x),$$

R et ρ étant rationnels en t, θ ; et cela de telle façon qu'inversement t et θ s'expriment rationnellement en y, y' :

$$(6) \quad t = S\,(y', y, x), \quad \theta = \sigma\,(y', y, x)$$

Substituons à la fonction $y(x)$, la fonction $t(x)$ définie par (5); $t(x)$ satisfait à l'équation:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\sqrt{Q}}\right]\frac{dt}{dx} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{\sqrt{Q}} = \varrho(t,\theta,x),$$

équation de la forme:

$$(7) \qquad \frac{dt}{dx} = P(t,x) + P_1(t,x)\sqrt{t(t-1)(t-2)[t-g(x)]},$$

P et P_1 étant des fractions rationnelles en t. Quand l'équation (1) a ses points critiques fixes, t et θ ont leurs points critiques fixes (et réciproquement). Mais l'équation (7), où $g(x)$ ne coïncide pas avec $0, 1,$ ou 2, ne peut avoir ses points critiques fixes que si elle est de la forme:

$$\frac{dt}{dx} = A(x)\sqrt{t(t-1)(t-2)(t-c)},$$

ou encore si P_1 est identiquement nul et P un polynôme du second degré en t. Dans le premier cas, si $J(x)$ désigne la quadrature $\int A(x)\,dx$, on a:

$$t = \lambda\left[J(x)+C\right], \qquad \theta = \lambda'\left[J(x)+C\right],$$

$\lambda(u)$ désignant la fonction elliptique définie par $u = \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda}}$ et λ' la dérivée $\frac{d\lambda}{du}$; y est donné rationnellement en fonction de t et de θ par (5).

Dans le second cas, t vérifie l'équation de Riccati:

$$(8) \qquad \frac{dt}{dx} = P(t,x);$$

mais pour que $\theta(x)$ ait ses points critiques fixes, il faut que $t=0$, $t=1$, $t=2$ soient trois intégrales de (8); soit en effet $t(x)$ l'intégrale de (8) qui est égale à zéro pour $x=x_0$, x_0 étant quelconque; la fonction $\theta(x) = \sqrt{t}\sqrt{(t-1)(t-2)(t-g)}$, admet le point x_0 comme point critique si $\frac{dt}{dx}$ n'est pas nul pour $x=x_0$, et le même raisonnement s'applique à $t=1$ et à $t=2$. L'équation (8) doit donc se réduire à $\frac{dt}{dx}=0$, et donne $t=C$. Mais $\theta = \sqrt{C(C-1)(C-2)(C-g(x))}$ n'a ses points critiques fixes que si $g(x)$ est

une constante c. En définitive, l'intégrale $y(x)$ s'obtient ici en remplaçant, dans (5), t par C et θ par $\sqrt{C(C-1)(C-2)(C-c)}$.

Quand p est égal à 2, rien n'est changé dans ce qui précède, si ce n'est que θ est de la forme $\theta = \sqrt{t(t-1)(t-2)(t-g_1)(t-g_2)(t-g_3)}$, g_1, g_2, g_3 pouvant dépendre de x. L'équation que vérifie $t(x)$ est d'une forme analogue à (7), mais comme le radical porte sur un polynôme de degré supérieur à 4 et à racines distinctes, la nouvelle équation ne peut avoir ses points critiques fixes que si $P_1(t,x)$ est identiquement nul, autrement dit que si elle est une équation de Riccati: pour que $\theta(x)$ ait ses points critiques fixes, il faut encore que $t=0$, $t=1$, $t=2$ soient des intégrales, donc que $P(t,x)$ soit identiquement nul; il faut ensuite que $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ soient des constantes c_1, c_2, c_3. Quand ces conditions sont remplies, l'intégrale de (1) a ses points critiques fixes et s'obtient algébriquement.

Cette conclusion subsiste si la relation (1) entre y et y' est de genre supérieur à 2 mais de l'espèce hyperelliptique, autrement dit si elle se transforme birationnellement en une courbe où une des variables ne figure qu'au second degré. On sait reconnaître algébriquement si une courbe algébrique donnée est hyperelliptique.

Observons que toutes les fois qu'une équation (1) à points critiques fixes est de genre zéro, un ou deux, ou est hyperelliptique, la courbe algébrique en y', y correspond birationnellement à une courbe indépendante de x, autrement dit ses modules sont indépendants de x.

Si notamment x ne figure pas dans l'équation (1), l'intégrale est nécessairement uniforme quand elle a ses points critiques fixes; car si $x = \xi$ est un point critique d'une intégrale, $\xi + C$ est un point critique d'une autre intégrale. De plus, les transformations de y en t et l'équation auxiliaire en t peuvent être choisies

indépendantes de x. Il suit de là que pour $p=0$, y est une fonction rationnelle de x ou de e^{kx} ; pour $p=1$, l'intégrale est une fonction rationnelle de $\mathrm{sn}\,\mu x, [\mathrm{cn}\,\mu x.\ \mathrm{dn}\,\mu x]$. Pour $p=2$, l'équation n'a jamais ses points critiques fixes, car autrement y se réduirait à une constante, et on aurait $y'=0$. Ce sont là des résultats classiques.

Observons encore que dans les cas particuliers de $p=0$, 1 ou 2, il n'est pas indispensable de s'appuyer sur le théorème fondamental relatif aux points transcendants de l'intégrale. Les conditions nécessaires pour que les points critiques algébriques soient fixes, entraînent pour les équations auxiliaires en t les formes indiquées, et on vérifie sur ces équations que <u>tous</u> les points critiques sont fixes.

En définitive, nous savons maintenant exprimer algébriquement qu'une équation (1) quelconque a ses points critiques fixes. Quand ces conditions sont remplies pour une équation (1) de genre p moindre que 3 en y', y, nous savons la ramener algébriquement à une équation de Riccati pour p nul, à une quadrature si p est égal à 1, enfin l'intégrer algébriquement si p est égal à 2 (ou si l'équation est hyperelliptique). Mais les procédés développés jusqu'ici, d'une part ne nous apprennent rien sur l'intégration d'une équation (1) à points critiques fixes, quand son genre p est supérieur à 2 et quand elle n'est pas hyperelliptique ; d'autre part, ils ne peuvent servir à l'étude de l'intégrale quand cette intégrale prend autour des points critiques mobiles un nombre limité de valeurs. Pour parvenir à la solution de ces deux problèmes, il est indispensable d'étudier l'intégrale comme fonction de la constante.

De l'intégrale considérée comme fonction de de la constante. — Joignons, dans le plan des x, tous les points ξ par des coupures et assujettissons x à varier sans franchir aucune de ces coupures. Dans ces conditions, la fonction $y'=f(y,x)$,

définie par l'équation :

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0 ,$$

est une fonction à m branches, une fois adoptées les déterminatio[ns] des coefficients $\alpha_i(x)$ de F pour une valeur particulière de x. De plus, quand, x variant, on suit les variations correspondantes d'une in[té]grale $y(x)$ de (1), on peut revenir au point de départ avec toutes [les] valeurs de l'intégrale qui se permutent autour des points critiq[ues] mobiles et avec celles-là seulement.

Ceci posé, soit $\bar{x}_0$ un point fixe du plan des x dis[tinct] des points ξ, et soit y_0 une valeur quelconque de y, y'_0 une des valeurs correspondantes de y'. L'intégrale $y(x)$ dont la valeur pour $x = x_0$ est égale à y_0 et dont la dérivée est égale à y'_0, est bien déterminé par ces conditions initiales (sauf pour des valeurs exceptionnelles de y_0 en nombre fini). Quand on va de $\bar{x}_0$ au point $\bar{x}$ sur un chemin L qui n'a aucun point commun avec les coupures, on arrive en $\bar{x}$ avec une valeur déterminée $\bar{y}$ de y, ($\bar{y}$ pouvant être infi[nie]): cette valeur $\bar{y}$ changera si on déforme le chemin L de façon à franchir un point mobile de $y(x)$. On définit, de cette manière, pour une valeur de x quelconque (en dehors des coupures), et pour un point quelconque (y'_0, y_0) de la surface de Riemann

$$(S) \qquad F(y'_0, y_0, \bar{x}_0) = 0 ,$$

une fonction $y = \varphi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ dont les diverses déterminations sont les diverses valeurs (permutables autour des points critiques mobiles) de l'intégrale qui répond aux conditions initiales: $y(x_0) = y_0$, $\frac{dy}{dx}(x_0) = y'_0$. Nous allons montrer que cette fonction $\varphi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ est sur toute la surface de Riemann (S) une fonction analytique du point (y'_0, y_0) qui ne pré[sente] que des singularités algébriques. Si on remplace y'_0 en fonction de y_0 d'après S, ceci revient à dire que l'intégrale générale de (1

$y = \varphi_1(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ est une fonction analytique de y_0 qui n'admet que des singularités algébriques.

Donnons en effet à y_0 une valeur quelconque $\bar{y}_0$, et soit $\bar{y}'_0$ une des valeurs correspondantes de y'. Montrons que : la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ est algébroïde pour $y_0 = \bar{y}_0$, $y'_0 = \bar{y}'_0$.

Si $\bar{y}'_0$ est infini ou racine multiple de (S), nous adoptons, le long du chemin L, une quelconque des intégrales qui répondent aux conditions initiales ; et de même, si L renferme un des points critiques de l'intégrale considérée, nous adoptons au delà de ce point, une quelconque des déterminations qui s'y permutent. Soit $y = \psi(x)$ la fonction de x ainsi définie le long de L, $\psi'(x)$ sa dérivée : Soit de plus $y' = f(y, x)$ la branche de y' qui pour : $y = \psi(x)$ est égale à $\psi'(x)$; quand plusieurs branches de y' répondent à cette condition, on considère l'une quelconque de ces branches.

Nous savons déjà que l'intégrale de l'équation :

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = f(y, x),$$

égale à y_0 pour $x = x_0$; soit $y = \varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ est une fonction algébroïde de y_0 pour $y_0 = \bar{y}_0$, tant que x reste suffisamment voisin de $\bar{x}_0$. Soit $\overline{x_0\, \alpha}$ le plus grand segment du chemin L pour lequel cette condition soit remplie. Quand x tend vers α, $\psi(x)$ tend vers b, $\psi'(x)$ vers b', (b ou b' pouvant être infinie) : si $\bar{\alpha}$ est une valeur de x très voisine de α, l'intégrale de (1)' égale à y_1 pour $x = \bar{\alpha}$, est une fonction algébroïde de x et de y_1 à l'intérieur de deux cercles de rayons fixes, ayant respectivement comme centres le point $\bar{\alpha}$ du plan des x et le point $\beta = \psi(\bar{\alpha})$ du plan des y_1 ; cette fonction $y = \varphi(x, y_1, \bar{\alpha})$ est donc algébroïde pour $x = \alpha$, $y_1 = \beta$; mais on passe de la forme de l'intégrale $y = \varphi(x, y_1, \bar{\alpha})$ à la forme : $y = \varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ en remplaçant y_1 par $\varphi(\bar{\alpha}, y_0, \bar{x}_0)$, fonction de y_0 qui pour $y_0 = \bar{y}_0$ est algébroïde et égale à β ; il suit de là que

la fonction $y=\varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ est algébroïde pour $x=\alpha$ et $y_0=\bar{y}_0$, ce qui est contre l'hypothèse. Un point tel que a ne peut donc exister sur L entre $\bar{x}_0$ et $\bar{x}$, et comme le raisonnement s'applique si a coïncide avec $\bar{x}$, on voit que $\varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$ est algébroïde pour $x=\bar{x}$, $y_0=\bar{y}_0$. C. Q. F. D.

Corollaire. — On peut compléter ce théorème par une remarque qui montre bien comment s'introduisent les points critiques algébriques de la fonction $y=\varphi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ du point y'_0, y_0 de la courbe (S). Si, pour $x=\bar{x}$, la branche considérée de la fonction $y=\varphi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ admet le point analytique $(\bar{y}'_0, \bar{y}_0)$ de S comme point critique (j'entends par là : n'est pas rationnelle sur la surface de Riemann (S) dans le domaine du point $\bar{y}'_0$, $\bar{y}_0$), l'intégrale $y(x)=\varphi(x, \bar{y}'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ admet le point $x=\bar{x}$, comme point critique.

Tout d'abord, si toutes les intégrales de (1) égales à $\bar{y}_0$ pour $x=\bar{x}_0$ sont rationnelles dans le domaine de $x=\bar{x}_0$, l'intégrale générale $y=\varphi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ de (1) est rationnelle sur la surface de Riemann S dans le domaine du point $\bar{y}'_0$, $\bar{y}_0$ (pourvu que $\bar{x}$ soit suffisamment voisin de x_0). En effet, pour x et y voisins de $\bar{x}_0$ et $\bar{y}_0$, les diverses branches de y' peuvent toujours se partager en l groupes, ($l \leq m$), le premier formé de ν branches qui se permutent dans le domaine de $y=\bar{y}_0$, $x=\bar{x}_0$, le deuxième formé de ν' branches analogues, etc. Soit :

$$(i) \qquad \alpha_\nu(y,x)\, y'^{\nu} + \alpha_{\nu-1}(y,x)\, y'^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0(y,x) = 0$$

l'équation qui définit le premier groupe ; si l'intégrale de cette dernière équation [1] égale à $\bar{y}_0$ pour $x=\bar{x}_0$ est rationnelle pour $x=\bar{x}_0$

---

[1] Si l'équation admet une intégrale singulière (annulant le discriminant de (i) relatif à y'), cette intégrale est toujours régulière pour $x=\bar{x}_0$; mais en général l'équation (i) admet en

nous savons que l'intégrale de (i) peut s'écrire:

(j) $y = \beta_{\nu-1}(x, y_0, \bar{x}_0)\, y_0'^{\nu-1} + \cdots + \beta_1(x, y_0, \bar{x}_0)\, y_0' + \beta_0(x, y_0, \bar{x}_0)$,

les β étant holomorphes pour $x = \bar{x}_0$, $y_0 = \bar{y}_0$. La même remarque s'applique aux autres branches. Ceci posé, écrivons:

(k) $y = \gamma_{m-1}(x, y_0, \bar{x}_0)\, y_0'^{m-1} + \cdots \gamma_1(x, y_0, \bar{x}_0)\, y_0' + \gamma_0(x, y_0, \bar{x}_0)$,

et exprimons que cette égalité coïncide avec (j), quand on tient compte de la relation:

$$\alpha_\nu(y_0, x_0)\, y_0'^{\nu} + \cdots\cdots + \alpha_0(y_0, x_0) = 0.$$

En procédant de même pour les autres branches, on forme en tout m relations linéaires pour déterminer les γ en fonction des coefficients holomorphes β ; ces m relations, sont toujours compatibles et déterminées, comme on le voit aussitôt. On peut donc toujours mettre l'intégrale de (1) sous la forme (k), où les (γ) sont holomorphes pour $x = \bar{x}_0$, $y = \bar{y}_0$, pourvu que $x = \bar{x}_0$ ne soit un point critique d'aucune des intégrales égales à y_0 pour $x = x_0$.

Il suffit dès lors de répéter le raisonnement fait plus haut, en déformant un peu (s'il est nécessaire), le chemin L de façon à ne rencontrer aucun point critique de l'intégrale particulière $y = \psi(x)$. On voit ainsi [1], que $y = \varphi(x, y_0', y_0, \bar{x}_0)$ ne peut cesser d'être uniforme autour du point (y_0', y_0) de (S) quand x décrit L' jusqu'en $\bar{x}$, ni pour $x = \bar{x}$, à moins que l'intégrale $y(x)$ définie par la branche considérée de φ, soit $y = \varphi(x)$, n'admette $x = \bar{x}$, comme point critique. Quand les intégrales $y_1(x), \ldots y_m(x)$, obtenues en donnant dans $\varphi(x, \bar{y}_0', \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ à $\bar{y}_0'$ ses m valeurs, sont rationnelles pour $x = \bar{x}$, la branche considérée de la fonction φ peut se

---

outre, une autre intégrale qui peut admettre x_0 comme point critique

[1] Le raisonnement est le même qu'à la page 38.

mettre sous la forme (k) où les γ sont rationnels en x, y_0 pour $x = \bar{x}$, $y_0 = \bar{y}_0$.

La transformation $y = \frac{1}{z}$ permet évidemment d'étendre tout ce qui précède au cas où y_0 est infini.

Enfin, si la fonction $\varphi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ est infinie pour $y'_0 = \bar{y}'_0 \cdot y_0 = \bar{y}_0$, l'intégrale $y(x) = \varphi(x, \bar{y}'_0, \bar{y}_0, x_0)$ admet le point x comme pôle. Toutefois, φ peut devenir infini, quelque soit x pour $y_0 = \infty$: ceci a lieu si la transformée en $\frac{1}{z} = y$ de l'équation (1) admet l'intégrale $z \equiv 0$.

Ces remarques montrent bien la manière dont s'introduisent les singularités algébriques de l'intégrale considérée comme fonction de la constante. Mais ce qu'il nous importe de retenir pour la suite, c'est le théorème énoncé : y_0 désignant la valeur d'une intégrale $y(x)$ au point x_0, l'intégrale générale de (1), $y = P(x, y_0, \bar{x}_0)$ ne présente dans tout le champ des y_0 que des points singuliers algébriques.

Si, au lieu de y_0, on fait varier x_0, la même discussion montre que la fonction $y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}_0, x_0)$ peut en outre admettre des points transcendants fixes (qui font nécessairement partie des points ξ').

Nous allons appliquer maintenant les résultats obtenus à l'étude des équations (1) dont l'intégrale a ses points critiques fixes ou n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles

Équations à points critiques fixes — Quand l'équation (1) a ses points critiques fixes, la fonction $y = \varphi(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ n'est susceptible que d'une détermination sur la surface de Riemann définie par (S)

$$(S) \qquad F(y'_0, y_0, \bar{x}_0) = 0.$$

De plus, elle n'admet sur (S) que des singularités algébriques. C'est donc une fonction algébrique de y_0 à m déterminations, ou, d'une façon plus précise, une fonction rationnelle du point analytique (y'_0, y_0) de la courbe (S), soit:

$$(r) \qquad y = \gamma_{m-1}(x, y_0, \bar{x}_0)\, y_0'^{m-1} + \dots + \gamma_1(x, y_0, \bar{x}_0)\, y'_0 + \gamma_0(x, y_0 \bar{x}_0).$$

Il en est de même de $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$(\varrho) \qquad y' = \delta_{m-1}(x, y_0, \bar{x}_0)\, y_0'^{m-1} + \dots + \delta_1(x, y_0, \bar{x}_0)\, y'_0 + \delta_0(x, y_0, \bar{x}_0),$$

les δ désignant comme les γ des fonctions rationnelles en y_0. Il est clair d'ailleurs que si y est de la forme (r), l'intégrale a ses points critiques fixes.

Si maintenant nous permutons x et x_0, nous voyons qu'on a:

$$(r)' \quad y_0 = \gamma_{m-1}(\bar{x}_0, y, x)\, y'^{m-1} + \dots + \gamma_1(\bar{x}_0, y, x)\, y' + \gamma_0(\bar{x}_0, y, x),$$

$$(\varrho)' \quad y'_0 = \delta_{m-1}(\bar{x}_0, y, x)\, y_0'^{m-1} + \dots + \delta_1(\bar{x}_0, y, x)\, y' + \delta_0(\bar{x}_0, y, x),$$

y et y' vérifiant la relation:

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0.$$

L'intégrale générale de (1) définit donc une correspondance birationnelle entre la courbe S et la courbe (1), où $\bar{x}_0$ et x ont des valeurs quelconques. Nous tirerons dans la leçon prochaine d'importantes conséquences de ce théorème. Si on l'applique notamment à l'équation:

$$y'^2 = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

dont l'intégrale est uniforme, on voit que y doit être de la forme:

$$y = A(x, y_0, \bar{x}_0) + B(x, y_0, \bar{x}_0)\sqrt{(1-y_0)(1-k^2y_0^2)},$$

et en exprimant que y_0 doit s'obtenir d'une façon analogue en y, on retrouve aisément la formule d'addition relative à la fonction sn.

Équations dont l'intégrale n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles.

– Soit n ce nombre fini de valeurs, $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... $y_n(x)$ les n déterminations d'une intégrale particulière permutables autour des points mobiles. Si y_0, y'_0 sont une des valeurs de cette intégrale et de sa dérivée en un point x_0, la somme $y_1 + y_2 + \cdots y_n$ est une fonction de (y'_0, y_0) qui n'est susceptible que d'une seule valeur sur la surface de Riemann (S), et comme elle ne présente sur (S) que des singularités algébriques, c'est une fonction rationnelle du point (y'_0, y_0) de (S). La même remarque s'applique à la fonction symétrique $\Sigma\, y_1 y_2$, ou $\Sigma\, y_1 y_2 y_3$, etc : il suit de là que $y(x)$ vérifie une relation de la forme :

$$(\alpha) \quad 0 = y^n + R_{n-1}(x, y'_0, y_0, x_0)\, y^{n-1} + \cdots + R_1(x, y'_0, y_0, x_0)\, y + R_0(x, y'_0, y_0, x_0)$$

où les R sont rationnels en y'_0, y_0 ; considérées comme fonctions de x, les fonctions R ont leurs points critiques fixes. Inversement, si l'intégrale y vérifie une relation de la forme (α), elle acquiert au plus n valeurs autour des points critiques mobiles. Quand on élimine y'_0 entre la relation (α) et la relation (S), on forme une relation :

$$G \quad (y, x, y_0, x_0) = 0,$$

algébrique et de degré $m\,n$ par rapport à chacune des variables y, y_0.

Permutons maintenant x et x_0 ; la relation (α) devient.

$$(\beta) \quad y_0^n + R_{n-1}(y'_1, y, x)\, y_0^{n-1} + \cdots + R_1(x_0, y', y, x)\, y_0 + R_0(x_0, y', y, x) = 0.$$

Sous cette forme, on voit que quand on remplace, dans $R_{n-1}(x_0, y, y', x)$, y par une intégrale particulière de (1) et y' par sa dérivée, R_{n-1} devient une constante, à savoir la valeur (au signe près) de la somme des valeurs en x_0 des n déterminations de l'intégrale considérée. La même remarque s'applique aux autres coefficients R, et l'intégrale de (1) se laisse définir par une égalité de la

forme:

(e) $\qquad R_i(\bar{x}_0, y', y, x) = R_i(\bar{x}_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) = C_i$,

C_i désignant une constante et y' la fonction de y, x définie par (1).

Il est clair que de la forme (e) de l'intégrale, on peut en déduire une infinité d'autres en remplaçant R_i par une fonction rationnelle $H(R_i)$, ou plus généralement par une fonction rationnelle H de $R_0, R_1, \ldots R_{n-1}$.

Remarquons encore que l'équation (e), étant vérifiée quel que soit x_0, peut se différentier par rapport à x_0[1] et donne:

$$R_i \equiv \frac{\partial R_i}{\partial x_0}(x_0, y', y, x) = \frac{dR_i}{dx_0}(x_0, y'_0, y_0, x_0) = C'_i .$$

Si donc nous posons, H désignant une fonction rationnelle,

(f) $\qquad r(y', y, x) = H\left(R_0, R_1, \ldots R_{n-1}, \frac{\partial R_0}{\partial x_0}, \frac{\partial R_1}{\partial x_0}, \ldots \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x_0}\right)$,

l'intégrale de (1) se laisse mettre sous la forme:

(e)' $\qquad r(y', y, x_0) = c$.

Si d'ailleurs entre deux formes telles que (e)' on élimine le point analytique (y, y'), x se trouve éliminé en même temps, et on obtient une relation algébrique entre les deux constantes c et c_1. Je vais montrer que l'on peut toujours choisir ces deux formes d'intégrale première (e)' de façon que toutes les formes analogues soient une combinaison rationnelle des deux formes particulières choisies

Montrons d'abord que $r(y', y, x)$ n'a d'autres points critiques que les points ξ. Nous supposons les points ξ reliés par des coupures que x ne franchit pas et la détermination des coefficients de (1) choisie pour $x = \alpha$ (donc pour x quelconque). Les fonctions R, R' sont alors bien déterminées. Nous considérons une branche de la fonction r, définie sans ambiguité dans le domaine de $x = \alpha$) et qui se réduit, par hypothèse, à une constante quand

(1) Toute solution $y = \varphi(x)$ de (1) et sa dérivée $y' = \varphi'(x)$ vérifie la relation: $R_i[x_0, \varphi'(x), \varphi(x), x] = R_i[x_0, \varphi'(x_0), \varphi(x_0), x_0] \equiv C_i(x_0)$, et par suite la relation $\frac{\partial R_i}{\partial x_0}(x_0, \varphi'(x), \varphi(x), x) = \frac{dC_i(x_0)}{dx_0} = C'_i(x_0)$.

on y remplace y et y' par une solution quelconque de (1) et sa dérivée. Soit, par exemple, r_1 cette branche de r ; je dis que r_1 est une fonction uniforme de x quand x varie d'une façon continue sans franchir les coupures. Autrement, il existe au moins un point $x = \alpha$, tel que, quand x revient au point α, après avoir tourné autour de α, la branche r_1, s'est permuté avec une autre branche r_2 de r. Or soit $y = \varphi(x)$ une solution quelconque de (1), (holomorphe pour $x = \alpha$), et soit $\bar{y}$ et $\bar{y}'$ les valeurs de cette solution et de sa dérivée au point α ; soit enfin: $c_1 = r_1(\bar{y}', \bar{y}, \alpha)$, $c_2 = r_2(\bar{y}', \bar{y}, \alpha)$, $[c_1 \neq c_2]$. Quand x parti de α, revient en α après avoir tourné du point α sans tourner autour d'aucun point critique de $\varphi(x)$, φ et φ' reprennent les mêmes valeurs $\bar{y}$ et $\bar{y}'$, r_1 s'est permuté avec r_2, en sorte que la branche considérée de la fonction $r(\varphi', \varphi, x) \equiv \rho(x)$ est passée de la valeur c_1 à la valeur c_2 ; mais d'autre part cette fonction $\rho(x)$ doit se réduire à une constante. Il y a donc contradiction. La fonction r est une fonction uniforme de x quand x ne franchit pas les coupures. Les fonctions R, R', r ont donc une valeur unique bien déterminée pour tout système y', y, x, (pourvu que x ne fasse pas partie des coupures).

Une conséquence immédiate de cette remarque est la suivante : Soit y_1, y_1' et y_2, y_2' deux valeurs, pour $x = x_1$, d'une solution $y = \varphi(x)$ de (1) et de sa dérivée, valeurs qui se permutent autour des points critiques mobiles. La fonction uniforme $r(y', y, x)$, garde la même valeur quand on y fait:

$$y = y_1 \,,\ y' = y_1' \,,\ x = x_1 \quad,\text{et } y = y_2 \,,\ y' = y_2' \,,\ x = x_1$$

En effet, faisons décrire à x un contour fermé (qui ne franchit pas les coupures) tel que, partant de x_1 avec les valeurs y_1, y_1' de φ, φ', on revienne en ce point avec les valeurs y_2, y_2'. Comme $r[\varphi'(x), \varphi(x), x]$ garde la valeur constante $r(y_1', y_1, x_1)$, on a :

$$r(y_2', y_2, x_1) = r(y_1', y_1, x_1). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Ceci posé, je dis en premier lieu que toute forme d'intégrale première (c) est donnée par la formule (f). En effet, il me suffit de prouver que la valeur c est une fonction rationnelle des valeurs des constantes $C_0, C_1, \ldots C'_0, C'_1 \ldots$ Soit donc : $C_0, C_1, \ldots C_{n-1}, C'_0, \ldots C'_{n-1}$ un système de valeurs pour lesquelles les égalités en (y', y) :

$$R_{n-1} = C_{n-1}, \ldots \qquad R_0 = C_0 .$$

$$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x_0} = C'_{n-1}, \ldots \qquad \frac{\partial R_0}{\partial x_0} = C_0 ,$$

sont compatibles quel que soit x. Elles ne peuvent définir que les n branches d'une même intégrale de (1) ; car on a d'abord :

$$y_0^n + C_{n-1} \; y_0^{n-1} + \cdots + C_0 = 0 ,$$

ce qui détermine les n valeurs de y au point x_0 ; ensuite on a :

$$n y_0^{n-1} y'_0 + (n-1) \, C_{n-1} \, y_0^{n-1} y'_0 + y_0^{n-1} C'_{n-1} + \cdots + C'_0 = 0 ,$$

ce qui détermine la valeur de y' en x_0 pour chaque valeur y_0 de y. Aux valeurs considérées de C_i, C'_j correspondent donc les n branches d'une même intégrale et par suite une seule valeur de c.

Il suffit donc de montrer qu'on peut choisir deux formes $r = c$, $r_1 = c_1$ de l'intégrale première, liées par une relation algébrique :

$$\sigma(c, c_1) = 0 ,$$

de telle façon que les R_i, $\frac{\partial R_i}{\partial x_0}$ s'expriment rationnellement en r, r_1.

Or les quantités C_i, C'_j sont liées algébriquement à l'une d'entre elles, C_0 par exemple. Si on pose $c = C_0$ et :

$$c_1 = \Sigma \, \alpha_i C_i + \Sigma \beta_i C'_i ,$$

les $\alpha_i \, \beta_i$ étant des nombres quelconques, on sait que les C_i, C'_j s'expriment rationnellement en fonction de c, c_1 liés par une certaine relation algébrique :

$$\text{(i)} \qquad \sigma(c, c_1) = 0 .$$

Nous donnerons à cette relation le nom de relation entre les constantes intégrales. Si deux autres constantes intégrales γ et γ_1 jouissent de la même propriété que les deux constantes c, c_1, ces dernières s'expriment rationnellement en γ, γ_1 qui sont elles-mêmes rationnelles en c, c_1. Inversement, toute transformation birationnelle effectuée sur la courbe $\sigma = 0$ fournit un nouveau système de deux constantes intégrales analogues à c, c_1. On voit que la relation entre les constantes intégrales est définie à une transformation birationnelle près.

L'équation (1), pour x quelconque, est une transformée rationnelle de la courbe :

$$(i) \qquad \sigma(c, c_1) = 0$$

d'après les relations :

$$(j) \qquad c = r(y', y, x), \quad c_1 = r_1(y', y, x),$$

où r et r_1 sont rationnels en y', y.

Pour deux valeurs c, c_1 vérifiant la relation (i), les relations (j) sont compatibles quel que soit x, et définissent les n déterminations d'une intégrale particulière $y(x)$ et de sa dérivée. En effet, c et c_1 déterminent les valeurs C_i, C'_i, et d'autre part si une branche d'une intégrale vérifie l'égalité $c = r$, toutes ses autres branches la vérifient également. Il suit de là qu'à un point de la courbe (i) correspondent exactement n points de la courbe (1).

Sixième Leçon

De l'intégrale considérée comme fonction de la constante (Suite). — Digression sur les transformations birationnelles des courbes algébriques.

De l'intégrale considérée comme fonction de la constante (suite). — Nous avons vu dans la dernière leçon que si

l'intégrale $y(x)$ d'une équation (1)

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0,$$

acquiert exactement n déterminations autour des points critiques mobiles, elle vérifie une équation de la forme :

$$(2) \qquad G(y, x, y_0, x_0) = 0,$$

où G est un polynôme en y, y_0 de degré m n par rapport à chacune de ces variables.

Inversement, si l'intégrale générale d'une équation (1) vérifie une relation :

$$G_1(x, y, C) = 0,$$

où G est un polynôme en y, C de degré q en y, et où C désigne une constante arbitraire, cette intégrale prend au plus q déterminations autour des points critiques mobiles. La classe d'équations (1) qui nous occupe peut donc être caractérisée par cette propriété que l'intégrale est une fonction algébrique de la constante. Il en est tout autrement quand on passe aux équations d'ordre supérieur.

Observons que la forme (2) de l'intégrale peut servir à reconnaître si l'intégrale d'une équation (1) donnée admet seulement un nombre donné n déterminations permutables autour des points critiques mobiles. Il suffit en effet d'écrire un polynôme G de degré m n en y et y_0 respectivement, en laissant indéterminés ses coefficients $\lambda_i(x)$ puis d'exprimer que la relation $G = 0$ définit l'intégrale de (1). Si les relations différentielles ainsi obtenues entre les $\lambda_i(x)$ sont compatibles (ce qu'on reconnaît à l'aide d'opérations algébriques linéaires), l'équation (1) est de l'espèce en question. Mais cette marche de calcul (qui s'applique en particulier au cas de $n = 1$) ne nous apprend rien sur les intégrations à effectuer pour obtenir explicitement les $\lambda_i(x)$. Une étude un peu plus approfondie de l'intégrale regardée comme fonction de y_0 va nous permettre d'aller plus loin.

Nous avons vu qu'on peut choisir deux constantes intégrales :

$$c = r\,(y', y, x) \qquad c_1 = r_1\,(y', y, x),$$

de telle façon que toutes les autres, et en particulier les coefficients $R_i\,(x_o, y', y, x)$ de la relation (6) (voir page 79), s'expriment rationnellement en fonction de c, c_1, liées par la relation algébrique :

$$\sigma\,(c, c_1) = 0.$$

On peut donc écrire :

$$R_i\,[\bar{x}_o, y', y, x] \equiv \rho_i\,(\bar{x}_o, r, r_1),$$

et par suite, en permutant x et x_o,

$$R_i\,(x, y'_o, y_o, \bar{x}_o) \equiv \rho_i\,(x, c, c_1),$$

avec $\qquad c = r\,(y'_o, y_o, x_o), \quad c_1 = r_1\,(y'_o, y_o, x_o).$

les ρ_i désignant des fractions rationnelles en r, r_1 (ou en c, c_1).

L'intégrale de (1) peut donc s'écrire :

(3) $\quad y^n + \rho_{n-1}\,(x, c, c_1)\,y^{n-1} + \dots + \rho_1\,(x, c, c_1)\,y + \rho_o\,(x, c, c_1) = 0,$ avec :

$$\sigma\,(c, c_1) = 0,$$

c et c_1 étant connus eux-mêmes rationnellement quand on connaît pour $\bar{x}$ les valeurs de y et y' :

$$c = r\,(y', y, \bar{x}), \qquad c_1 = r_1\,(y', y, \bar{x}).$$

En particulier, quand le genre ϖ de la relation $\sigma\,(c, c_1) = 0$ est nul, toutes les constantes intégrales s'expriment en fonction rationnelle d'une d'entre elles, soit c, et l'intégrale peut s'écrire :

$$y^n + \rho_{n-1}\,(x, c)\,y^{n-1} + \dots + \rho_1\,(x, c)\,y + \rho_o\,(x, c) = 0$$

avec $\qquad c = r\,(y', y, x),$

c figurant au degré m dans les fractions rationnelles ρ réduites au

même dénominateur.

En effet, c ne peut figurer à un degré μ moindre que m : autrement, la relation irréductible (1) entre y', y serait de degré μ en y'. D'autre part, pour y donné c ou $r(y', y, \bar{x})$ n'est susceptible que de m valeurs.

Quand le genre ϖ de $\sigma = 0$ est égal à 1, l'intégrale se met sous la forme :

$$y^n + r_{n-1}(x,c)\, y^{n-1} + \dots + r_0(x,c) + \sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}\left[r'_{n-1}(x,c)\, y^{n-1} + \dots + r'_0(x,c)\right] = 0,$$

les r, r' étant rationnels en c, et k^2 désignant une constante numérique.

La remarque suivante s'applique quand ϖ est quelconque. Tout d'abord, si les $C_i = R_i(x_0, y', y, x)$ s'expriment rationnellement en fonction des deux constantes intégrales $c = r(y', y, x)$, $c_1 = r_1(y', y, x)$, il en est de même des $\frac{\partial R_i}{\partial x_0}$; en effet l'égalité :

$$C_i = R_i(x_0, y', y, x) \equiv \rho_i(x_0, c, c_1),$$

entraîne l'égalité :

$$C'_i = \frac{\partial R_i}{\partial x_0}(x_0, y', y, x) \equiv \frac{\partial \rho_i}{\partial x_0}(x_0, c, c_1) = \rho'_i(x_0, c, c_1),$$

ρ et ρ' étant des fractions rationnelles en c, c_1.

Plus généralement, soit q le nombre des valeurs de c_1 qui correspondent à une valeur de c : à ces q valeurs $c_1 = u(c)$, $c_1 = v(c)$... correspondent, pour une valeur arbitraire de c, q systèmes distincts $C_{n-1}, \dots C_1, C_0$; si on avait en effet :

$$\rho_i[x_0, c, u(c)] \equiv \rho_i[x_0, c, v(c)] \quad , (i = 1, 2 \dots n),$$

on aurait aussi

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x_0}[x_0, c, u(c)] \equiv \frac{\partial \rho_i}{\partial x_0}[x_0, c, v(c)], \ (i = 1, 2 \dots n);$$

au même système de valeur C_i, C'_i correspondrait donc une valeur de c et au moins deux valeurs $c_1 = u$, $c_2 = v$ de c_1. Or c et c_1,

s'expriment rationnellement en fonction des C_i C'_i. La proposition est donc démontrée.

Ceci posé, prenons comme constante intégrale c, l'expression :

$$c = \alpha_{n-1}(x_0)\, R_{n-1}(x_0, y', y, x) + \cdots\cdots + \alpha_1(x_0)\, R_1(x_0, y', y, x) + \alpha_0(x_0)\, R_0(x_0, y', y, x),$$

où les $\alpha_i(x_0)$ sont des fonctions arbitrairement choisies de x_0 et où x_0 a une valeur fixe. On peut toujours à c associer une seconde constante intégrale $c_1 = r_1(y', y, x)$ telle que toutes les autres s'expriment rationnellement en fonction de c, c_1. Je dis qu'on peut choisir pour constante c_1 la constante intégrale :

$$c' = \frac{\partial c}{\partial x_0} = \alpha_{n-1}(x_0)\, \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x_0}(x_0, y', y, x) + \frac{d\alpha_{n-1}}{dx_0} R_{n-1}(x_0, y', y, x) + \cdots + \alpha_0 \frac{\partial R_0}{\partial x_0} + \frac{d\alpha_0}{dx_0} R$$

en effet, une fois choisies (pour la valeur considérée de x_0) les valeurs des α_i, il est loisible de se donner arbitrairement les valeurs des $\frac{d\alpha_i}{dx_0}$; si q est le nombre des valeurs de c_1 qui correspondent à une valeur de c, ces q valeurs donnent aux $C_i = R_i$, par suite à c', q valeurs distinctes, à moins que les $\frac{d\alpha_i}{dx_0}$ ne satisfassent à une relation de la forme :

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha_i \left[C'_i(c) - C''_i(c) \right] + \Sigma \frac{d\alpha_i}{dx_0} \left[C_i(c) - C^1_i(c) \right].$$

Si donc les $\alpha_i(x_0)$ n'ont pas été choisis d'une façon particulière, il est loisible de prendre les constantes c et c' comme couple de constantes intégrales, puisque c_1 s'exprimera rationnellement en fonction de c, c'.

Conclusion — D'après ce qui précède : on peut toujours mettre l'intégrale sous la forme :

$$y_0^n + \rho_{n-1}(x_0, r', r)\, y_0^{n-1} + \cdots + \rho_1(x_0, r', r)\, y_0 + \rho_0(x_0, r, r') = 0,$$

$r(x_0, y', y, x)$ et $r' \equiv \frac{\partial r}{\partial x_0}$ étant rationnels en y', y et satisfaisant

à la condition :

$$r \equiv \alpha_{n-1}(x_0)\varrho_{n-1} + \cdots\cdots + \alpha_1(x_0)\varrho_1 + \alpha_0(x_0)\varrho_0 ;$$

les $\alpha_i(x_0)$ sont des fonctions de x_0 choisies arbitrairement, et les ϱ_i sont des fonctions rationnelles de r, r'. D'ailleurs r et r' vérifient une relation algébrique :

$$\sigma(r', r, x_0) = 0.$$

Permutons maintenant x et x_0 ; il vient (en posant $u \equiv r(x, y_0', y_0, x_0) \equiv \alpha_{n-1}(x) R_{n-1}(x, y_0', y_0, x_0) + \cdots + \alpha_0(x) R_0(x, y_0', y_0, x_0), u' = \frac{du}{dx}$) :

(4) $y^n + \varrho_{n-1}(x, u', u)\quad y^{n-1} + \cdots\cdots + \varrho_1(x, u', u)y + \varrho_0(x, u', u) = 0$, avec :

(5) $$\sigma(u', u, x) = 0.$$

Autrement dit, l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1) s'obtient en remplaçant, dans (4), $u(x)$ et $u'(x)$ par l'intégrale générale de l'équation (5), équation dont les points critiques sont fixes.

Observons de plus que l'intégrale d'une équation (1) donnée ne saurait être mise que d'une seule manière sous la forme (4), (5), une fois choisis les coefficients $\alpha_i(x)$ de la relation :

(6) $$u \equiv \alpha_{n-1}(x)\varrho_{n-1} + \cdots\cdots + \alpha_1(x)\varrho_1 + \alpha_0(x),$$

Admettons en effet que l'intégrale $y(x)$ soit définie par le système :

(4)' $y^n + \varrho'_{n-1}(x, v', v)\, y^{n-1} + \cdots + \varrho'_1(x, v', v)y + \varrho'_0(x, v', v) = 0$

(5)' $$\sigma_1(v', v, x) = 0,$$

la condition :

(6)' $$v \equiv \alpha_{n-1}(x)\varrho'_{n-1} + \cdots + \alpha_1(x)\varrho'_1 + \alpha_0(x)$$

étant remplie.

Je dis que $\sigma_1 = 0$ coïncide avec $\sigma = 0$ et que les ϱ'_i coïncident avec les ϱ_i (quand on fait $v = u$, $v' = u'$).

Pour le voir considérons une intégrale particulière

quelconque $y(x)$ de l'équation (1) ; cette intégrale vérifie la relation (4) et la relation (4)' quand on y remplace u par une certaine intégrale de (5) et v par une certaine intégrale de (5)' ; après cette substitution, les deux relations (4) et (4)' doivent coïncider ; autrement, elles auraient seulement ν racines communes en y, $[\nu < n]$, et l'intégrale $y(x)$ prendrait seulement ν valeurs autour des points critiques distincts des points ξ. Les fonctions de x ρ_i et ρ_i^1 (définies par la dite substitution) coïncident donc, par suite $u(x)$ et $v(x)$ d'après (6) et (6)'. Puisque toute intégrale de (5) est une intégrale de (5)', les deux équations (5) et (5)' coïncident. D'autre part, ρ_i et ρ_i^1 coïncident quand on y remplace u, u' et v, v' respectivement par la même intégrale de (5), l'intégrale par exemple qui pour $x = \alpha$ est égale à b et a pour dérivée b' ; ou ainsi $\rho_i(\alpha, b', b) \equiv \rho_i^1(\alpha, b', b)$, quels que soient α, b', b, (vérifiant la relation $\sigma[b', b, \alpha] = 0$). Les $\rho_i(x, y', y)$ et les $\rho_i^1(x, y', y)$ coïncident donc identiquement

C.Q.F.D.

Proposons-nous, d'après cela, de reconnaître, si l'intégrale générale d'une équation (1) donnée ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles. Nous savons reconnaître algébriquement s'il en est ainsi. Dans ce cas, essayons de mettre l'intégrale sous la forme (4)(5). écrivons explicitement les relations (4), (5), (6), en laissant indéterminés les coefficients $\lambda_i(x)$ dans la relation $\sigma = 0$ supposée de degré μ en u', de degré 2μ en u, et dans les expressions $\rho_i \equiv \sum_{i=1}^{i=\mu-1} A_i(u, x)\, u'^i$ où les A_i sont des fractions rationnelles en u de degré ν ; puis exprimons d'une part que l'équation (5) a ses points critiques fixes, d'autre part que l'équation (4) définit l'intégrale de (1). Nous formons ainsi un certain système de relations algébriques entre les $\lambda(x)$, $\frac{d\lambda}{dx}$ et les coefficients $\alpha_i(x)$ de l'équation (1) : pour des valeurs suffisamment grandes des deux entiers μ, ν.

ces relations sont compatibles, et elles définissent un système unique[1] de fonctions $\lambda(x)$ qui par suite est donné rationnellement, en fonction des coefficients de (1) (et de leurs dérivées)

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant. Il est toujours possible, à l'aide d'opérations algébriques linéaires de reconnaitre si l'intégrale d'une équation (1) ne prend qu'un nombre connu n de valeurs autour des points critiques mobiles, et de ramener dans ce cas, l'équation (1) à une équation à points critiques fixes $\sigma(u', u, x) = 0$, à l'aide d'une transformation $u = r(y'y, x)$, où r est une fraction rationnelle en y', y.

Remarque. Il est évident à priori que les n déterminations d'une intégrale particulière $y(x)$ vérifient une relation:

$$y^n + R_{n-1}(x, C)\, y^{n-1} + \dots + R_1(x, C)\, y + R_0(x, C) = 0,$$

dont les coefficients dépendent d'une constante C et ont leurs points critiques fixes (indépendants de C); un quelconque de ces coefficients, soit R_{n-1}, vérifie donc une équation différentielle du premier ordre à points critiques fixes, mais il n'est nullement évident que cette équation doive être algébrique, par rapport à R_{n-1}, $\frac{dR_{n-1}}{dx}$. Le fait résulte de ce que $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ ne présente dans le champ des y_0 que des singularités algébriques. Nous verrons plus loin que pour les équations du second ordre, la proposition analogue n'est plus vraie en général: R_{n-1} vérifie une équation différentielle du second ordre à points critiques fixes, mais transcendante par rapport à la fonction et à ses dérivées.

Les résultats précédents font concevoir le rôle des

---

[1] S'il en était autrement, c'est que l'intégrale $y(x)$ prendrait moins de n valeurs autour des points critiques mobiles, et la conclusion s'appliquerait à un nombre n' plus petit que n.

transformations rationnelles des courbes algébriques dans l'étude des équations différentielles qui nous occupent. Nous allons développer quelques propriétés de ces transformations dont nous aurons besoin par la suite.

Digression sur les transformations rationnelles des courbes algébriques. — Étant donnée une courbe algébrique de genre p, soit :

$$(1) \qquad F(x,y)=0,$$

on sait qu'elle possède p intégrales de première espèce distinctes, qu'on peut toujours mettre sous la la forme :

$$\int \frac{P_i(x,y)}{F'_y}\,dx \qquad (i=1,2\ldots p),$$

P_i désignant un polynôme en x,y de degré au plus égal à $m-3$, si m est le degré de la courbe.

Soit maintenant :

$$(2) \qquad \Phi(\xi,\eta)=0,$$

l'équation d'une transformée rationnelle de la courbe (1) ; on passe de (1) à (2) par la transformation :

$$(3) \qquad x=r(\xi\,\eta) \quad , \quad y=r_1(\xi,\eta),$$

r et r_1 étant rationnels en ξ,η. Si ϖ désigne le genre de la courbe (2), μ son degré, elle possède ϖ intégrales distinctes de première espèce, à savoir

$$\int \frac{\Pi_j(\xi.\eta)}{\Phi'_\eta}\,d\xi$$

D'autre part, quand on remplace dans l'intégrale de première espèce $J_i=\int \frac{P_i(x,y)}{F'_y}\,dy$ de la courbe (1) les variables x,y en fonction rationnelle de ξ,η d'après (3), l'intégrale devient une intégrale de première espèce j_i de la courbe (2), et on a pour

$$(4) \qquad P_i\,(x,y)\,\frac{dx}{F'_y} = \sum_{j=1}^{j=\varpi} \lambda_j\, \Pi_j\,(\xi,\eta)\,\frac{d\xi}{\Phi'_\eta}\,,$$

les λ étant des constantes.

Aux p intégrales J distinctes, correspondent p intégrales $\mathcal{J}$ distinctes, car une relation $\mu_1 \mathcal{J}_1 + \cdots + \mu_p \mathcal{J}_p = 0$ entraînerait la relation $\mu_1 J_1 + \cdots + \mu_p J_p = 0$, (les μ désignant des constantes).

Il suit de là que le genre ϖ de (2) est au moins égal à p; si la correspondance (3) entre (1) et (2) est birationnelle, p est au moins égal à ϖ, donc $p = \varpi$. Deux courbes qui se correspondent birationnellement ont donc même genre p; dans la théorie de Riemann, on les regarde comme de la même classe. Elles ont mêmes modules.

Inversement, si la transformée rationnelle (2) d'une courbe (1) dont le genre p est plus grand que l'unité est de même genre p que la courbe (1), la correspondance entre les deux courbes est birationnelle.

Ecrivons en effet l'égalité (4) relative à deux intégrales distinctes J_1 et J_2 de (1); en divisant membre à membre ces deux égalités, il vient:

$$(5) \qquad \frac{P_2\,(x,y)}{P_1\,(x,y)} = \frac{\lambda_1\,\Pi_1\,(\xi,\eta) + \cdots + \lambda_\varpi\,\Pi_\varpi\,(\xi,\eta)}{\mu_1\,\Pi_1\,(\xi,\eta) + \cdots + \mu_\varpi\,\Pi_\varpi\,(\xi,\eta)} = \frac{\Pi(\xi,\eta)}{\Pi'(\xi,\eta)}\,.$$

La transformation (3) vérifie donc l'équation (5).

D'autre part, considérons les courbes adjointes de (1) définies par l'égalité:

$$P_2 + C\,P_1 = 0$$

C désignant une constante arbitraire: si on a choisi les intégrales J_1 J_2 tout à fait quelconques, une telle adjointe rencontre la courbe (1) en $(2p-2)$ points variables avec C; si n est le nombre de points mobiles de (2) qui dans la transformation (3) correspond à un point mobile quelconque de (1), la courbe $\Pi + C\,\Pi' = 0$ rencontre

la courbe (2) en $(2p-2)n$ points variables avec C, points qui sont distincts (pour C quelconque); autrement, à un point de (2) correspondraient plusieurs points de (1). Mais on sait qu'une courbe $\Pi + C\,\Pi' = 0$, ne peut rencontrer la courbe (2), qu'en $(2\varpi-2)$ points (variables avec C) au plus ; d'où l'inégalité :

$$(2p-2)n \leq 2\varpi - 2\,, \qquad n \leq \frac{\varpi-1}{p-1}.$$

On voit que si ϖ est égal à p, n est nécessairement égal à 1, la transformation est birationnelle. Si ϖ est quelconque (plus grand que p), n est au plus égal à $\frac{\varpi-1}{p-1}$.

Théorème — Si p est supérieur à 1, la correspondance rationnelle (3) entre (1) et (2) ne saurait dépendre algébriquement, de paramètres arbitraires.

Supposons en effet que les coefficients de $r(\xi,\eta)$, $r_1(\xi,\eta)$ dans (3) dépendent algébriquement[1] d'un paramètre t, et montrons d'abord que, dans l'égalité (4), les coëfficients λ_j sont indépendants de t. Soit ξ_0, η_0 et ξ_1, η_1 deux points fixes quelconques de la surface de Riemann (2) et L un chemin qui joint ces deux points. Si nous posons $J_1 = \int_L \Pi_1 \frac{d\xi}{\Phi'_\eta}$, etc, l'expression $\lambda_1 J_1 + \cdots + \lambda_\varpi J_p$ ou bien est indépendante de t, ou bien en dépend algébriquement, et dans ce dernier cas devient infinie au moins pour une valeur t_0 de t (t_0 pouvant être infinie). Or pour une valeur fixe de t, au chemin L correspond sur la surface de Riemann (1) un chemin l dont chaque point tend vers une limite

---

[1] On peut toujours supposer que le paramètre t figure algébriquement en effet écrivons les égalités $x = r(\xi,\eta)$, $y = r_1(\xi,\eta)$ en laissant indéterminés les coefficients de r, r_1, et exprimons que quand (ξ,η) parcourt la courbe Φ, le point (x,y) parcourt F. On obtient ainsi certaines relations algébriques entre les rapports des coefficients

déterminée quand t tend vers t_0 ; soit l_0 le chemin limite de l pour $t = t_0$,[1] on doit avoir

$$\int_{l_0} P(x,y)\frac{dx}{F'_y} = \text{lim: pour } t = t_1 \text{ de } \left[\lambda_1 J_1 + \cdots + \lambda_\varpi J_\varpi\right] ;$$

dans cette égalité, le premier membre a une valeur finie, le second est infini. Les λ_j ne sauraient donc dépendre de t.

Le raisonnement s'applique au cas de $p = 1$. Mais si p est plus grand que 1, en faisant le quotient membre à membre de deux égalités (4), il vient.

$$(5) \qquad \frac{P(x,y)}{P_1(x,y)} = \frac{\lambda_1 \Pi_1(\xi,\eta) + \cdots + \lambda_\varpi \Pi_\varpi(\xi,\eta)}{\mu_1 \Pi_1(\xi,\eta) + \cdots + \mu_\varpi \Pi_\varpi(\xi,\eta)},$$

les λ, μ étant indépendants de t ; si dans (5) on remplace η en fonction de ξ et y en fonction de x, l'égalité définit une fonction algébrique $x(\xi)$ indépendante de tout paramètre. C.Q.F.D.

Corollaire. Si le genre ϖ de (1) est plus grand que l'unité, il ne saurait exister entre les deux courbes données (1) et (2) qu'un nombre fini de correspondances, et ces correspondances s'obtiennent à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques.

En effet, écrivons l'égalité (5) où les λ_j, μ_j sont des constantes indéterminées, puis remplaçons dans cette égalité ainsi que dans l'équation (1), x et y par les expressions : (μ étant le degré de Φ en η)

$$(6) \quad x = \alpha_0(\xi) + \alpha_1(\xi)\eta + \cdots + \alpha_{\mu-1}(\xi)\eta^{\mu-1}, \quad y = \beta_0(\xi) + \beta_1(\xi)\eta + \cdots + \beta_{\mu-1}(\xi)\eta^{\mu-1},$$

et exprimons que (pour ξ quelconque), les équations en η ainsi obtenues sont des conséquences de l'équation (2). Nous formons

---

inconnus, relations qui déterminent ces rapports, en fonction algébrique de i d'entre eux, ($i \geq 1$ par hypothèse).

[1] l_0 peut se réduire à un point. On suppose r et r_1 mis sous la forme (C)

de cette manière 2μ relations algébriques (A) entre les $\alpha_j(\xi)$, $\beta_j(\xi)$, et les constantes λ_j, μ_j. Je dis que pour tout système des valeurs λ_j, μ_j, ces relations (A) sont compatibles et déterminées : les λ_j, μ_j ayant reçu des valeurs fixes, donnons à ξ une valeur quelconque et soit $\eta_1 \dots \eta_\mu$ les μ valeurs correspondantes de ξ. Soit d'autre part $x_1(\xi)$, $y_1(\xi)$ un point de (1) qui vérifie l'équation (5) et désignons par $(x_2, y_2) \dots (x_\mu, y_\mu)$[1] ce que devient le point (x_1, y_1) quand on fait décrire à ξ des lacets qui remplacent successivement, η_1 par $\eta_2, \dots \eta_\mu$.

Les égalités :

$$x_s = \alpha_0 + \alpha_1 \eta_s + \dots + \alpha_{\mu-1} \eta_s^{\mu-1}, \quad y_s = \beta_0 + \beta_1 \eta_s + \dots + \beta_{\mu-1} \eta_s^{\mu-1}, \qquad (s = 1, 2 \dots \mu),$$

déterminent un système et un seul de quantités α, β, car le déterminant de Vandermonde $|\eta_s^i|$ est différent de zéro quand les η sont distincts. Ce système α, β vérifie les relations (A) et inversement toutes les solutions de (A) s'obtiennent en prenant pour (x_1, y_1) un quelconque des points de (1), qui satisfait à la relation (5). Les équations algébriques (A) en α, β, sont donc toujours compatibles et déterminées.

Les coefficients de ces relations (A) sont des polynômes $g(\xi)$ en ξ : si on suppose qu'elles sont vérifiées par un système α, β de fractions rationnelles, le degré des $g(\xi)$ fait connaître une limite supérieure ν du degré auquel ξ peut figurer dans les α_j, β_j. En remplaçant les α_j, β_j dans (A) par des fractions rationnelles en ξ de degré ν et à coefficients indéterminés, on obtient un certain nombre de relations algébriques (B) entre ces coefficients et les constantes λ_j, μ_j. Si ces relations sont incompatibles, il n'existe pas entre (1) et (2) de correspondance rationnelle ; si elles sont compatibles, elles

---

[1] Ces μ points ne sont pas nécessairement distincts

ne sont jamais indéterminées[1] car autrement il existerait entre (1) et (2) une correspondance rationnelle dépendant algébriquement au moins d'un paramètre arbitraire ; étant compatibles et déterminées, les relations algébriques (B) n'ont qu'un nombre fini de solutions, qui définissent autant de correspondances rationnelles entre (1) et (2). Le corollaire énoncé est démontré.

Septième Leçon.

Transformations birationnelles des courbes algébriques (fin). — Application aux équations du premier ordre.

Transformations birationnelles des courbes algébriques. — Appliquons les résultats obtenus dans la dernière leçon à l'étude des transformations birationnelles d'une courbe en elle-même. Ces transformations forment évidemment un groupe, car l'inverse d'une telle transformation ou la combinaison de deux telles transformations est encore une transformation birationnelle de la courbe en elle-même. Si la courbe donnée :

$$(1) \qquad F(x, y) = 0,$$

est de genre p plus grand que 1, il n'existe qu'un nombre fini de telles transformations et elles s'obtiennent algébriquement.

Si elle est de genre 1, on peut toujours supposer qu'on l'a ramenée birationnellement à la forme :

$$(1)' \qquad y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

---

[1] J'entends par là qu'on ne peut se donner arbitrairement le rapport de deux des coefficients ou de deux des constantes λ_j, μ_j

Toute transformation birationnelle de la courbe en elle-même vérifie l'équation :

$$(2) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\lambda d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

λ désignant un nombre. Si la transformation dépend d'un paramètre arbitraire t,[1] λ est indépendant de ce paramètre. La transformation ne peut donc renfermer qu'un seul paramètre arbitraire, introduit par l'intégration de l'équation (2); et en effet, si on fait $\lambda = \pm 1$, l'équation (2) entraîne, en posant $x = sn_{k^2}\, u$, $y = cn_{k^2}\, u\ dn_{k^2} u$,

$$\xi = sn_{k^2}(\pm u + C), \quad \eta = cn_{k^2}(\pm u + C)\ dn_{k^2}(\pm u + C),$$

et ces égalités définissent une correspondance birationnelle entre (x, y) et (ξ, η). Mais pour des valeurs particulières de k^2, la courbe (1)' admet d'autres transformations birationnelles. En effet, pour que l'égalité (2) définisse une correspondance birationnelle entre (x, y) et (ξ, η), il faut et il suffit que toute période d'un des deux membres soit aussi période de l'autre ; autrement dit, ω_1 et ω_2 représentant les périodes de sn_{k^2}, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\lambda\omega_1 = m\omega_1 + n\omega_2, \quad \lambda\omega_2 = m'\omega_1 + n'\omega_2, \quad (mn' - m'n = \pm 1),$$

m, n, m', n' étant des entiers positifs, négatifs ou nuls ; ces conditions ne sont vérifiées que pour $\lambda = \pm 1$, $m = \pm 1$, $n = 0$, $m' = 0$, $n' = \pm 1$, à moins que le rapport imaginaire $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ou α ne satisfasse à l'égalité :

$$\alpha^2 m' + \alpha(n' - m) - n = 0,$$

d'où on déduit les solutions :

$$m + n' = 0, \quad \alpha = \frac{m+i}{m'}, \quad \lambda = \pm i, \quad m'n + m^2 + 1 = 0,$$

$$m + n' = 1, \quad \alpha = \frac{2m - 1 \pm i\sqrt{2}}{2m'}, \quad \lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{2}, \quad m^2 + m'n + 1 - m = 0,$$

$$m + n' = -1, \quad \alpha = \frac{2m + 1 \pm i\sqrt{2}}{2m'}, \quad \lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{2}, \quad m^2 + m'n + 1 + m = 0.$$

---

[1] On peut toujours supposer que ce paramètre figure algébriquement (voir page 94).

On voit aisément que les premières valeurs exceptionnelles $\alpha = \frac{m+i}{m'}$, congruent à $\alpha = i$, et les dernières à $\alpha = 1 + i\sqrt{2}$, valeurs auxquelles correspondent des valeurs connues de k^2. Mais ce qui nous importe, c'est de savoir que toutes les transformations birationnelles d'une courbe (1)' en elle-même sont données par les formules:

$$x = sn_{k^2}\, u, \quad y = cn_{k^2}\, u \; dn_{k^2}\, u, \qquad \xi = sn_{k^2}(\varepsilon u + C), \; \eta = cn_{k^2}(\varepsilon u + C)\, dn_{k^2}(\varepsilon u + C),$$

ε étant égal à ± 1 sauf pour des valeurs particulières de k^2; pour ces valeurs exceptionnelles, ε est égal à $e^{\frac{2i\pi}{4}}$ ou à $e^{\frac{2i\pi}{6}}$.

Enfin, si le genre de la courbe (1) est nul, on peut exprimer x et y en fonction rationnelle d'un paramètre u de façon qu'à tout point (x, y) corresponde une seule valeur de u. Si on définit de même, à l'aide d'un paramètre rationnel v, le point transformé (ξ, η), à toute valeur de u correspond une seule valeur de v et réciproquement. La relation algébrique entre u et v est donc homographique, $u = \frac{Cv + C'}{C_1 v + C'_1}$, et inversement une telle relation définit une transformation birationnelle de la courbe (1) en elle-même. Une courbe de genre zéro admet donc une infinité de transformations birationnelles en elle-même dépendant de trois paramètres arbitraires.

Si maintenant nous considérons les transformations birationnelles d'une courbe (1) en une autre courbe (3), il est clair que quand on connaît une seule de ces transformations, toutes les autres s'en déduisent en effectuant sur une des courbes toutes les transformations biuniformes qu'elle comporte. Trois cas sont d'ailleurs à distinguer suivant que le genre commun p des deux courbes est nul, égal à 1 ou supérieur à 1. Pour $p = 0$, on peut toujours établir entre les deux courbes une correspondance birationnelle dépendant de trois paramètres arbitraires, en exprimant rationnellement les coordonnées de chaque courbe à l'aide d'un paramètre unique u et v et en liant homographiquement

les deux paramètres. Pour $p > 0$, on ne peut plus passer en général birationnellement d'une courbe à une autre : s'il existe une correspondance birationnelle entre les deux courbes données, elle dépend d'un paramètre arbitraire pour $p = 1$; pour $p > 1$, il existe autant de correspondances birationnelles distinctes entre (1) et (3) qu'une de ces deux courbes admet de transformations birationnelles en elles-mêmes. Toutes ces transformations s'obtiennent d'ailleurs algébriquement : la chose est déjà démontrée pour $p > 1$ (voir page 97); pour $p = 1$, il suffit de ramener les deux courbes à la forme canonique : $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$. Si elles sont transformables birationnellement l'une dans l'autre, elles sont réductibles à la même forme canonique, et la réduction s'opère algébriquement. On obtient ensuite algébriquement toutes les transformations birationnelles en elle-même de la courbe canonique.

J'ajoute encore un mot au sujet de la correspondance simplement rationnelle entre deux courbes (1) et (3), dans le cas (que nous avons laissé de côté) où le genre p de (1) est inférieur à 2. Si ϖ est le genre de la transformée rationnelle (3) de la courbe (1), on a toujours $\varpi \geq p$. Si p est nul, on peut toujours établir une correspondance rationnelle entre les courbes :

$$(1) \quad F(x,y) = 0, \qquad (3) \quad \Phi(\xi, \eta) = 0,$$

en exprimant x, y en fonction d'un paramètre rationnel u, et en posant $u = R(\xi, \eta)$, R désignant une fonction rationnelle arbitraire du point analytique (ξ, η).

Si p est égal à 1, il n'existe de correspondance rationnelle entre (1) et (3) qu'autant qu'une intégrale abélienne de première espèce de (3) n'a comme périodes que des périodes de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ attachée à la courbe (1) (qu'on suppose ramenée à la forme canonique). Quand il existe une

dont l'intégrale est $u = sn\left[C + \int_{x_0}^{x} A(x)\,dx\right]$.

Si p est égal à zéro, l'équation (1) se ramène algébriquement à une équation de Ricatti (voir pages 65-68).

Il n'est pas sans intérêt de retrouver les résultats concernant les cas où p est nul ou égal à 1, en se servant des propriétés des transformations birationnelles des courbes algébriques. Si p est égal à l'unité, on sait ramener birationnellement la courbe $F(y'_0, y_0, x_0)$ à la forme :

$$C^2 = (1-c^2)(1-k^2c^2), \tag{3}$$

la transformation birationnelle de (y'_0, y_0) en (C, c) étant choisie une fois pour toutes [1]. On peut donc écrire l'intégrale générale sous la forme :

$$C = R(y', y, x), \qquad c = r(y', y, x); \tag{4}$$

r et R sont des polynômes en y' de degré $(m-1)$, dont les coefficients sont rationnels en y et dépendent de x ; de plus r et R vérifient la relation :

$$R^2 \equiv (1-r^2)(1-k^2r^2);$$

Enfin, à tout point (C, c) de (3) correspond un seul point (y', y) de (1) ; les formules (4) définissent donc une réduction de (1) à la forme canonique (3) et il est dès lors très facile de calculer leur degré en y. Toutes les autres formes de l'intégrale analogues à (4), s'obtiennent en effectuant sur (C, c), une des transformations birationnelles de la courbe (3) en elle-même : autrement dit, si on pose $r = sn_{k^2}\tau$, toutes les constantes intégrales analogues à $c = r$ s'obtiennent en remplaçant τ par $\varepsilon\tau + h$; h désigne une quantité

---

[1] Cette transformation dépend d'un paramètre arbitraire, qu'on pourrait prendre fonction de x. Nous choisissons une particulière de ces transformations.

fixe quelconque, ε est égal à ± 1 (ou, pour certaines valeurs de k^2, soit à $e^{\frac{2i\pi}{4}}$, soit à $e^{\frac{2i\pi}{6}}$). Ce qui nous importe, c'est que $\frac{\partial\tau}{\partial x}$ est donné algébriquement. D'après cela, écrivons les égalités (4)[1] et exprimons qu'elles définissent à la fois l'intégrale de (1) et une transformation birationnelle de (1) en (3) : nous formons ainsi un certain nombre de relations algébriques entre les coëfficients $\alpha_i(x)$ de R et r, dont un est pris égal à l'unité, et leurs dérivées, relations où figurent algébriquement les coefficients de (1).

Ces relations, si elles sont compatibles, définissent un système de fonctions $\alpha_i(x)$ dépendant d'une seule constante arbitraire. Si on donne à y une valeur numérique, et si on remplace, dans $r(y', \bar{y}, x)$, y' en fonction de $x, \bar{y}$ en tenant compte de $F=0$, la fonction $u(x)$ ainsi obtenue dépend d'une équation du premier ordre, et cette équation une fois intégrée, les coefficients $\alpha_i(x)$ sont donnés algébriquement. Comme d'autre part la fonction $u(x)$ est donnée par une égalité de la forme $u = sn_{k^2}(\varepsilon\tau + h)$, l'équation du premier ordre qu'elle vérifie peut toujours s'écrire :

$$(5) \qquad \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = A(x)\,dx,$$

A étant connu algébriquement en fonction des coefficients de (1). L'équation (1) est ramenée algébriquement à l'équation (5). C.Q.F.D.

Si p est nul, on peut mettre l'intégrale sous la forme :

$$(6) \qquad c = r(y', y, x),$$

r étant rationnel en y', y et tel qu'inversement le point (y', y) soit donné rationnellement (pour x quelconque) en fonction de c.

---

[1] Nous écrivons ces égalités en laissant indéterminés les coëfficients $\alpha_i(x)$ des fractions rationnelles R, r en y', y de degré connu.

Soit μ le degré (en y'; y) de la courbe $F(y',y,x)=0$, pour une valeur quelconque de x, et soit P, Q deux polynômes adjoints, de degré $\mu-2$, attachés à la courbe $F=0$, et tels que les courbes $P=0$, $Q=0$, coupent $F=0$ en $(m-3)$ points M_i arbitrairement choisis sur la courbe $F=0$: tous les polynômes adjoints P_1 de degré $(m-2)$ qui s'annulent aux mêmes points M_i, sont de la forme : $P_1=\alpha(x)P+b(x)Q$. Si je pose $t=\frac{P}{Q}$, y et y' sont rationnels en t, et r est de la forme : $\frac{a(x)P+b(x)Q}{a_1(x)P+b_1(x)Q}\equiv\frac{P_1}{Q_1}$; soit $c_1=\frac{P_2}{Q_2}$ une autre intégrale première de (1) de la même forme ; on a identiquement (quels que soient x, y, y') :

$$\frac{P_2}{Q_2}=\frac{\alpha(x)P_1+\beta(x)Q_1}{\alpha_1(x)P_1+\beta_1(x)Q_1}, \quad \text{ou} \quad c_1=\frac{\alpha c+\beta}{\alpha_1 c+\beta_1},$$

ce qui montre que $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ sont des constantes. D'après cela exprimons que l'équation :

$$(7) \qquad P(y',y,x)+\frac{b(x)-c\,b_1(x)}{a(x)-c\,a_1(x)}\,Q(y',y,x)=0$$

définit l'intégrale de (1) : toutes les formes (7) possibles se déduisent d'une d'entre elles, en changeant homographiquement la constante c. L'intégrale de (1) se laisse donc définir par le système :

$$P(y',y,x)+u\,Q(y'y,x)=0, \quad \frac{du}{dx}=Au^2+Bu+C,$$

qui est unique (une fois choisis les polynômes P, Q) : A, B, C se calculent algébriquement. L'équation (1) est ramenée algébriquement à une équation de Riccati.

En définitive, quand une équation (1) a ses points critiques fixes, elle s'intègre algébriquement si p est plus grand que 1 ; elle se ramène algébriquement à l'équation

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=A(x)\,dx, \qquad (k^2 \text{ constant}),$$

si p est égal à l'unité ; enfin elle se ramène algébriquement à une équation de Riccati, si p est nul.

L'étude des équations (1) à points critiques fixes est ainsi achevée. J'ajouterai quelques mots sur l'historique de la question : Briot et Bouquet sont les premiers géomètres qui aient étudié d'une manière générale les équations (1) où x ne figure pas explicitement, dont l'intégrale est uniforme. C'est ensuite M. Fuchs

qui, dans un mémoire des Sitzungsberichte der Academie zu Berlin, a envisagé à ce point de vue les équations (1) où x figure : M. Fuchs a formé les conditions pour qu'une équation (1) qu'il envisageait ses points critiques algébriques fixes, et il a admis (comme Briot et Bouquet d'ailleurs) que ces conditions étaient suffisantes pour que tous les points critiques fussent fixes. La conclusion se trouve exacte pour le premier ordre : il n'en va pas de même des résultats que M. Fuchs étend aux équations d'ordre supérieur.

Les théorèmes de M. Fuchs ne fournissaient pas d'indications sur l'intégration de la classe d'équations considérées, (sauf dans le cas où le genre p est nul). C'est M. Poincaré (Acta Mathematica, 1885) qui a obtenu les beaux résultats que je viens d'exposer. Toutefois la démonstration de M. Poincaré prêtait à une objection : elle établissait que la correspondance entre les deux courbes :

$$F(y', y, \bar{x}) = 0, \qquad F(y'_0, y_0, \bar{x}_0) = 0,$$

est uniforme et non qu'elle est birationnelle. Il est facile d'ailleurs de voir que toute transformation biuniforme d'une courbe algébrique en une autre est birationnelle, quand la transformation ne présente que des points singuliers isolés. Mais l'intégrale $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$, considérée comme fonction de y_0, pouvait à priori admettre des lignes singulières [1]. Cette objection s'évanouit dès qu'on a démontré que la fonction $\varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$, ne présente dans tout le champ des y_0 que des singularités algébriques.

---

[1] Cette circonstance se présente pour les équations d'ordre supérieur.

Équations différentielles dont l'intégrale acquiert n valeurs autour des points critiques. Étant donnée une équation (1), on sait toujours reconnaître algébriquement si son intégrale ne prend qu'un nombre donné n de déterminations autour des points critiques mobiles, et s'il en est ainsi, l'équation se ramène algébriquement (et à l'aide d'opérations linéaires), à une équation dont les points critiques sont fixes, soit :

$$(2) \qquad G\,(u', u, x) = 0$$

G étant algébrique en u', u. Le genre de G est d'ailleurs le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales $\sigma(c, c_1) = 0$, qui lui correspond birationnellement. Si donc ϖ est plus grand que 1, l'équation $G = 0$ s'intègre algébriquement ; si $\varpi = 1$, elle se ramène à une quadrature de la forme (5), [page 108] ; si $\varpi = 0$, elle se ramène à une équation de Riccati.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème : « On peut toujours reconnaître algébriquement si l'intégrale d'une équation donnée

$$(1) \qquad F\,(y', y, x) = 0,$$

« prend un nombre donné n de déterminations autour des points critiques « mobiles, et dans ce cas l'équation s'intègre algébriquement, ou par une « quadrature de la forme :

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = A(x)\,dx,$$

« ou se ramène algébriquement à une équation de Riccati. »

Huitième Leçon.

Équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale n'acquiert autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de déterminations.

De la recherche de l'intégrale quand le nombre de déterminations n est donné. —— Étant donnée une équation :

(1). $$F(y', y, x) = 0,$$

algébrique en y', y, nous savons maintenant reconnaître si son intégrale ne prend qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles et nous savons dans ce cas l'intégrer algébriquement ou par quadratures ou la ramener à une équation de Riccati. Mais les considérations suivantes, vont nous conduire à une marche de calcul bien préférable.

Soit :

(2) $$\sigma(c, c_1) = 0,$$

la relation entre les constantes intégrales :

(3) $$c = r(y', y, x) \equiv \overline{r}(y, x), \qquad c_1 = r_1(y', y, x) \equiv \overline{r}_1(y, x) ;$$

soit de plus $\int \frac{Q_i(c, c_1)}{\sigma'_{c_1}} dc$ une des intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe (2), et $\int \frac{P_j(y', y, \overline{x})}{F'_{y'}} dy$ une des intégrales de première espèce attachée à la courbe (1) [où x a une valeur fixe $\overline{x}$]. On a, d'après (3), la relation :

$$\frac{Q_i(c, c_1)}{\sigma'_{c_1}} \quad \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} = \frac{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p}{F'_{y'}},$$

les λ étant certaines fonctions de x. D'autre part, si $y' = f(y, x)$

est la fonction définie par (1), l'équation:

$$(1)' \qquad dy - f(y,x)\,dx = 0,$$

admet comme multiplicateur $\frac{\partial F}{\partial y}$; il suit de là que $\frac{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p}{F'_{y'}}$ est aussi un multiplicateur de (1)'. Formons donc, d'après cela, l'équation aux multiplicateurs de (1)'.

$$(4) \qquad \frac{\partial M}{\partial x} + f\,\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\,M = 0,$$

et remplaçons M par une expression de la forme:

$$M = \frac{\lambda_1(x)P_1(y',y,x) + \cdots + \lambda_p(x)P_p(y',y,x)}{F'_{y'}}.$$

où $y' \equiv f(y,x)$.

Pour que l'équation (4) soit identiquement vérifiée, il faut et il suffit que les $\lambda(x)$ vérifient un certain système Σ de relations linéaires et homogènes par rapport aux λ_j, $\frac{d\lambda_j}{dx}$. Si ϖ est le genre de la relation (2), ce système est sûrement compatible et admet au moins ϖ solutions $(\lambda_1, \ldots \lambda_p)$ linéairement indépendantes.

Inversement, étant donnée une équation (1) quelconque, si on forme le système Σ, je dis que ce système (quand il est compatible) ne peut admettre qu'un nombre fini q de solutions linéairement distinctes; de plus, quand q est plus grand que 1, l'intégrale de (1) ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, et le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est précisément égal à q.

Tout d'abord, si le système Σ admet au moins deux solutions, soit $(\lambda_1, \ldots \lambda_p)$ et $(\mu_1, \ldots \mu_p)$, linéairement distinctes, l'intégrale de (1) est de l'espèce indiquée; en effet, le quotient de deux multiplicateurs, égalé à une constante, définit l'intégrale générale; or l'égalité:

$$\frac{\lambda_1 P_1(y',y,x) + \cdots + \lambda_p P_p(y',y,x)}{\mu_1 P_1(y',y,x) + \cdots + \mu_p P_p(y',y,x)} = C$$

définit une fonction de x qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour des points critiques mobiles. Ceci posé, soit toujours: $\sigma(c, c_1) = 0$ la relation entre les constantes intégrales et soit ϖ le genre de cette relation; on a encore:

$$(3) \qquad c = r(y', y, x) = \bar{r}(y, x), \qquad c_1 = r_1(y' y, x) = \bar{r}_1(y, x),$$

et $\frac{\partial \bar{r}}{\partial y}$ est un multiplicateur de (1)'. Le quotient:

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial y}\right)} \quad \frac{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p}{F'_{y'}}$$

est par suite une constante intégrale et s'exprime rationnellement en fonction de c, c_1; on peut donc écrire, en laissant à x une valeur fixe $\bar{x}$:

$$R(c, c_1)\, dc = \frac{\lambda_1 P_1 + \cdots\cdots + \lambda_p P_p}{F'_{y'}}\, dy,$$

et comme le second membre définit une intégrale abélienne de première espèce attachée à (1); le premier membre définit une intégrale de première espèce attachée à la courbe $\sigma = 0$. Tout multiplicateur de la forme: $M = \frac{\lambda_1 P_1 \cdots \lambda_p P_p}{F'_{y'}}$ est donc égal à l'expression $\frac{Q(c, c_1)}{\sigma'_{c_1}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y}$, où on remplace c et c_1 par r et r_1, Q définissant une quelconque des intégrales de première espèce attachées à (2), $\int \frac{Q(c, c_1)}{\sigma'_{c_1}} dc$. Le nombre des multiplicateurs M de la forme en question (linéairement distincts) est donc exactement égal à ϖ. C. Q. F. D.

D'après cela, proposons-nous de reconnaître si l'intégrale d'une équation (1) donnée ne prend qu'un nombre fini (non donné) de valeurs autour des points critiques mobiles, mais en admettant que le genre de la relation entre les constantes intégrales doive être plus grand que 1. Tout d'abord, cela ne peut avoir lieu que si le genre p de (1) est plus grand que 1. On remplace alors dans l'équation aux multiplicateurs (4), M par $\frac{\lambda_1 P_1 + \cdots \lambda_p P_p}{F'_{y}}$, et on vérifie si les relations ainsi

formées entre les $\lambda_j(x)$, $\frac{d\lambda_j}{dx}$, sont compatibles et admettent plus d'une solution linéairement distincte, ce qui n'exige que des opérations algébriques linéaires. Quand il en est ainsi, soit ϖ le nombre de ces solutions : l'intégrale est bien de l'espèce indiquée, et la relation entre les constantes intégrales est de genre ϖ[1]. Les solutions : $\lambda_1(x), \dots \lambda_p(x)$ dépendent d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre ϖ ; mais nous savons que cette équation s'intègre algébriquement, car $c = r(y', y, x)$ est une fonction algébrique des coefficients de (1), par suite les $\lambda_j(x)$. Pour obtenir algébriquement l'intégrale de (1), un moyen commode consiste à s'appuyer sur ce théorème : Une courbe algébrique de genre ϖ peut toujours être ramenée birationnellement soit à une courbe de degré $(\varpi+1)$ soit à une courbe hyperelliptique $y = \sqrt{[x-a_1]\dots[x-a_{2(\varpi+1)}]}$. On peut donc toujours supposer que la relation entre les constantes intégrales est, soit de degré $(\varpi+1)$, soit de la forme $c_1^2 = [c-a_1]\dots\dots[c-a_{2(\varpi+1)}]$; on écrit l'équation entre c, c_1 sous l'une de ces deux formes, en laissant indéterminés ses coefficients a (qui sont des constantes), et on calcule toutes les transformations rationnelles de cette courbe $\sigma(c, c_1) = 0$ en la courbe (1). Suivant que la courbe $\sigma = 0$ est ou non hyperelliptique, ces transformations vérifient soit une relation :

$$(5) \qquad c = \frac{\lambda_1(\bar{x})\, P_1(y', y, \bar{x}) + \dots + \lambda_p(\bar{x})\, P_p(y', y, \bar{x})}{\mu_1(\bar{x})\, P_1(y', y, \bar{x}) + \dots + \mu_p(\bar{x})\, P_p(y', y, \bar{x})},$$

soit une relation :

$$(6) \qquad \frac{Q_1(c, c_1)}{Q_2(c, c_1)} = \frac{\lambda_1(\bar{x})\, P_1(y', y, \bar{x}) + \dots + \lambda_p(\bar{x})\, P_p(y', y, \bar{x})}{\mu_1(\bar{x})\, P_1(y', y, \bar{x}) + \dots + \mu_p(\bar{x})\, P_p(y', y, \bar{x})},$$

---

[1] On sait que le nombre n des valeurs de l'intégrale qui se permutent autour des points critiques mobiles est moindre que $\frac{p-1}{\varpi-1}$ (si ϖ est plus grand que 1). La question posée peut donc se résoudre algébriquement d'après ce qu'on a vu à la fin de la dernière leçon, puisqu'on connaît une limite supérieure de n,

où les Q_1, Q_2 sont de degré $\varpi - 2$ en c, c_1. On sait reconnaître algébriquement (voir page 97) si ces relations définissent une correspondance rationnelle entre $\sigma = 0$ et la courbe (1). Les valeurs des coefficients a de σ pour lesquels cette condition est remplie satisfont à certaines relations algébriques (qui peuvent se décomposer en plusieurs groupes distincts): nous considérons seulement les solutions pour lesquelles le genre de $\sigma = 0$ est égal à ϖ. Pour chaque solution de cette espèce, les transformations rationnelles de $\sigma = 0$ en (1) sont en nombre fini et s'obtiennent algébriquement. En définitive nous formons de cette manière algébriquement certaines transformations rationnelles $c = r(y', y, x)$, qui peuvent dépendre de plusieurs constantes arbitraires α; si on exprime qu'une de ces transformations définit l'intégrale, on obtient de nouvelles relations algébriques entre ces constantes α, relations qui sont sûrement compatibles. L'équation (1) est ainsi intégrée algébriquement.

Cas où $\varpi = 1$ — Plaçons-nous maintenant dans le cas où il existe un seul multiplicateur de la forme :

$$M = \frac{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_\mu P_\mu}{F'_{y'}} = \frac{P}{F'_{y'}} \;;$$

les coëfficients λ sont définis à un facteur constant près, et dépendent par suite d'une quadrature, soit la quadrature:

$$\frac{\frac{d\lambda_1}{dx}}{\lambda_1} = A\,(x).$$

Cette quadrature une fois effectuée, l'intégrale de (1) est donnée par la quadrature de différentielle totale:

$$(7) \qquad C = \int \frac{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_\mu P_\mu}{F'_{y'}} \left[dy - y'\,dx \right],$$

---

mais la marche indiquée ici est préférable.

ou $y' = f(y, x)$. Les périodes de l'intégrale abélienne $J = \int \frac{P(y', y, \bar{x})}{F'_{y'}} dy$ sont nécessairement indépendantes de x, car si on fait varier x d'une façon quelconque dans son plan sans franchir les coupures, et y arbitrairement (en suivant une détermination correspondante de y'), chaque fois que x, y, y' reprennent la même valeur, le second membre de (7) reprend la même valeur augmentée d'une constante absolue, et cela est vrai en particulier quand on laisse à x une valeur fixe $\bar{x}$.

Mais les conditions précédentes ne sont pas suffisantes pour que l'intégrale de (1) n'acquière qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles. Il faut, en outre, et il suffit que l'intégrale abélienne $J = \int \frac{P(y', y, \bar{x})}{F'_{y'}} dy$ n'ait que deux périodes. Si, en effet, l'intégrale est de l'espèce indiquée, le raisonnement de la page 114 montre que le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est nécessairement égal à l'unité, et si on met cette relation sous la forme:

$$c_1^2 = (1-c^2)(1-k^2c^2),$$

on a (pour $\bar{x}$ quelconque et pour une valeur convenable du facteur constant dont dépend P):

$$(8) \qquad \int \frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}} = \int \frac{P(y', y, \bar{x})}{F'_{y'}} dy,$$

avec:

$$c = r(y', y, \bar{x}), \quad c_1 = r_1(y', y, \bar{x}).$$

Comme toute période du second membre de (8) est une période du premier, l'intégrale J ne peut avoir que deux périodes. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car si elle est remplie, soit ω_1, ω les deux périodes de J (qui sont des constantes absolues); on peut toujours choisir k^2 de façon que le rapport des périodes du premier membre de (8) soit égal à $\frac{\omega_1}{\omega_2}$; et disposer

ensuite du facteur constant dont dépend P pour que les périodes des deux membres coïncident ; l'égalité :

(9) $$(9)\quad \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}} = \int_{\alpha,\beta}^{x,y} \frac{P(y',y,x)}{F'_y}\left[dy - y'dx\right]$$

où $y' \equiv f(y,x)$, définit une relation algébrique entre y et c (dont les coefficients dépendent de x), et par suite l'intégrale $y(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles.

Il est un cas où la condition en question est toujours remplie, c'est celui où le genre p de (1) est égal à l'unité. Quand on peut déterminer la fonction $\lambda(x)$ de façon que l'expression : $\frac{\lambda(x)P(y',y,x)}{F'_{y'}}$ soit un multiplicateur M, l'intégrale de (1) n'admet donc qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles. Je dis que ce nombre est égal à l'unité.

En effet, nous pouvons établir une correspondance birationnelle :

(10) $$y = \varphi(t, T, \bar{x}),\quad y' = \psi(t, T, \bar{x}), \text{ et } t = \Phi(y', y, \bar{x}),\ T = \Psi(y', y, \bar{x}),$$

entre la courbe (1) et une certaine courbe :

(11) $$T^2 = (1-t^2)\left[1 - u^2(\bar{x})t^2\right].$$

La transformation (10) change l'intégrale abélienne $J(y', y, \bar{x})$ en une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe (11), soit $\mu(x)\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left[1-u^2(\bar{x})t^2\right]}}$, les périodes de J étant des constantes ω_1, ω_2, leur rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est indépendant de x, par suite u^2, par suite μ. D'autre part, la fonction $t(x)$ vérifie une équation différentielle qui se déduit aussitôt de (1) et qui peut s'écrire :

$$\frac{dt}{dx} = A(t,x) + TB(t,x),$$

et dont l'intégrale s'obtient en remplaçant y en fonction de t, x dans l'égalité :

$$\int_0^c \frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}} = \int_{\alpha,\beta}^{x,y} \frac{P}{F'_{y'}}(dy - y'dx) = \int_{\alpha,\beta}^{t,T} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-u^2t^2)}}\ \frac{t'dx}{\sqrt{(1-u^2)(1-u^2t^2)}};$$

et cette dernière expression ne peut être différentielle totale exacte que si $\frac{t'}{\sqrt{(1-t^2)(1-u^2t^2)}}$ est une simple fonction de x, $N(x)$, autrement dit si l'équation en t est de la forme :

$$\frac{dt}{dx} = N(x)\sqrt{(1-t^2)(1-u^2t^2)},$$

équation à points critiques fixes : l'équation (1) a donc elle-même ses points critiques fixes. C. Q. F. D.

Nous savons déjà que si une équation (1) a ses points critiques fixes, elle est de même genre p que la relation entre les constantes intégrales. La réciproque est vraie pour $p>0$: si une équation (1), de genre p plus grand que zéro, a comme intégrale une fonction algébrique de la constante telle que le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales soit égal à p, les points critiques de l'intégrale sont fixes.

L'égalité (9) permet, quel que soit le genre de (1), de reconnaître si l'intégrale de l'équation (1) ne prend qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles. En effet, nous savons que, dans le cas qui nous occupe, l'intégrale peut recevoir la forme :

$$(12)\qquad y^n + \rho_{n-1}(x,c,c_1)\,y^{n-1} + \cdots + \rho_1(x,c,c_1)\,y + \rho_0(x,c,c_1) = 0,$$

c et c_1 étant deux constantes qui sont liées par la relation :

$$(13)\qquad c_1^2 = (1-c^2)(1-k^2c^2)$$

et qui s'expriment rationnellement en y', y :

$$c = r(y', y, x), \qquad c_1 = r_1(y', y, x).$$

Nous savons aussi que toutes les formes (12) de l'intégrale s'obtiennent en posant $c = sn_{k^2}\gamma$ et en remplaçant γ par $\varepsilon\gamma + h$, h désignant une constante arbitraire, et ε étant égal à ± 1 (ou à $e^{\frac{2i\pi}{4}}$ ou à $e^{\frac{2i\pi}{6}}$ pour certaines valeurs de k^2). De l'équation (12), on déduit aussitôt une équation

$$(14)\qquad G(x, y, c) = 0.$$

de degré m en c et de degré $2n$ en y. Comment s'obtiennent toutes les formes (14 de l'intégrale générale? Il est facile de s'en rendre compte ainsi:

Soit $G_1(x, y, C) = 0$ une forme de l'intégrale où C figure au degré m et y au degré $\nu \leq 2n$. Tout d'abord, C est une constante intégrale, car aux m racines $C_1, C_2, \ldots C_m$ de $G_1 = 0$, correspondent m valeurs distinctes de y', $y' = -\frac{\frac{\partial G_1}{\partial x}}{\frac{\partial G_1}{\partial y}}$; on a donc $C = R(y', y, x)$ Soit C_1 une seconde constante intégrale, qui, adjointe à C, constitue un couple fondamental de constantes intégrales, et soit μ le degré en C_1 de la relation entre C, C_1. La relation $G_1 = 0$ entre y et C est le degré m en C et de degré μ n y; comme μ n'est pas égal à 1, μ est égal à 2, ν est égal à $2n$, et l'équation $G_1 = 0$ équivaut à une relation de la forme:

$$y^n + \rho_{n-1}(x, C)\, y^{n-1} + \cdots + \rho_0(x, C) + \sqrt{Q(C)}\left[r_{n-1}(x, C)\, y^{n-1} + \cdots + r_0(x, C)\right],$$

où $\sqrt{Q(C)}$ est encore une constante intégrale qu'on peut prendre comme constante C_1: en effet, $\sqrt{Q(C)}$ est rationnel en y, C, et d'autre part les coefficients de $y^{n-1}, y^{n-2} \ldots$ dans la relation précédente sont rationnels en C, C_1. La courbe $C_1^2 = Q(C)$ est donc une transformée birationnelle de la courbe (13). Toutes les formes telles que (14) de l'intégrale s'obtiennent donc en introduisant une courbe elliptique quelconque de module k^2, soit $C_1'^2 = Q(C)$ et en effectuant sur une quelconque des transformations birationnelles qui change en cette courbe la courbe (13).

Ceci posé, admettons que l'équation (1) possède un seul multiplicateur M de la forme $\frac{P}{F''_{y'^2}}$ et cherchons à reconnaître si l'intégrale de (1) n'acquiert autour des points critiques mobiles, qu'un nombre donné n de déterminations

Ecrivons pour cela, le polynôme le plus général G de degré m en c et de degré $2n$ en y dont les coefficients a

sont des fonctions inconnues de x, et exprimons que la fonction $c(y;x)$, définie par l'égalité $G(x,y,c)=0$, vérifie la condition :

$$\frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}} = \frac{\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_p F_p}{F'_{y'}} \left[dy - y'\,dx \right]$$

[où $y' \equiv f(y,x)$]. Si les relations ainsi obtenues entre les $\lambda(x)$, $\alpha(x)$ $\frac{d\alpha}{dx}$ et la constante k^2, sont compatibles (ce qu'on reconnaît algébriquement), la fonction $y(x)$ prend au plus n valeurs autour des points critiques (autrement ϖ serait nul). Si n est le nombre exact de ces valeurs, la relation $G=0$ équivaut à la suivante :

$$0 = y^n + \rho_{n-1}(x,c)\,y^{n-1} + \cdots + \rho_0(x,c) + \sqrt{Q(c)}\left[r_{n-1}(x,c)\,y^{n-1} + \cdots + r_0(x,c) \right],$$

et $\frac{dc}{\sqrt{Q(c)}}$ est identique (à un facteur constant près) avec $\frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}}$, il est donc loisible de supposer que $Q(c)$ coïncide avec $(1-c^2)(1-k^2c^2)$; on voit que toutes les formes $G=0$ de l'intégrale se déduisent d'une d'entre elles en effectuant sur c, c_1 une quelconque des transformations birationnelles qui conservent la courbe :

$$c_1^2 = (1-c^2)(1-k^2c^2),$$

ou encore, si on veut, en posant $c = \operatorname{sn} \gamma$ et en changeant γ en $\varepsilon\gamma + h$, [$\varepsilon = \pm 1$, ou $e^{\frac{2i\pi}{4}}$, ou $e^{\frac{2i\pi}{6}}$].

D'après cela, une fois calculée algébriquement la constante numérique k^2, si on pose $c(y,x) = \operatorname{sn}_{k^2} \gamma$, la fonction γ est déterminée à une constante d'addition près ; autrement dit, la différentielle totale $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\,dy\right)$ est connue algébriquement. Ses diverses valeurs se déduisent d'une d'entre elles en la multipliant par ε, ε étant égal à ± 1 ou (pour certaines valeurs particulières de k^2) à $e^{\frac{2i\pi}{4}}$ ou à $e^{\frac{2i\pi}{6}}$. On voit que les rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \cdots : \lambda_p$ et que λ_i^{12} sont dans tous les cas, des fonctions algébriques rationnelles des coefficients de (1).

D'autre part, la fonction $\gamma(y,x)$ étant déterminée à une constante d'addition près, les coefficients $\alpha(x)$ de $G=0$,

s'expriment algébriquement en fonction d'un d'entre eux, qui vérifie une équation du premier ordre : si on veut encore, il suffit de donner à y une valeur numérique quelconque $\bar{y}$ et de calculer la fonction $c(\bar{y}, x)$ pour que les coefficients $\alpha(x)$ soient connus algébriquement.[1] Or si on pose $c(y_0, x) = sn_{k^2}\gamma$, la fonction $\gamma(y_0, x)$ est donnée par la quadrature :

$$\gamma(y_0, x) = \int \frac{-[\lambda_1 P_1(y', y_0, x) + \cdots + \lambda_p P_p(y', y_0, x)]\, y' dx}{F'_{y'}(y', y_0, x)},$$

$[$où $y' \equiv f(y_0, x)]$, et $c(y_0, x) = sn_{k^2}\gamma(y_0, x)$. – On voit que l'équation (1) est ramenée algébriquement à une équation de la forme :

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = A(x)\, dx.$$

Lorsqu'on ne se donne pas n, toute la difficulté revient à reconnaître si une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe (1), soit $\int \frac{P(y', y, x)}{F'_{y'}} dy$, n'a que deux périodes. Si on pose (x ayant reçu une valeur fixe quelconque),

$$v = \int \frac{P(y', y)\, dy}{F'_{y'}} \equiv J(y),$$

$\frac{dv}{dy}$ et y sont liés par une relation algébrique, $S\left(\frac{dy}{dv}, v\right) = 0$, et le problème revient encore à reconnaître si l'intégrale $y(v)$ de cette équation est une fonction à un nombre fini de valeurs. C'est là un point sur lequel nous reviendrons dans la leçon prochaine.

Cas où ϖ est nul. – Lorsqu'il n'existe aucun multiplicateur M de la forme $\frac{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p}{F'_{y'}}$, le genre ϖ de la relation

---

[1] Si les relations entre les λ_i, α_j (supposées compatibles) ne déterminaient pas les α_j de cette manière, c'est que l'intégrale prendrait seulement n' valeurs autour des points critiques mobiles ($n' < n$), et ce qui précède s'appliquerait à n'

entre les constantes intégrales est nécessairement nul, et si l'intégrale prend exactement n valeurs autour des points critiques mobiles, elle peut s'écrire:

(15) $$y^n + R_{n-1}(x,C)\,y^{n-1} + \cdots\cdots + R_1(x,C)\,y + R_0(x,C) = 0,$$

les R_i étant rationnels en C, et C exprimant rationnellement en $y'y$:

$$C = r\,(y', y, x).$$

Toutes les formes analogues à (15) s'obtiennent en remplaçant, dans (15), C par $\frac{\alpha C + \beta}{\gamma C + \delta}$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$, étant des constantes numériques); inversement, d'ailleurs, si l'intégrale peut recevoir cette forme, le genre ϖ est nul, car les R_i s'expriment rationnellement à l'aide d'une seule constante intégrale.

Si nous posons $\gamma(x) = \frac{g(x)\,C + h(x)}{g_1(x)\,C + h_1(x)}$, l'intégrale $y(x)$, s'écrit encore:

(15)' $$y^n + \rho_{n-1}(x,\gamma)\,y^{n-1} + \cdots\cdots + \rho_1(x,\gamma)\,y + \rho_0(x,\gamma) = 0, \quad \text{avec:}$$

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

les ρ étant des fractions rationnelles en γ de degré m (une fois réduites au même dénominateur). Toutes les formes analogues de l'intégrale s'obtiennent en faisant sur γ un changement homographique dont les coëfficients sont des fonctions arbitrairement choisies de x. Nous pouvons disposer de ces trois coëfficients arbitraires de façon à astreindre les coëfficients ρ_i à trois conditions algébriques; par exemple, il est loisible d'exiger que les trois valeurs $\gamma = u(x)$ qui sont les zéros ou les infinis d'ordre le plus élevé des $\rho_{n-1}, \ldots \rho_0$, soient respectivement ∞, 0 et 1. Moyennant cette restriction, les ρ_i, M, N, P ne sont susceptibles que d'un nombre fini de déterminations. Si donc on exprime que l'équation (15) et l'équation de Riccati adjointe définissent l'intégrale de (1), en laissant indéterminées les fonctions $M(x), N(x), P(x)$

et les coëfficients $\alpha(x)$ des fractions rationnelles ϱ_i de degré m en y ; on forme un système de relations algébriques par rapport aux M, N, P, aux α et à leurs dérivées. Quand ce système est compatible, il est déterminé et les ϱ_i, M, N, P, sont donnés algébriquement en fonction des coëfficients de l'équation (1). Autrement, c'est que l'intégrale prendrait moins de n valeurs autour des point mobiles, et on appliquerait ce qui précède à un entier n' moindre que n.

Conclusion Nous avons indiqué en définitive une marche explicite de calcul pour reconnaître si l'intégrale d'une équation (1) donnée ne prend qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles. On cherche d'abord si l'équation (1) mise sous la forme $dy - f(y, x)\,dx = 0$, admet des multiplicateurs de la forme $\frac{\Sigma \lambda_j P_j}{F'_{y'}}$; quand il en existe au moins deux linéairement distincts, l'intégrale ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, et on l'obtient algébriquement en se servant des transformations rationnelles des courbes algébriques.

Quand il n'existe qu'un tel multiplicateur, l'équation (1) n'est pas nécessairement de l'espèce étudiée ; il faut encore que la fonction $y(v)$, définie par la quadrature :

$$dv = \int \frac{P\,(y', y, x)\,dy}{F'_{y'}},$$

soit une fonction de v à n déterminations ; on sait reconnaître algébriquement s'il en est ainsi et l'équation se ramène algébriquement à une quadrature de la forme :

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = A\,(x)\,dx.$$

Enfin, s'il n'existe aucun multiplicateur de la forme en question, on sait reconnaître algébriquement si l'intégrale prend n valeurs autour des points critiques mobiles, et

ramener, dans ce cas, l'équation à une équation de Riccati.

Si $p = 0$ on est toujours dans ce dernier cas ; il en est de même si $p = 1$, à moins que l'équation n'ait ses points critiques fixes.

Neuvième Leçon.

Recherche des cas où l'intégrale ne prend qu'un nombre fini, non donné, de valeurs autour des points critiques mobiles.

Etant donnée une équation (1), algébrique en y', y, soit :

$$F(y', y, x) = 0, \tag{1}$$

proposons-nous de reconnaître si l'intégrale ne prend qu'un nombre fini (non donné) de valeurs autour des points critiques mobiles.

Nous suivons d'abord, pour cela, la même marche que dans la dernière leçon : nous cherchons s'il existe des multiplicateurs M du binôme $dy - y'\,dx$ qui soient de la forme :

$$\frac{\lambda_1 P_1(y', y, x) + \cdots + \lambda_p P_p(y', y, x)}{F'_{y'}},$$

(voir page 112) ; s'il en existe q linéairement distincts $(q > 1)$, l'intégrale est de l'espèce étudiée et le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est égal à q ; on a de plus $n \leq \frac{p-1}{\varpi - 1} \leq p-1$, n désignant toujours le nombre exact de valeurs de y qui se permutent autour des points critiques mobiles.

S'il existe un seul multiplicateur de la forme $M = \frac{P(y', y, x)}{F'_{y'}}$, ce multiplicateur s'obtient par une quadrature logarithmique $\frac{\lambda'_1}{\lambda_1} = A(x)$. L'intégrale de (1) est ensuite donnée par

quadrature de différentielle totale:

$$\int \frac{P(y',y,x)}{F''_{y'}}\,[dy - y'dx] = C^{te},$$

[où y' désigne la fonction $f(y,x)$ définie par (1)]. Pour que l'intégrale $y(x)$ soit de l'espèce indiquée, il faut et il suffit que l'intégrale abélienne de première espèce $\int \frac{P(y,y,\bar{x})}{F'_{y'}}\,dy$ n'ait que deux périodes. Cette condition se trouve remplie d'elle-même quand le genre p de $F(y',y,\bar{x}) = 0$ est égal à 1, et nous savons que l'équation a alors ses points critiques. Mais pour $p>1$, on ne sait pas reconnaître en général (à l'aide d'un nombre fini d'opérations) si la condition est ou non vérifiée. On sait du moins, que quand elle est vérifiée, l'intégrale $y(x)$ se laisse écrire:

$$0 = y^n + P_{n-1}(x,c)\,y^{n-1} + \cdots + \rho_0(x,c) + \sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}\,\left[r_{n-1}(x,c)\,y^{n-1} + \cdots + r_0(x,c)\right],$$

c et $\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}$ s'exprimant rationnellement en fonction de y',y:

$$c = r(y',y,x)\,, \qquad c_1 \equiv \sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)} = r_1(y',y,x).$$

De plus, la quadrature qui donne λ_1, à savoir $\lambda_1 = e^{\int A(x)dx}$, doit conduire à une expression algébrique par rapport aux coëfficients de (1); on sait même que λ_1 est soit une fonction rationnelle de ces coefficients, soit la racine carrée, quatrième ou sixième d'une telle fonction. Si notamment les coëfficients de (1) sont algébriques, soit μ le nombre des valeurs de $A(x)$: on sait reconnaître (à l'aide d'un nombre fini d'opérations), si l'expression $e^{\int A(x)dx}$ est une fonction algébrique de x à ν valeurs, ($\nu = \mu, 2\mu, 4\mu$ ou 6μ), et l'expression s'obtient alors algébriquement; c'est là un problème classique, sur lequel nous reviendrons d'ailleurs dans un instant (voir page 134). Donc quand les coëfficients de (1) sont des fonctions algébriques de x, on sait reconnaître si l'expression $\lambda_1 = e^{\int A(x)dx}$ est algébrique (première condition nécessaire), et cette condition une fois remplie,

l'équation (1) s'intègre à l'aide de la différentielle totale algébrique en x; y:

$$\int \frac{P(y', y, x)}{F'_{y'}} (dy - y'dx) = C^{te},$$

[où $y' \equiv f(y, x)$]. Mais il reste toujours à reconnaître si l'intégrale abélienne $\int \frac{P\,dy}{F'_{y'}}$ n'a que deux périodes. Un remarque analogue à la précédente s'applique évidemment au cas où les coëfficients de (1) peuvent être rendus algébriques moyennant un changement de la variable x, par exemple au cas où ces coefficients sont algébriques en e^{gx} (ou en $sn_{k^2}\, gx$).

Quand il n'existe aucun multiplicateur de la forme $M = \frac{P(y', y, x)}{F'_{y'}}$, on sait seulement que si l'intégrale ne prend exactement que n valeurs autour des points critiques mobiles, l'intégrale peut recevoir la forme:

$$y^{n-1} + \rho_{n-1}(x, \gamma)\, y^{n-1} + \cdots\cdots + \rho_1(x, \gamma)\, y + \rho_0(x, \gamma) = 0,$$

avec:

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

les ρ étant des fonctions rationnelles de γ, qui (réduites au même dénominateur) sont de degré m: les coefficients de ces fonctions ρ, ainsi que M, N, P, sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation (1). Ces propriétés permettent-elles de pousser les recherches plus loin? Pour bien comprendre la difficulté de la question, quelques mots d'historique ne seront pas inutiles.

Equations différentielles où x ne figure pas explicitement. — Quand x ne figure pas explicitement, l'intégrale $y(x)$ de l'équation:

$$F(y', y) = 0, \qquad (2)$$

ne peut présenter de points critiques fixes (si ce n'est $x = \infty$); si donc l'intégrale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, c'est une fonction à n déterminations dans tout le plan des x.

Briot et Bouquet ont étudié les premiers les équations (2) dont l'intégrale ne possède qu'un nombre fini de branches, et ils ont montré que dans ce cas, y est une fonction algébrique de x, ou de e^{gx} ou de $\operatorname{sn}_{\varphi} gx$. Etablissons rapidement les résultats de Briot et Bouquet; soit n le nombre des valeurs de $y(x)$, et soit:

$$(3) \qquad y^n + A_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \cdots + A_1(x)\, y + A_0(x) = 0,$$

une relation où les $A_i(x)$ sont uniformes, et qui définit une intégrale de (2). Comme $y(x)$ ne peut avoir d'autres points transcendants que $x = \infty$ (le seul point § de l'équation (2)), les fonctions uniformes $A_i(x)$ sont méromorphes. Soit maintenant $f(y) = \frac{1}{y'}$, y' désignant la fonction algébrique de y définie par (2), et soit ω une période de l'intégrale abélienne $x = \int f(y)\, dy = J(y)$. Si, pour des valeurs quelconques de x, y, l'équation (3) est vérifiée, elle l'est encore quand on change x en $x + \omega$; les deux équations en y:

$$y^n + A_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \cdots + A_0(x) = 0, \qquad y^n + A_{n-1}(x+\omega) y^{n-1} + \cdots + A_0(x+\omega) = 0,$$

ont donc n racines communes, (car elles en ont au moins une, et si elles en avaient seulement n', y serait une fonction de x à n' branches); on a, par suite, $A_i(x+\omega) \equiv A_i(x)$; les $A_i(x)$ sont donc des fonctions méromorphes qui admettent toutes les périodes ω de $J(y)$. Ces périodes doivent donc se réduire à deux périodes distinctes au plus.

D'après cela, trois cas sont à distinguer:

1°. — Toutes les périodes de $J(y)$ sont nulles; la fonction $x = J(y)$ est alors une fonction algébrique de x à m déterminations, [m étant le degré en y' de la relation irréductible (2)].

2°. Toutes les périodes de $J(y)$ se réduisent à la période ω.

Posons alors $u = e^{\frac{2i\pi}{\omega}x}$; on a:

$$u = e^{\frac{2i\pi}{\omega}x} = e^{\frac{2i\pi}{\omega}J(y)} = \Phi(y);$$

la fonction $\Phi(y)$ est une fonction à m déterminations, et les seuls points qui puissent être des points essentiels de Φ sont les

infinis de $J(y)$. Si un de ces pôles (y compris $y=\infty$) est un point essentiel de $\Phi(y)$, à une valeur de x, correspondent une infinité de valeurs de y. Pour que la fonction $y(x)$ n'ait qu'un nombre fini de déterminations, il faut donc que $\Phi(y)$ soit une fonction algébrique de x, et cette condition est évidemment suffisante. Cela n'est possible que si les pôles de $f(y)$ (1) sont d'ordre au plus égal à 1 ; quant aux pôles d'ordre 1, leurs résidus α (donnant naissance à la période $2i\pi\alpha$) sont nécessairement de la forme $\frac{m\omega}{2i\pi}$, et si $y=0$ est un de ces pôles, $\Phi(y)$ est (dans le voisinage de $y=0$) de la forme :

$$e^{\frac{2i\pi}{\omega}\,\frac{m\omega}{2i\pi}\,[\log y + G(y)]} = y^m e^{mG(y)},$$

$G(y)$ étant holomorphe pour $y=0$.

3° Toutes les périodes de $J(y)$ se réduisent à deux. — Le rapport de ces deux périodes distinctes ω, ω' est nécessairement imaginaire, puisque les fonctions uniformes $A_i(x)$ admettent ces deux périodes ; de plus, les $A_i(x)$ étant méromorphes sont des fonctions rationnelles de $u = sn_{k^2}\, gx$ et de $\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$, où g, k^2 sont deux constantes numériques convenablement choisies. L'égalité :

$$dx = \frac{du}{g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = f(y)\,dy$$

montre que l'intégrale abélienne $J(y)$, transformée algébrique de $\int \frac{du}{g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$, est de première espèce. Inversement, si $J(y)$ est une intégrale abélienne de première espèce dont toutes les périodes se réduisent à deux, l'intégrale $y(x)$ de l'équation (2), est une fonction algébrique de $sn_{k^2}\, gx$: en effet les deux périodes

---

(1) Il faut de plus que la même condition soit remplie quand on change y en $\frac{1}{y}$, c'est à dire que les diverses valeurs de $y\,f(y)$ tendent vers une limite finie ou nulle pour $y=\infty$.

de $J(x)$ ont nécessairement un rapport imaginaire [1], et si $sn_{k^2}\, gx$ est la fonction sn qui admet ces deux périodes ω, ω', l'expression $sn_{k^2}[g.J(y)]$ est une fonction à m déterminations de y, qui n'admet pour aucune valeur finie ou infinie de y de singularités essentielles, puisque $J(y)$ ne devient infinie pour aucune valeur de y.

On peut résumer ainsi la discussion précédente. Pour que l'intégrale $y(x)$ de (2) soit une fonction à un nombre fini de branches, il faut et il suffit que l'on se trouve dans un des trois cas suivants :

1° ou bien l'intégrale abélienne $\int f(y)\,dy$ n'a pas de périodes ; l'intégrale $y(x)$ est alors algébrique et vérifie une relation irréductible $G(x,y)=0$ de degré m en x.

2° ou bien l'intégrale abélienne $\int f(y)\,dy$ n'a qu'une période ω et tous les pôles de $f(y)$ et de $\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ sont au plus d'ordre égal à l'unité. L'intégrale $y(x)$ est alors une fonction algébrique de $e^{\frac{2i\pi}{\omega}x} = u$, et vérifie une relation entière irréductible de degré m en u, soit $G(u,y)=0$. Pour tenir compte des conditions énoncées, on peut exprimer d'abord que tous les pôles de $f(y)$ sont simples et ont leurs résidus α commensurables entre eux ; il reste ensuite à exprimer que les périodes non polaires de l'intégrale de troisième espèce sont commensurables avec $2i\pi\alpha$.

---

(1) Une intégrale abélienne de première espèce possède au moins deux périodes dont le rapport est imaginaire ; autrement, il serait loisible d'admettre que toutes les périodes de cette intégrale $J = \int f(y)\,dy$ sont réelles ; or faisons parcourir au point y toute la surface de Riemann (définie par la relation $F(y',y)=0$), une seule fois : $x = J(y)$ décrit une certaine aire fermée (A) dans le plan des x, et quand on fait varier ensuite y de façon à lui faire parcourir plusieurs fois la surface de Riemann, l'aire (A) ne peut que se transporter parallèlement à ox. La

3° ou bien l'intégrale abélienne $\int f(y)\,dy$ est de première espèce et n'a que deux périodes. L'intégrale $y(x)$ est alors une fonction algébrique de $sn_{k^2}\, gx = u$, et vérifie une relation entière $G(u, y) = 0$ de degré m en u.

Il est facile d'après cela de reconnaître si l'intégrale $y(x)$ d'une équation (2) est une fonction à un nombre donné n de branches. En effet, dans le premier cas, à une valeur de x correspondent n valeurs de y; l'équation $G(x, y) = 0$ est de degré m en x, de degré n en y; il suffit de vérifier si une telle relation (où on laisse les coefficients indéterminés) vérifie l'équation (2). De même, dans le second cas, à une valeur de u correspondent les valeurs $(\bar{x}, \bar{x} \pm \omega, \bar{x} \pm 2\omega, \ldots$ de x, et à ces valeurs correspondent le même système de n valeurs de y; la relation $G(u, y) = 0$ est donc de degré m en u, et de degré n en y; il suffit de constater si une telle relation définit l'intégrale de l'équation:

$$\lambda \frac{du}{u} = f(y)\,dy;$$

pour une valeur convenable de la constante λ. Enfin dans le troisième cas, à une valeur de $u = sn_{k^2}\, gx$ correspondent deux valeurs non congruentes de x, et par suite au plus $2n$ valeurs de y; la relation $G(u, y) = 0$ est donc de degré m en u, de degré $2n$ en y, et il suffit de constater si une telle relation définit l'intégrale de l'équation:

$$\frac{du}{g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = f(y)\,dy,$$

---

fonction $y(x)$ n'existerait donc que dans une portion du plan des x; or nous savons, d'après le théorème fondamental sur les équations du premier ordre, qu'elle existe dans tout le plan. Il suit de là que dans le second cas, $J(y)$ n'est ni de première, ni de seconde espèce, donc J est de troisième espèce.

pour des valeurs convenables des coëfficients g, k. Observons qu'à une valeur de u et de $\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$ correspond une seule valeur de x (abstraction faite des valeurs congruentes), en sorte que l'équation $G(u, y) = 0$ équivaut à une relation de la forme :

$$H(u, y) + \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\, K(u, y) = 0,$$

H et K étant des polynômes en u, y, de degré n en y.

Quand on connaît une intégrale $y(x)$ de (2), toutes les autres s'obtiennent en changeant x en $x + C$. Il suit de là que dans les deux premiers cas, le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est nul, et qu'il est égal à 1 dans le troisième cas. En effet, dans le premier cas, l'intégrale $y(x)$ vérifie une relation entière de degré n en y et de degré m par rapport à la constante, et il en est de même dans le second cas à condition de remplacer $e^{\frac{2i\pi}{\alpha}C}$ par C. Dans le troisième cas, si on pose $c = sn_{k^2}\, gC$, la fonction y vérifie une relation :

$$H(y, x, c) + \sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}\; K(y, x, c) = 0,$$

où H et K sont des polynômes en y, c, de degré n en y ; de plus si on chasse le radical $\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}$, la relation $G(y, x, c) = 0$, ainsi obtenue est de degré m en c ; c s'exprime donc rationnellement en y', y, soit $c = r(y', y, x)$, et par suite $c_1 = \sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}$; la relation entre les constantes intégrales est donc de genre 1.

On serait arrivé aux résultats précédents (pages 135-136) en appliquant à l'équation (2) les procédés généraux indiqués pour reconnaître si l'intégrale d'une équation (1) quelconque ne prend qu'un nombre donné de valeurs autour des points critiques mobiles. Cette application ne présente aucune difficulté.

Essayons maintenant de reconnaître si l'intégrale $y(x)$ de (2) n'admet qu'un nombre fini, non donné, de valeurs. Cette

recherche ne présente aucune difficulté dans le premier cas : écrivons en effet l'égalité qui définit l'intégrale :

$$x^m + R_{m-1}(y)\, x^{m-1} + \dots + R_1(y)\, x + R_0(y) = 0.$$

Les pôles de R_0 sont les infinis de $J(y)$; soit $y=\alpha$ un de ces infinis et soit $f_1 \dots f_\mu$ les μ branches de $f(y)$ qui deviennent infinies d'ordre supérieur à 1 pour $y=\alpha$; on peut étudier dans le voisinage de $y=\alpha$ les μ branches $\int f_i\, dy$ de l'intégrale $\int f(y)\, dy$, et en particulier calculer l'ordre q du pôle $y=\alpha$, dans le produit $x_1(y)\, x_2(y) \dots\dots x_\mu(y)$. Le nombre q est l'ordre du pôle $y=\alpha$ de $R_0(y)$; on connaît ainsi le dénominateur Q_0 de la fonction $R_0(y) \equiv \frac{P_0(y)}{Q_0(y)}$; en changeant y en $\frac{1}{z}$, on connaît de même l'ordre(1) du pôle $z=0$ de $R_0\left(\frac{1}{z}\right)$, c'est à dire l'excès du degré de P_0 sur celui de Q_0. On connaît donc une limite supérieure du degré de P_0. D'autre part, $y=\alpha$ est au plus un pôle d'ordre q de $R_{n-1} = \Sigma\, x_1(y)$, $R_{n-2} = \Sigma\, x_1(y)\, x_2(y)$, etc, et comme la même remarque s'applique quand on change y en $\frac{1}{z}$, on voit que les degrés de P_0 et de Q_0 limitent respectivement les degrés des termes P_i et Q_i de $R_i(y)$. Tout revient donc à vérifier si une relation algébrique de degré connu en x, y, satisfait à l'équation différentielle.

Mais dans les deux derniers cas, la difficulté est autrement profonde. Dans le second cas, le problème revient à reconnaître si les périodes non polaires de l'intégrale abélienne de troisième espèce $J(y)$ sont commensurables avec une des périodes polaires $2i\pi\alpha$. Ce problème est tout résolu, quand on sait à l'avance que les périodes non polaires n'existent pas : c'est ce qui arrive dans le cas où $f(y)$ est rationnel en y, autrement dit où y' entre au premier degré dans (2) ; à ce cas, se ramène aussitôt celui où le genre p de (2) est nul. Mais dès que p est égal à 1, le problème devient très compliqué, prenons

(1) Je suppose que $x(y)$ est une intégrale quelconque de (2) et par suite qu'aucun pôle $y=b$ d'une branche $x(y)$ n'est zéro d'une autre branche.

par exemple, l'intégrale elliptique de troisième espèce :

$$J(y) = \int \frac{dy}{(x+h)\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}},$$

la période polaire est unique et si les deux périodes non polaires sont commensurables avec elle, l'intégrale J n'a qu'une période ω et l'expression $e^{\frac{2i\pi}{\omega}J(y)}$ est algébrique en y. M. Tchebycheff a montré qu'on peut reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, si $J(y)$ n'a qu'une période, en supposant que les coëfficients h, a, b, c, d, e sont des entiers, et M. Zolotareff a étendu la méthode de M. Tchebycheff au cas où ces coëfficients sont des nombres algébriques. L'admirable travail de M. Tchebycheff met nettement en évidence le caractère essentiellement arithmétique des difficultés du problème.

Sous une autre forme, la question revient à reconnaître si, pour une valeur du coefficient λ, l'intégrale de l'équation :

$$(2)' \qquad \lambda \frac{du}{u} = f(y)\, dy,$$

est algébrique. Si ω est la période unique de $J(y)$ et si on pose $\lambda = \frac{\omega}{2i\pi}$, l'intégrale de (2)' est donnée par une relation algébrique de degré m en u ; mais quand on fait $\lambda = \frac{q}{r}\,\frac{\omega}{2i\pi}$, l'intégrale de (2)' reste algébrique, et s'obtient en remplaçant dans la précédente u par $u^{\frac{q}{r}}$ (q et r sont des entiers). Soit ω_1 la plus petite période polaire ; on a $\omega_1 = q\omega$, et l'équation :

$$(2)'' \qquad \frac{du}{u} = \frac{1}{\omega_1} f(y)\, dy = f_1(y)\, dy,$$

a son intégrale algébrique et définie par une relation $G(u^q, y) = 0$ de degré m en u^q. Les résidus de $f_1(y)$ sont tous des nombres entiers premiers entre eux. On voit que le problème se ramène toujours à reconnaître si l'intégrale d'une équation :

$$\frac{du}{u} = f_1(y)\, dy$$

est donnée par une relation $G(u^q, y) = 0$ de degré m en u^q. Lorsqu'on connaît l'entier q, on sait résoudre la question depuis Liouville ; posant en effet $u^q = v$, on doit décider si l'intégrale de l'équation :

(2)‴ $$\frac{dv}{v} = q\, f_1(y)\, dy,$$

est définie par une relation de la forme :

$$v^m + R_{m-1}(y)\, v^{m-1} + \cdots\cdots + R_0(y) = 0$$

où les R_i sont des fractions rationnelles en y(1) Les seuls pôles des $R_i(y)$ sont les pôles d'ordre (1) de $f_1(y)$ à résidus négatifs, et si on fait la **Somme** des résidus négatifs du pôle $y = \alpha$ (relatifs aux diverses branches de $f_1(y)$ qui deviennent infinies du premier ordre pour $y = \alpha$), l'entier ainsi obtenu est (en valeur absolue) l'ordre du pôle : $y = \alpha$ **du dénominateur $Q(y)$ des R_i** ; on connaît donc le dénominateur Q des $R(y)$; en changeant y en $\frac{1}{z}$, on connaît l'excès du degré des numérateurs P_i sur le degré de Q. On connaît **ainsi** le degré des P_i et de Q.

Il suffit donc de constater si l'équation (2)‴ est vérifiée par une relation algébrique **en y, v**, de degré donné.

On voit que la difficulté consiste à trouver une limite supérieure de q. Observons, en outre, que nous avons rencontré antérieurement (page 128) ce problème : « Etant donnée une équation différentielle : $\frac{du}{u} = R(y, z)\, dy$, avec $G(y, z) = 0$,
« où R est une fraction rationnelle en y, z et G un polynôme irré-
« ductible en y, z, reconnaître si son intégrale $u(y)$ est une fonction algébrique
« à n déterminations du point analytique (y, z), (n étant donné). » La méthode précédente résout ce problème : tout d'abord, si deux valeurs $u_1(y,z)$, $u_2(y,z)$ correspondent au même point (y,z) de G, on a : $\frac{u_2}{e^{2i\pi\frac{k}{l}}} = c\,u_1$, c désignant une constante qui est nécessairement de la forme $e^{2i\pi\frac{k}{l}}$ k et l désignant des entiers premiers entre eux ; il suit de là aussitôt que n est le plus petit commun multiple de tous les entiers l. Donc $u = v^n$ est une fonction rationnelle de (y,z) ; pour reconnaître s'il en est ainsi il suffit d'appliquer la méthode précédente à l'équation : $\frac{dv}{v} = \varphi(y,z)\, dy$.

(1) Je suppose ces fractions réduites au même dénominateur Q.

Quant au troisième cas du problème, celui qui consiste à reconnaître si l'intégrale abélienne de première espèce n'a que deux périodes, il revient évidemment à reconnaître si une courbe de genre plus grand que 1 est la transformée rationnelle d'une courbe de genre 1. Il peut encore s'énoncer ainsi : « Déterminer si pour des valeurs convenables des constantes g, k, l'équation différentielle

$$\frac{g\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = f(y)\,dy$$

a comme intégrale une fonction algébrique de y à m déterminations". C'est là un problème de nature arithmétique qu'on ne sait pas résoudre en général, même en se donnant g et k.

En définitive, la question de savoir si l'intégrale $y(x)$ d'une équation (2) $F(y', y) = 0$ est une fonction transcendante de x à un nombre fini (non donné) de déterminations, revient à reconnaître si les périodes non polaires d'une intégrale abélienne de troisième espèce se réduisent à une seule (commensurables avec ses périodes polaires), ou si les périodes d'une intégrale abélienne de première espèce se réduisent à deux. Malgré tous les efforts, ce problème n'a fait aucun progrès depuis les travaux de Briot et Bouquet et de Liouville, sauf dans le cas particulier traité par Tchebycheff. Les travaux dont il a été l'objet mettent du moins en évidence le caractère essentiellement arithmétique de ce problème.

Dans la prochaine leçon, nous passerons aux équations $F(y', y, x) = 0$ qui renferment x explicitement.

Dixième Leçon.

Recherche des cas où l'intégrale ne prend qu'un nombre fini (non donné) de valeurs autour des points critiques mobiles (Suite).

Les travaux dont nous avons parlé à la fin de la dernière leçon étaient, récemment encore, les seuls où on se fût occupé des équations du premier ordre dont l'intégrale a un nombre fini de déterminations. Lorsque x figure dans l'équation, la recherche des conditions pour que l'intégrale n'acquière qu'un nombre fini de valeurs dans le plan (ou autour des points critiques mobiles) semblait peu abordable. On le conçoit aisément sur l'équation du premier degré:

$$y' = R(y, x)$$

où R est rationnel en y; si on exprime que l'intégrale n'a pas de points critiques algébriques mobiles, on tombe immédiatement sur une équation de Riccati; au contraire, on n'a aucun moyen d'exprimer qu'une fonction qui a plus de deux points critiques algébriques, n'acquiert autour de ces points qu'un nombre fini (même donné) de déterminations. C'est l'étude de l'intégrale comme fonction de la constante y_0 qui seule nous a permis de définir la nature de l'intégrale d'une équation

(1) $$F(y', y, x) = 0$$

algébrique en y', y, dans le cas où cette intégrale n'admet qu'un nombre n de valeurs autour des points critiques mobiles; c'est cette étude qui nous a permis de reconnaître dans tous les cas si l'intégrale d'une équation (1) donnée est bien de l'espèce en question (n étan-

donné). Nous savons même maintenant traiter algébriquement le même problème sans que n soit donné, dans l'hypothèse où la relation entre les constantes intégrales est de genre ϖ plus grand que 1, dans l'hypothèse $\varpi = 1$, l'équation (1) est ramenée aux quadratures. L'hypothèse $\varpi = 0$ appelle de nouvelles recherches auxquelles nous arrivons maintenant.

Je me placerai d'abord dans le cas où l'équation (1) est du premier degré en y' et où les coefficients de (1) sont algébriques en x, et le problème que je me pose est le suivant "Reconnaître si l'intégrale d'une telle équation est une fonction <u>transcendante</u> qui ne prend qu'un nombre fini (<u>non donné</u>) de valeurs autour des points critiques mobiles."

Equations différentielles du premier degré

Soit:

$$(2) \qquad y' = R(y, x) = \frac{P(y,x)}{Q(y,x)}$$

l'équation différentielle donnée où P et Q sont deux polynômes en y (sans facteur commun pour x arbitraire); il nous est toujours loisible moyennant une transformation homographique effectuée sur y, de supposer le degré du numérateur P en y supérieur de 2 unités au degré du dénominateur Q. J'appellerai q le degré du coëfficient différentiel de (2). Dans ces conditions $y = \infty$ ne sera pas une intégrale de (2); j'entends par là que la transformée de (2) en $y = \frac{1}{z}$ n'admettra pas l'intégrale $z = 0$.

Dans le cas qui nous occupe (cas auquel se ramène le cas où le genre p de (1) est nul), le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est nécessairement nul et l'intégrale, si elle prend <u>exactement</u> n valeurs autour

des points critiques mobiles, peut s'écrire :

$$(3) \qquad y = \frac{\alpha_n y^n + \alpha_{n-1} y^{n+1} + \dots + \alpha_1 y + \alpha_0}{y^n + \beta_{n-1} y^{n-1} + \dots + \beta_1 y + \beta_0} \equiv \frac{\Phi(y,x)}{\Psi(y,x)},$$

avec :

$$(4) \qquad y' = L y^2 + M y + N,$$

L, M, N étant, ainsi que les α_j, β_j, des fonctions <u>algébriques</u> des coëfficients de (2), donc ici des fonctions <u>algébriques</u> de x.

L'intégrale $y(x)$ de (4) est de la forme

$$y = \frac{u(x)\, C + V(x)}{u_1(x)\, C + V_1(x)},$$

C désignant une constante arbitraire, en sorte que l'équation (3) entraîne la suivante :

$$(5) \qquad C = \frac{\lambda_n y^n + \lambda_{n-1} y^{n+1} + \dots + \lambda_1 y + \lambda_0}{y^n + \mu_{n-1} y^{n-1} + \dots + \mu_1 y + \mu_0} \equiv \frac{\varphi(y,x)}{\psi(y,x)}.$$

les λ_j, μ_j étant des fonctions de x qui ne sont plus, en général, algébriques. J'observe immédiatement que $\lambda_n(x)$ ne saurait se réduire à une constante h ; autrement, pour $C = h$, l'équation (5), où on change y en $\frac{1}{z}$, admettrait la solution $z = 0$, qui serait par suite une intégrale de la transformée de (1) en $\frac{1}{y} = z$, ce qui est contre l'hypothèse.

Si nous différentions l'équation (5) il vient :

$$(6) \qquad 0 = \left(\psi \frac{d\varphi}{dy} - \varphi \frac{d\psi}{dy}\right) y' + \left(\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx}\right) \equiv Q_1 y' - P_1,$$

P_1 et Q_1 étant des polynômes en y, dont le premier est de degré $2n$, puisque le coëfficient de y^{2n} dans P_1 n'est autre chose que la quantité $\lambda_n'(x)$, qui n'est pas nulle. D'autre part, comme l'équation (6) doit être équivalente à l'équation (1), on a nécessairement $P_1 = H(y,x)\, P$, $Q_1 = H(y,x)\, Q$, $H(y,x)$ désignant un polynôme en y (qui peut se réduire à une constante).

On voit que $2n$ est égal au degré q de P augmenté du degré r de H.

Ceci posé, montrons que toute racine $y = g(x)$ de H est une intégrale de l'équation (2). En effet, on peut toujours supposer que $y = g(x)$ n'annule pas ψ_1 (sinon, on changerait C en $\frac{1}{C}$); quand on remplace, dans $C \equiv \frac{\varphi}{\psi}$, y par $g(x)$, la fonction $\overline{C}(x)$ ainsi définie a comme dérivée l'expression

$$\frac{P_1(g,x) - g' Q_1(g,x)}{\psi^2(g,x)}$$

qui est identiquement nulle; $\overline{C}(x)$ est donc une constante absolue C_0, et la fonction $y = g(x)$, qui vérifie la relation $C_0 = \frac{\varphi}{\psi}$ est une intégrale [1].

De plus, si $y - g(x)$ entre en facteur à la puissance μ dans H, je dis qu'il entre à la puissance $\mu+1$ dans la différence $\frac{\varphi}{\psi} - C_0$. En effet, la racine $y = g$ de l'égalité $\frac{\varphi}{\psi} = C_0$ étant racine d'ordre μ au moins de $\frac{d}{dy} \cdot \frac{\varphi}{\psi}$, est racine d'ordre $\mu+1$ au moins de $\frac{\varphi}{\psi} = C_0$. D'autre part, si $y = g$ est racine d'ordre supérieur de cette dernière égalité, $y - g$ entre en facteur à la puissance $\mu+1$ au moins dans H; car la relation

$$C = C_0 + \frac{[y - g(x)]^{\mu+2} \varphi_1}{\psi}$$

différentiée, montre aussitôt que $y - g(x)$ entre en facteur dans le second membre de (6) à la puissance $\mu+1$. Si $C_0 = \infty$, autrement dit si $y = g$ est une racine de ψ, on voit (en changeant C en $\frac{1}{C}$) que $y = g$ est racine d'ordre $\mu+1$ de ψ.

---

(1) On peut énoncer ce théorème sous une forme un peu plus générale. Soit $X(y,x)\,dx + Y(y,x)\,dy = 0$ une équation quelconque du premier ordre, et M un multiplicateur du binôme $X\,dx + Y\,dy$. Si la fonction $y = g(x)$ vérifie la relation $M = 0$ (et ne rend ni infinie ni indéterminée aucune des fonctions X, Y), c'est une intégrale de l'équation. Ce théorème était déjà connu d'Euler.

Par hypothèse, la fonction $y(x)$, définie par la relation (5) où C a une valeur constante, a n valeurs distinctes qui se permutent autour des points critiques mobiles. Il ne saurait y avoir d'exception que pour certaines valeurs particulières de C. Appelons valeurs remarquables de C les valeurs constantes C_i pour lesquelles l'équation (5) en y admet, quel que soit x, des racines multiples $y_i(x)$, et soit $a_i, b_i, \ldots\ldots e_i$, les ordres de multiplicité de ces diverses racines : ces racines seront dites solutions remarquables de (2), d'ordre de multiplicité $a_i, b_i, \ldots e_i$. On a la relation :

$$(7) \qquad q = 2n - r = 2n - \Sigma\,(a_i - 1) + (b_i - 1) + \ldots\ldots + (e_i - 1).$$

Cette relation nous montre que le nombre des valeurs C_i est fini. Soit k ce nombre ; soit l_i le nombre des racines distinctes $y = g(x)$ de la relation $C_i = \frac{\varphi}{\psi}$;
la relation (7) peut s'écrire encore

$$(8) \qquad q = \sum_{i=1}^{i=k} l_i + n\,(2 - k)$$

D'autre part, soit $\gamma_i(x)$ l'intégrale de (4) qui correspond à la valeur C_i de la constante C. Si $y = g(\bar{x})$ est racine d'ordre μ de l'équation $C_i = \frac{\varphi(y, \bar{x})}{\psi(y, \bar{x})}$, c'est aussi une racine d'ordre μ de l'équation (3)

$$\gamma_i(x) = \frac{\Phi(y, \bar{x})}{\psi(y, \bar{x})}$$

L'intégrale $y = g(x)$ vérifie donc la relation

$$\psi \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Phi \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0\,;$$

c'est une fonction algébrique des coefficients de (2), ici une fonction algébrique de x.

La fonction $\gamma_i(x)$ est elle même algébrique. S'il existe trois valeurs remarquables distinctes de C, l'intégrale de l'équation

de Riccati (4) dont trois intégrales particulières sont algébriques, est algébrique, par suite aussi l'intégrale générale $y(x)$ de l'équation (2), d'après la relation (3). Quand l'intégrale de (2) est transcendante il ne peut donc exister plus de deux valeurs remarquables de la constante C[1].

Nous avons d'après cela trois cas à examiner : $k=0$. $k=1$. $k=2$.

Si k est nul, q est égal à $2n$; d'où $n = \frac{q}{2}$.

Si k est égal à 1, q est égal à $n+l$, {l, étant au moins égal à 1 et au plus à $n-1$}; d'où $n < q$.

Si k est égal à 2, q est égal à l_1+l_2. Comme il est loisible de faire sur la constante C un changement homographique, on peut toujours supposer que les valeurs remarquables de C sont $C=0$ et $C=\infty$. et mettre l'intégrale sous la forme

$$(9) \qquad C = u(x)\left[y-g_1(x)\right]^{i_1}\left[y-g_2(x)\right]^{i_2}\ldots\ldots\left[y-g_q(x)\right]^{i_q},$$

où $i_1, i_2 \ldots i_q$ sont des entiers, positifs ou négatifs, sans diviseur commun, et dont la somme est nulle.

Étant donnée une équation (2), on peut reconnaître sans difficulté si son intégrale est de la forme (9). En effet, cherchons d'abord à reconnaître si cette intégrale peut se mettre sous la forme (9) où $i_1 \ldots\ldots i_q$ sont des constantes qui vérifient la relation $i_1+i_2+\ldots\ldots+i_q=0$. Il suffit pour cela d'écrire la relation (9) en laissant indéterminées les fonctions $u(x)$, $g(x)$ et les constantes i, et d'exprimer qu'elle définit l'intégrale de (2) ; on reconnaît algébriquement si les relations algébriques ainsi obtenues

---

[1] Il est aisé de montrer que, si pour $C = C_i$ l'intégrale $y(x)$ définie par (5) se décompose en plusieurs fonctions distinctes (sans qu'il y ait de branches multiples), cette intégrale $y(x)$ est une fonction algébrique des coëfficients de (2). Mais nous n'avons pas besoin de cette remarque.

entre les i, les g, u et leurs dérivées sont compatibles [1]. Quand il en est ainsi, considérons une des solutions $u(x)$, $g(x)$, i : l'expression $\frac{\partial}{\partial y} \log C(y.x)$ est un multiplicateur du binôme $dy - y'dx$ [où $y' \equiv \frac{P(y.x)}{Q(y.x)}$], multiplicateur de la forme

$$M = \frac{i_1}{y - g_1(x)} + \frac{i_2}{y - g_2(x)} + \dots + \frac{i_q}{y - g_q(x)} \equiv \frac{A(y.x)}{B(y.x)}$$

où A et B sont deux polynômes en y, le premier de degré $q-2$, le second de degré q, et comme A doit être divisible par Q (polynôme en y de degré $q-2$), M peut s'écrire $\frac{Q(y.x)}{B(y.x)}$. S'il existe deux tels multiplicateurs linéairement distincts leur quotient est une intégrale première de (2), rationnelle et de degré q en y ; l'intégrale $y(x)$ de (2) prend donc au plus q valeurs autour des points critiques mobiles. Si au contraire il n'existe qu'un tel multiplicateur (défini à un facteur constant près h), les rapports $i_1, i_2 \dots i_q$ sont connus algébriquement en fonction des coëfficients de l'équation (2) ; il faut que ces rapports (dans le cas qui nous occupe) soient des constantes numériques commensurables, condition qui se vérifie immédiatement. Quand elle est remplie, on prend pour i_1 le plus petit commun multiple des dénominateurs des fonctions irréductibles $\frac{i_2}{i_1} \dots \dots \frac{i_q}{i_1}$ et on met ainsi l'intégrale de (2) sous la forme (9)', où $i_1, i_2 \dots i_q$ sont des entiers premiers entre eux ; si n est la somme de ces entiers de même signe, l'intégrale $y(x)$ prend exactement n valeurs autour des points critiques mobiles. Observons que les $g(x)$ sont aussi, dans ce cas, connus algébriquement ; quant à $u(x)$ il est défini à un facteur constant près, donc par une quadrature logarithmique : $\frac{du}{u} = K(x)\, dx$,

---

[1] On n'a qu'à exprimer que les expressions $\frac{\partial}{\partial x} \log. C(y.x)$, $\frac{\partial}{\partial y} \log. C(y.x)$ sont proportionnelles à $P(y.x)$, $Q(y.x)$, ce qui n'entraîne que des conditions algébriques entre les i, les $u(x)$, $g(x)$ et leurs dérivées.

où K est une fonction rationnelle des coëfficients de l'équation (2).

Nous arrivons donc à ce théorème : "Quand l'intégrale d'une équation (2) est une fonction transcendante qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, ou bien ce nombre n est inférieur à $q+1$, ou bien l'intégrale peut se mettre sous la forme (9), et cela d'une seule manière (abstraction faite d'un facteur constant).

Etant donné une équation (2) on peut toujours reconnaître algébriquement si l'intégrale est une fonction qui acquiert au plus q valeurs autour des points critiques mobiles. On sait également reconnaître si l'intégrale peut se mettre (et d'une seule manière) sous la forme (9). On peut enfin trouver algébriquement les intégrales de l'équation de Riccati (4) qui correspondent aux valeurs remarquables de la constante. Il suit de là que l'équation (1) se ramènera à une équation de Riccati si n est égal à son minimum $\frac{q}{2}$ (ce qui ne peut avoir lieu que pour q pair) ; elle s'intégrera par deux quadratures si n est plus grand que $\frac{q}{2}$ et inférieur à q ; enfin par une seule quadrature, de la forme $\frac{du}{u} = K(x)\,dx$, si n est au moins égal à q.

En définitive, étant donné une équation (2), on sait toujours reconnaître si son intégrale $y(x)$ est une fonction transcendante qui ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini (non donné) de valeurs, et l'équation (2) se ramène alors algébriquement à une équation de Riccati ; cette équation s'intègre par quadratures dès que le nombre n de ces valeurs de $y(x)$, nombre qui ne peut être inférieur à $\frac{q}{2}$, n'est pas exactement égal à $\frac{q}{2}$.

Sous cette forme, l'énoncé comporte toutefois

une certaine restriction ; en effet, l'intégrale $y(x)$ ne sera transcendante qu'autant que l'intégrale $\zeta(x)$ de l'équation de Riccati (4) sera transcendante. Or toutes les conditions précédentes étant remplies, il peut se faire que cette équation (4) ait son intégrale algébrique. La question de savoir si une équation de Riccati a son intégrale algébrique se ramène à une question analogue intéressant une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre (voir page 29) et la théorie des groupes linéaires finis permet, comme on sait, de résoudre la question ou de ramener l'équation de Riccati à une quadrature logarithmique $\frac{du}{u} = K(x)\,dx$, K dépendant algébriquement de x. Cette équation ne définira une fonction algébrique $u(x)$ qu'autant que tous les infinis de $K(x)$ seront au plus du premier ordre et auront des résidus commensurables ; mais ces conditions une fois remplies, on ne sait pas, avons-nous dit, reconnaître si les périodes non polaires de $\int K(x)\,dx$ sont commensurables avec $i\pi$. En toute rigueur, l'énoncé précédent doit donc être modifié ainsi : « Étant donnée une équation (2), on sait reconnaître si son intégrale $y(x)$ est une fonction transcendante qui ne prend qu'un nombre fini (non donné) de valeurs autour des points critiques mobiles, ou bien on ramène l'équation à une quadrature $\frac{du}{u} = K(x)\,dx$, où $K(x)$ est une fonction algébrique de x qui n'a que des pôles du premier ordre au plus, à résidus commensurables. Dans ce dernier cas, l'intégrale $y(x)$ est transcendante (de l'espèce étudiée) ou algébrique, suivant que $u(x)$ est transcendante ou algébrique.

Enfin, observons qu'il n'est nullement indispensable de supposer les coëfficients de (2) algébriques en x, mais que la méthode précédente s'applique, sans modifications, au problème suivant :

" Étant donnée une équation

$$(2') \qquad y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$$

où P et Q sont deux polynômes en y, le premier de degré ν, le second de degré ν', et dont les coëfficients sont des fonctions analytiques de x, reconnaître si son intégrale générale est une fonction qui n'acquiert qu'un nombre fini (*non donné*) de valeurs autour des points critiques mobiles, <u>et qui ne se réduit pas à une combinaison algébrique des coëfficients de l'équation et de leurs dérivées</u>. — *Le nombre des valeurs remarquables de la constante ne peut, là encore, dépasser* 2, et on sait déterminer le nombre exact n de branches de l'intégrale qui se permutent autour des points mobiles. Si q est *le plus grand des deux nombres* ν, $\nu'+2$, *l'équation se ramène alors à une équation de Riccati pour* $n = \frac{q}{2}$, *à deux quadratures pour* $\frac{q}{2} < n < q$, *à une quadrature pour* $n \geq q$.

Problèmes inverses. — *Les considérations développées ci-dessus permettent de résoudre les problèmes réciproques des problèmes précédents.*

Posons-nous, en effet la question suivante

I. — " Déterminer explicitement toutes les équations (2) irréductibles et de degré donné q.

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_q(x)y^q + \ldots\ldots + a_1 y + a_0}{y^{q-2} + \ldots\ldots + b_1 y + b_0}$$

dont l'intégrale générale ne prend qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles. [$q > 2$, $n \geq \frac{q}{2}$]."

Pour résoudre ce problème, je pars de l'égalité

$$(5) \qquad C = \frac{\varphi(y, x)}{\psi(y, x)} \equiv \chi(y, x)$$

où φ *et* ψ *sont des polynômes en y de degré n, dont les coëfficients*

λ, μ, sont des fonctions indéterminées de x. Pour que l'équation (2) dont (3) définit l'intégrale générale soit de degré q, il faut et il suffit qu'il existe k solutions remarquables $y_1(x), \ldots y_k(x)$ de multiplicité $l_1, \ldots l_k$, telles que l'on ait :

$$q = 2n - \sum_{i=1}^{i=k} (l_i - 1).$$

Pour qu'il existe une solution remarquable d'ordre l, il faut et il suffit que les λ, μ satisfassent à $(l-1)$ conditions algébriques, à savoir les $(l-1)$ conditions obtenues en éliminant y_1 entre les l égalités :

$$X(y_1, x) = C_1, \; \frac{\partial X}{\partial y}(y_1, x) = 0, \ldots \frac{\partial X^{l-1}}{\partial y^{l-1}}(y_1, x) = 0.$$

Ceci posé, soit $l_1 - 1, \ldots l_k - 1$, un système quelconque d'entiers positifs (moindres que n) dont la somme $\Sigma(l_i - 1)$ est égale à $2n - q$ $[q \leqslant 2n]$. Les conditions pour qu'il existe k solutions remarquables de multiplicité $l_1, \ldots l_k$ se traduisent par : $\Sigma(l_i - 1)$ ou $(2n - q)$ relations algébriques, soit (E), entre les $(2n+1)$ fonctions inconnues λ, μ et k constantes arbitraires $C_1, \ldots C_k$. A chacun de ces systèmes d'entiers $(l_1 - 1), \ldots (l_k - 1)$, correspond donc un type d'équations (2) qui dépend algébriquement de $(q+1)$ fonctions arbitraires $v_1(x), \ldots v_{q+1}(x)$ et de leurs dérivées premières, ainsi que de k constantes.(1) Les fonctions $v_j(x)$ sont par exemple $(q+1)$ des coëfficients λ, μ. On voit

---

(1) Il n'est pas difficile de démontrer que les conditions (E) sont compatibles et distinctes et définissent, par suite, $(2n-q)$, des fonctions λ, μ, en fonction algébrique de $(q+1)$ d'entre elles $v_1, \ldots v_{q+1}$ qu'on peut prendre arbitrairement. On montre de plus, que les (fonctions v_j et les constantes C_i étant prises quelconques) l'équation (2) correspondante est bien irréductible (et par suite de degré q) et que $y(x)$ prend exactement n valeurs autour des points critiques mobiles pourvu que q surpasse 2. Il n'y a d'exception que pour des systèmes particuliers de fonctions $v_j(x)$ et de constantes C_i.

aussitôt que les coefficients b de (2) ne dépendent que des v_j et point de leurs dérivées, en sorte qu'on peut prendre comme fonctions arbitraires les $(q-2)$ coefficients $b_{q-3}, \ldots b_0$: les coefficients $a(x)$ s'expriment algébriquement en fonction des b, $\frac{db}{dx}$, de trois autres fonctions arbitraires, de leurs dérivées premières et de constantes. En épuisant tous les systèmes d'entiers (l_i-1) [positifs et moindres que n), dont la somme est égale à $2n-q$, on obtient ainsi toutes les équations (2) cherchées. Le nombre k atteint sa valeur maxima $2n-q$ pour le système (l_i-1) où tous les l_i sont égaux à 2. Comme il est loisible d'effectuer sur X une transformation homographique (à coefficients constants) il est loisible d'admettre qu'une des valeurs C_i est infinie (si $k \geqslant 1$), une autre nulle (si $k \geqslant 2$), une autre égale à 1 (si $k \geqslant 2$).

II — Proposons-nous maintenant de former toutes les équations (2), de degré q donné, non intégrables algébriquement, dont l'intégrale générale ne prend qu'un nombre fini (inconnu) de valeurs autour des points critiques mobiles.

Pour une telle équation (2), le nombre des valeurs remarquables de la constante est au plus égal à 2. S'il est nul, n est égal à $\frac{q}{2}$; s'il est égal à 1, n est moindre que q. S'il est égal à 2, l'intégrale se laisse mettre sous la forme:

$$(9) \qquad u(x)\left[y-g_1(x)\right]^{i_1} \ldots\ldots \left[y-g_q(x)\right]^{i_q} = C, \qquad (i_1+i_2+\cdots\cdots+i_q=0),$$

et si on prend au hasard les fonctions $u, g_1 \ldots g_q$ et les entiers $i_1 \ldots i_q$ (dont la somme est nulle), l'équation (2) dont (9) définit l'intégrale est une équation de degré q. Le second problème est donc complètement résolu.

Astreignons enfin dans les deux problèmes précédents les coefficients de (2) à être algébriques[1]. Quatre cas sont alors à distinguer:

---

[1] On pourrait aussi bien astreindre les coefficients de (2) à appartenir à toute autre classe donnée de fonctions de x.

suivant que le nombre des valeurs remarquables (distinctes) de C est supérieur à 2, ou égal à 2, 1 ou 0.

Dans le premier cas, l'intégrale de (2) est algébrique ; la solution du problème 1 subsiste sans modification, à cela près que les fonctions arbitraires $v_1 \dots v_{q+1}$ sont astreintes à être algébriques.

Dans le second cas, l'intégrale de (2) est de la forme :

$$C = e^{\int h(x)dx} (y - g_1(x))^{i_1} \dots \dots [y - g_q(x)]^{i_q}, \quad [i_1 + \dots + i_q = 0],$$

où $h, g_1 \dots g_q$ sont algébriques, et en prenant arbitrairement ces $(q+1)$ fonctions algébriques et les entiers (positifs et négatifs) $i_1 \dots i_k$ dont la somme est nulle, on forme immédiatement toutes les équations (1) de degré q qui correspondent à ce cas 2°.

Dans le troisième cas, l'intégrale de (2) peut s'écrire

$$u = \frac{y^{q-s} + A_{q-1}(x) y^{q-s-1} + \dots + A_1(x) y}{(y-g_1)^{i_1} \dots (y - g_s(x))^{i_s}}, \quad \text{avec} \quad \frac{du}{dx} = \alpha u + \beta, \quad \left[\underset{s \leq q}{i_1 + i_2 + \dots + i_s = q - s}\right],$$

les entiers i étant tous positifs, et les A, g, α, β étant algébriques en x. En prenant ces fonctions arbitrairement et en remplaçant u en y, x, dans l'équation linéaire, on forme toutes les équations (2) répondant au 3°.

Dans le quatrième cas, $2n$ est égal à q, et les équations (2) s'obtiennent en remplaçant dans l'équation de Riccati : $\frac{du}{dx} = \alpha u^2 + \beta u + \gamma$, [où α, β, γ sont algébriques en x], u par $\frac{y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \dots + A_1 y}{B_{n-1} y^{n-1} + \dots + B_1 y + 1}$, où les A, B sont des fonctions algébriques quelconques de x.

Observons que dans les cas 2°, 3°, 4°, la solution n'exige pas qu'on se donne l'entier n. Le problème qui consiste à former toutes les équations (2) algébriques en x et de degré donné q en y, dont l'intégrale générale est une fonction transcendante $y(x)$ qui ne prend qu'un nombre fini (inconnu) de valeurs autour des points critiques mobiles, est donc complètement résolu.

Équations différentielles de degré quelconque — Considérons maintenant une équation différentielle quelconque algébrique et irréductible en y', y :

$$(1) \qquad 0 = F(y', y, x) \equiv A_m(y, x)\, y'^m + A_{m-1}(y, x)\, y'^{m-1} + \cdots + A_0(y, x),$$

où les A sont des polynômes en y. Pour simplifier le langage, nous supposerons encore que les coefficients des A_j sont des fonctions algébriques de x. De plus, il nous est loisible, moyennant une transformation homographique effectuée sur y, d'admettre que $z = 0$ n'est ni une intégrale de la transformée de (1) en $\frac{1}{y} = z$, ni un point critique (pour $\bar{x}$ quelconque) de la fonction $z'(z, \bar{x})$. Dans ces conditions, si q est le degré de A_0 en y, A_1 est de degré $q-2$ (au plus), A_2 de degré $q-4$, etc, A_m de degré $q-2m$.

Si l'intégrale $y(x)$ acquiert exactement n valeurs autour des points critiques mobiles, trois cas sont possibles, suivant que le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est supérieur à 1, égal à 1, ou nul. La question, dans l'hypothèse $\varpi > 1$, est complètement résolue ; pour $\varpi = 1$, l'équation (1) est ramenée algébriquement à une quadrature $\int P(y, x)\, dy + Q(y, x)\, dx = C^{te}$, et tout revient à reconnaître si l'intégrale abélienne de première espèce, $\int P(y, \bar{x})\, dy$ n'a que deux périodes : nous avons insisté, dans la dernière leçon, sur la difficulté de ce problème. Reste enfin l'hypothèse de $\varpi = 0$: dans cette hypothèse, l'intégrale se laisse mettre sous la forme :

$$(2) \qquad 0 = \gamma^m P_m(y, x) + \gamma^{m-1} P_{m-1}(y, x) + \cdots + \gamma P_1(y, x) + P_0(y, x)$$
$$\equiv G(\gamma, y, x),$$

avec :

$$(3) \qquad \gamma' = L\gamma^2 + M\gamma + N,$$

les P_j désignant des polynômes en y de degré n, dont les coefficients, ainsi que L, M, N, dependent algébriquement des coefficients de l'équation (1): ce sont donc ici des fonctions algébriques de x.

Quand on remplace, dans (2), γ par l'intégrale de (3), $\gamma = \dfrac{u(x)C + v(x)}{u_1(x)C + v_1(x)}$, où C est une constante arbitraire, il vient:

$$(4) \qquad o = C^m \Pi_m(y, x) + C^{m-1}\Pi_{m-1}(y,x) + \dots\dots + \Pi_o(y,x) \equiv \Gamma(C, y, x),$$

où les Π_j sont des polynômes de degré n en y.

Si on différentie l'équation (4) on trouve:

$$(5) \qquad o = C^m\left[\frac{\partial \Pi_m}{\partial y} y' + \frac{\partial \Pi_m}{\partial y}\right] + C^{m-1}\left[\frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial x}\right] + \dots + \frac{\partial \Pi_o}{\partial y} y' + \frac{\partial \Pi_o}{\partial x}$$
$$\equiv \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} \equiv \Gamma'(C, y, x).$$

Eliminons C entre (4) et (5) en formant le résultant d'Euler:[1]

$$(6) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \Pi_m & \Pi_{m-1} & \dots & \Pi_1 & \Pi_o & \overbrace{o\ o \ \dots\ o}^{m-1} \\ o & \Pi_m & \dots & \dots & \Pi_1 & \Pi_o\ o \dots o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & \dots & \dots & \Pi_m & \Pi_{m-1}\ \Pi_{m-2} & \dots \Pi_o \\ \Pi'_m & \Pi'_{m-1} & \dots & \Pi'_1 & \Pi'_o & o\ o \dots o \\ o & \Pi'_m & \dots & \dots & \Pi'_1 & \Pi'_o\ o \dots o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & \dots & \dots & \Pi'_m & \Pi'_{m-1}\ \Pi'_{m-2} & \dots \Pi'_o \end{vmatrix} = 0$$

les Π'_j désignant les expressions $\dfrac{\partial \Pi_j}{\partial y} y' + \dfrac{\partial \Pi_j}{\partial x}$.

Δ est un polynôme en y', y:

$$\Delta = \alpha_m(y,x)\, y'^m + \alpha_{m-1}(y,x)\, y'^{m-1} + \dots + \alpha_o(y,x),$$

et comme l'équation $\Delta = o$. doit être équivalente à l'équation irréductible (1), on a nécessairement:

$$\alpha_m = H(y, x) A_m, \quad \alpha_{m-1} = H(y,x) A_{m-1}, \quad \dots \quad \alpha_o = H(y,x) A_o,$$

H désignant un polynôme en y. D'après cela, le degré de Δ en y, est le degré de α_o, et si δ désigne ce degré, r celui de H, on a: $\delta = q + r$.

---

[1] Observons que Δ ne change pas quand on change C en $\frac{1}{C}$.

Je dis maintenant que si $y = g(x)$ est un zéro de l'équation en y' : $H = 0$, la fonction $y = g(x)$ est une intégrale de (1) ou une racine du discriminant D de Γ relatif à C.

En effet, d'après une proposition connue de la théorie de l'élimination, si $C_1(y, x), \ldots\ldots C_m(y,x)$ sont les m valeurs de C qui correspondent d'après (4) à des valeurs quelconques de x, y, on a identiquement :

$$\Delta \equiv (\Pi_m)^m \times \Gamma'(C_1, y, x) \times \Gamma'(C_2, y, x) \ldots\ldots \Gamma'(C_m, y, x);$$

par hypothèse, $y = g(x)$ annule Δ, quel que soit y'. Si $y = g(x)$ est un zéro de Π_m, la fonction $g(x)$ est une intégrale de (1) correspondant à la valeur $C = \infty$; (autrement dit, $y = g(x)$ vérifie la relation (4) où on a changé C en $\frac{1}{C'}$, pour $C' = 0$). Sinon, $y = g(x)$ annule au moins un des facteurs $\Gamma'(C_j, y, x)$ de Δ, par exemple :
$\Gamma'(C_1, y, x) \equiv \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} y' + \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)_{C = C_1}$; il faut pour cela et il suffit que les fonctions de y, x : $\frac{\partial \Gamma}{\partial y}(C_1, y, x)$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(C_1, y, x)$ s'annulent identiquement pour $y = g(x)$; or la relation (4) entraîne la suivante :

$$(4)' \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx + \frac{\partial \Gamma}{\partial y} dy + \frac{\partial \Gamma}{\partial C} dC = 0,$$

et si $\bar{C}(x)$ désigne la fonction de x obtenue en remplaçant, dans $C_1(y,x)$, y par $g(x)$, cette fonction d'après (4') vérifie la condition :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial C}(\bar{C}, g(x), x)\, d\bar{C} = 0;$$

donc, ou bien $d\bar{C}$ est identiquement nul, $\bar{C}(x)$ est une constante absolue c, et $y = g(x)$ est une intégrale, ou bien $\frac{\partial \Gamma}{\partial C}$ est identiquement nul pour $y = g(x)$, $C = \bar{C}(x)$, et la fonction $y = g(x)$ est une racine du discriminant D de Γ par rapport à C. C.Q.F.D.

Ce point établi, supposons d'abord que $y = g(x)$, annule identiquement au moins, un des facteurs $\Gamma'(C_j, y, x)$ de Δ, par exemple le facteur $\Gamma'(C_1, y, x)$.

Deux cas sont à distinguer, suivant que $\frac{\partial \Gamma}{\partial C}(C, y, x)$ est ou non différent de zéro

pour $y = g(x)$, $C = C_1(g,x) \equiv \bar{C}(x)$. Plaçons-nous d'abord dans le premier cas : $\bar{C}(x)$ se réduit alors nécessairement à une constante absolue c, et l'équation (4) admet une racine $C_1(y,x)$ et une seule qui se réduit à c pour $y = g(x)$: soit $C_1 = \varphi(y,x)$, où φ est une fonction holomorphe de y pour $y = g(x)$. L'équation (4) peut s'écrire :

$$0 = \Gamma \equiv \left[C - \varphi(y,x)\right] \; \Gamma_1(C,y,x),$$

Γ_1 étant un polynôme de degré $(m-1)$ en C dont les coefficients sont holomorphes en y pour $y = g(x)$; de plus Γ_1 ne s'annule pas identiquement pour $y = g(x)$, $C = \bar{C}(x)$. Si maintenant on calcule Γ', on a :

$$\Gamma' \equiv -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Gamma_1 + \left[C - \varphi(y,x)\right]\Gamma_1',$$

et on voit que $\Gamma'(C_1, y, x)$ se réduit à $-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Gamma_1(C_1, y, x)$; Γ_1 ne s'annulant pas pour $y = g(x)$, $C = c$, le raisonnement de la page 146 montre que si $y - g(x)$ entre en facteur à la puissance s dans $\Gamma'(C_1, y, x)$, (c'est-à-dire dans $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et dans $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$), $y = g(x)$ est racine d'ordre exactement égal à $s+1$ de l'égalité $c = \varphi(y,x)$.

Supposons maintenant que $y = g(x)$ et $C = C_1(g,x) \equiv \bar{C}(x)$ annulent identiquement $\frac{\partial\Gamma}{\partial C}(C,y,x)$. La racine $C_1(y,\bar{x})$ fait toujours partie d'un groupe de ν racines de (4), soit $C_1(y,\bar{x}), \ldots\ldots C_\nu(y,\bar{x})$ qui se permutent autour du point $y = g(\bar{x})$, et se laissent développer suivant les puissances croissantes de $(y - g(x))^{\frac{1}{\nu}} = z^{\frac{1}{\nu}} = Z$, soit :

$$C_1(y,x) = \bar{C}(x) + \alpha(x) Z^{\mu} + \cdots\cdots = C(x) + \varphi(Z,x),$$

$$C_2(y,x) = \bar{C}(x) + \varphi(\varepsilon Z, x), \ldots\ldots\ldots\ldots C_\nu(x) = \bar{C}(x) + \varphi(\varepsilon^{\nu-1} Z, x),$$

ε désignant une racine ν^e de l'unité.

Posons maintenant :

$$\Gamma_0 = \left[C - C_1(y,x)\right] \ldots \left[C - C_\nu(y,x)\right], \quad \Gamma_1 = \left[C - C_{\nu+1}(y,x)\right] \ldots \left[C - C_m(y,x)\right] \Gamma'''_m,$$

on a :

$$\Gamma' \equiv \Gamma_0(C,y,x)\,\Gamma_1'(C,y,x);$$

Γ_0 et Γ_1 sont deux polynômes en C dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de y pour $y = g(x)$; mais ici $\Gamma_1(C,y,x)$ peut

s'annuler identiquement pour $y = g(x)$, $C = \bar{C}(x)$. Évaluons à quel degré σ le facteur $y - g(x)$ entre dans l'expression :

$$\Delta_1 = \Gamma'(C_1, y, x) . \Gamma'(C_2, y, x) \ldots\ldots \Gamma'(C_\nu, y, x),$$

la partie de Δ relative aux ν racines $C_1, \ldots C_\nu$.

Nous avons : $\qquad \Gamma'(C, y, x) \equiv \Gamma_0' \Gamma_1 + \Gamma_0 \Gamma_1'^{*}$,

et comme Γ_0 s'annule quand on y remplace C par $C_1(y,x)$ ou $C_2(y,x)$, ... ou $C_\nu(y,x)$, on voit que Δ_1 coïncide avec le produit :

$$\Gamma_1(C_1, y, x) \ldots \Gamma_1(C_\nu, y, x) \; \Gamma_0'[C_1, y, x] \ldots \Gamma_0'(C_\nu, y, x).$$

Comparons ce résultat avec celui qu'on obtient en étudiant de la même manière le discriminant D de Γ par rapport à C. Si on forme le résultant d'Euler entre $\Gamma = 0$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial C} = 0$, ce résultant est un polynôme en y qui est égal identiquement à :

$$(\Pi_m)^{m-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial C}(C_1, y, x) \ldots\ldots\ldots \frac{\partial \Gamma}{\partial C}(C_m, y, x).$$

Mais si, au lieu de procéder ainsi, on rend Γ homogène en C, C', en remplaçant C par $\frac{C}{C'}$, et multipliant par C'^m, le résultant d'Euler obtenu en éliminant C, C', entre les deux équations $\frac{\partial \Gamma}{\partial C} = 0$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial C'} = 0$ est un certain polynôme D en y, qui, annulé, donne la condition nécessaire et suffisante pour que Γ renferme au moins un facteur $\alpha C + \alpha' C'$ à une puissance plus grande que (1) : d'après un théorème élémentaire, ce polynôme $D(y)$ est égal au précédent divisé par Π_m, et on a identiquement :

$$D \equiv (\Pi_m)^{m-2} \frac{\partial \Gamma}{\partial C}(C_1, y, x) \ldots\ldots \frac{\partial \Gamma}{\partial C}(C_m, y, x).$$

Cherchons à quelle puissance s figure le facteur $y - g(x)$ dans le produit partiel :

$$D_1 = \frac{\partial \Gamma}{\partial C}(C_1, y, x) \ldots\ldots \frac{\partial \Gamma}{\partial C}(C_\nu, y, x).$$

En raisonnant comme tout à l'heure, on voit que D_1 coïncide avec le produit :

$$\Gamma_1(C_1, y, x) \ldots \Gamma_1(C_\nu, y, x) \times \frac{\partial \Gamma_0}{\partial C}(C_1, y, x) \ldots \frac{\partial \Gamma_0}{\partial C}(C_\nu, y, x);$$

si donc s et σ' sont les degrés auxquels figure le facteur $y - g(x)$,

dans les deux produits :

$$D_0 = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial C}(C_1, y, x) \ldots\ldots \frac{\partial \Gamma_0}{\partial C}(C_\nu, y, x), \text{ et } \Delta_0 = \Gamma_0'(C_1, y, x) \ldots\ldots \Gamma_0'(C_\nu, y, x),$$

on a : $s - \sigma = s' - \sigma'$.

Comparons s' et σ' ; pour cela, distinguons trois cas :

1°, $\bar{C}(x)$ n'est pas une constante et μ est au moins égal à ν [dans le développement $C_1(y,x) = \bar{C}(x) + \alpha Z^\mu + \ldots$]. D_0 est le produit de ν termes de la forme :

$$\Phi_1 = [C_1(y,x) - C_2(y,x)][C_1(y,x) - C_3(y,x)] \ldots [C_1(y,x) - C_\nu(y,x)],$$

$$\Phi_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc};$$

quant à Δ_0, il ne diffère de D_0 qu'en ce que chaque facteur Φ est multiplié par une expression de la forme :

$$(7) \qquad -\bar{C}'(x) - \frac{\mu}{\nu}\alpha(x) z^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}[y' - g'(x)] + \ldots$$

expression qui ne contient z ni en facteur ni en dénominateur : en effet, pour $\mu > \nu$, z n'est pas en facteur puisque $\bar{C}'(x)$ n'est pas nul, et pour $\mu = \nu$, le coefficient de y' est $-\alpha(x)$. On a donc, dans ce cas, $\sigma' = s'$ et par suite $s = \sigma$.

2°. $\bar{C}(x)$ n'est pas une constante, mais μ est moindre que ν. — Δ_0 ne diffère de D_0 qu'en ce que les ν facteurs Φ sont multipliés par les expressions (7) qui sont de la forme :

$$\frac{[-\frac{\mu}{\nu}\alpha(x) + \ldots][y' - g'(x)] + z^{\frac{\nu-\mu}{\nu}}[-\bar{C}_0(x) + \ldots]}{z^{\frac{\nu-\mu}{\nu}}};$$

il suit de là que $s' = \sigma' + \nu - \mu$, ou encore que $s = \sigma + \nu - \mu$. Dans ce cas, $y = g(x)$ est une intégrale singulière de (1) ; en effet considérons la branche de y' qui correspond à la branche $C_1(y,x)$, [on sait que y' s'exprime rationnellement en fonction de C, y, soit $y' = r(C, y, x)$] ; cette branche est de la forme :

$$(8) \qquad y' - g'(x) = [y - g(x)]^{1-\frac{\mu}{\nu}}[h(x) + \ldots], \quad \mu < \nu;$$

$y = g(x)$ vérifie donc l'équation (1), et de plus cette intégrale n'est

pas donnée par l'intégrale générale de la branche (8) ; autrement, $C(x)$ serait une constante.

3°. $C(x)$ est une constante — Là encore Δ ne diffère de D_0 qu'en ce que les facteurs Φ sont multipliés par les ν expressions (7) qui sont de la forme :

$$[y - g(x)]^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}\left[-\frac{\mu}{\nu}\,\alpha(x)\,[y' - g'(x)] + \dots\right],$$

en sorte qu'on a : $s' = \sigma' + \nu - \mu$, et $s = \sigma + \nu - \mu$, ce qui peut s'écrire encore : $s = \sigma + \nu - 1 - (\mu - 1)$.

Cette discussion laisse de côté le cas où la valeur $y = g(x)$ rend infinies une ou plusieurs valeurs de C, (quel que soit x). Mais on peut toujours admettre que $H(y, x)$ ne renferme aucun facteur commun avec $\Pi_m(y, x)$: en effet, considérons toutes les racines $y = g(x)$ de $H = 0$, pour lesquelles l'équation (4) admet des racines $C = c$ indépendantes de x (finies ou infinies). Il nous est loisible de substituer à la constante C la constante $C' = \frac{1}{C+h}$, (h ne coïncidant avec aucune des valeurs c), et de raisonner sur C' comme sur C. Or ni Δ, ni D ne sont modifiés par cette subtitution, après laquelle H et Π_m n'ont plus de facteur commun.

Règle — Cette discussion entraîne la règle suivante : Soit $y = g(x)$ une intégrale ordinaire de (1), ou une racine du discriminant D. Si $y = g(x)$ est une intégrale qui n'annule pas D, l'équation (4), où on fait $y = g(x)$, admet au moins une racine $C = C_1$ indépendante de x (C_1 pouvant être infinie) ; il peut exister d'ailleurs plusieurs racines constantes $C = C_1, \dots C = C_j$. Soit μ_l l'ordre de multiplicité de la racine $y = g(x)$ de l'équation (4) pour $C = C_l$, $[l = 1, 2, \dots j]$, et soit σ la somme $\mu_1 - 1 + \mu_2 - 1 + \dots + \mu_j - 1$: le facteur $y - g(x)$ entre dans H exactement à la puissance σ.

Si $y = g(x)$ est une racine d'ordre s de $D = 0$, deux

cas sont à distinguer :

1°. — Quand $y = g(x)$ n'est ni une intégrale ordinaire, ni une intégrale singulière de (1), le facteur $y - g(x)$ entre dans H exactement à la puissance s.

2°. — Quand $y = g(x)$ est une intégrale (singulière ou non) de (1), la règle est plus compliquée ; on considère d'abord toutes les branches de $y'(y, x)$ égales à $g'(x)$ pour $y = g(x)$; ces branches se laissent répartir en groupes de branches permutables autour du point $y = g(x)$; un de ces groupes sera formé de ν branches de la forme

$$y' = g'(x) + [y - g(x)]^{\frac{\lambda}{\nu}} [h(x) + \cdots], \lambda > 0, h \neq 0.$$

On fait la somme de tous les nombres λ relatifs à chaque groupe en remplaçant toutefois par $\nu - 1$ ceux des nombres λ qui dépassent $\nu - 1$; soit $\mathcal{H}$ la somme ainsi obtenue.

Soit maintenant $c, c' \ldots$ les racines constantes C de l'équation (4) où on fait $y = g(x)$, et soit $\alpha, \alpha' \ldots$ les degrés de multiplicité de la racine $y = g(x)$ de l'équation (4) où on fait successivement $C = c$, $C = c'$, ... Les racines $C(y, \bar{x})$, égales à c pour $y = g(\bar{x})$, se partagent en β groupes de racines permutables autour du point $y = g(\bar{x})$; de même, les racines $C(y, \bar{x})$, égales à c' pour $y = g$, se répartissent en β' groupes, etc. Si on pose $\sigma = s - \mathcal{H} + \alpha - \beta + \alpha' - \beta' + \cdots$, $y - g(x)$ figure dans H exactement[1] à la puissance σ.

---

(1) En effet, considérons les racines $C(y, x)$ égales par exemple à c pour $y = g(x)$, et les β groupes en lesquels elles se distribuent : le premier groupe renfermera ν_1 racines de la forme $C = c + \alpha_1(x)[y - g]^{\frac{\mu_1}{\nu_1}} + \ldots\ldots$; le deuxième groupe renfermera ν_2 racines $C = c + \alpha_2(x)[y - g]^{\frac{\mu_2}{\nu_2}} + \ldots\ldots$, etc. Si $\mathcal{H}'$ est la somme de tous les entiers λ, introduits plus hauts, moindres que $\nu - 1$, on sait que $y - g(x)$ figure

Conclusion — Comparons, pour conclure, les degrés de Δ et D en y. Le degré de Δ est, avons-nous dit, le degré du terme indépendant de y', c'est à dire le degré du déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \Pi_m & \Pi_{m-1} & \ldots & \Pi_1 & \Pi_0 & 0 & \overset{m-1}{0} & \ldots & 0 \\ 0 & \Pi_m & \ldots & \Pi_2 & \Pi_1 & \Pi_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & & & \\ \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial x} & \ldots & \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Pi_0}{\partial x} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} & \ldots & & & & \frac{\partial \Pi_0}{\partial x} \end{vmatrix}$$

Si on rend Γ homogène en y, z en changeant y en $\frac{y}{z}$ et multipliant par z^n, Δ est une fonction homogène en y, z de degré $2mn$: quand on y fait $z = 1$, Δ' est donc de degré $2mn$ en y, à moins que z ne soit en facteur dans Δ' à une certaine puissance σ_0, auquel cas $\delta = 2mn - \sigma_0$. Mais, dans ce cas, quand on substitue à y la fonction $z = \frac{1}{y}$, le nouveau déterminant (Δ) ainsi obtenu renferme z en facteur à la puissance σ_0 dans son terme indépendant de z'. Comme $z = 0$, par hypothèse, n'est pas une intégrale de la transformée $(1)'$ de (1) en $\frac{1}{y} = z$, z doit être en facteur, à la puissance σ_0 au moins, dans les autres termes de (Δ); et comme $z = 0$ n'est pas non plus une intégrale singulière de $(1)'$, z est aussi en facteur à la puissance σ_0 exactement, dans le nouveau discriminant (D).

D'autre part, si on écrit le discriminant D de Γ après avoir rendu Γ homogène et de degré n en y, z, ce discriminant

---

dans H au degré $\sigma = s - \mathcal{K}' + \Sigma(\mu_1 - \nu_1 + \cdots + \mu_\beta - \nu_\beta) = s - \mathcal{K}' - \Sigma[(\nu_1 - 1) + \cdots + (\nu_\beta - 1)] + \Sigma[(\mu_1 - 1) + \cdots + (\mu_\beta - 1)]$. les sommes étant étendues à toutes les valeurs $c, c' \ldots$ de C; comme $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\beta$ est égal à α, on voit que $\sigma = s - \mathcal{K} + \alpha - \beta + \alpha' - \beta' + \cdots$; observons que toutes les quantités $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$, ... sont positives ou nulles.

$$D = \begin{vmatrix} m\Pi_m & \cdots & 2\Pi_2 & \Pi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m\Pi_m & \cdots & 2\Pi_2 & \Pi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Pi_{m-1} & \cdots & (m-1)\Pi_1 & m\Pi_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & \cdot & & \Pi_{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & m\Pi_0 \end{vmatrix}$$

est un polynome homogène en y, z de degré $2(m-1)n$. Si on fait $z=1$, D est donc de degré $2(m-1)n$ en y, à moins que z ne soit en facteur dans D à la puissance s_0, auquel cas, $d = 2(m-1)n - s_0$; mais si on fait $y=1$, D devient (D), et comme (D) doit renfermer z à la puissance σ_0, on a $s_0 = \sigma_0$. D'où la relation $\delta = d + 2n$.

Nous sommes maintenant en état d'écrire l'égalité fondamentale à laquelle nous voulons parvenir. Considérons d'abord toutes les racines $y = g(x)$ du discriminant de F relatif à y', qui vérifient en même temps l'équation différentielle, et formons les développements de toutes les branches de la fonction $y'(y,x)$ qui coïncident avec $g'(x)$ pour $y = g(x)$. Ces branches se répartissent en groupes de racines permutables autour de $y = g$: soit :

$$y' = g'(x) + h(x)(y-g)^{\frac{\lambda}{\nu}} + \cdots$$

le développement qui définit un de ces groupes ; λ désigne un entier positif, et ν le nombre des branches du groupe. Faisons la somme de tous les entiers λ relatifs à chacun de ces groupes et cela pour toutes les fonctions $y = g(x)$ en question, en remplaçant toutefois par $(\nu-1)$ ceux des nombres λ qui dépassent le nombre correspondant $(\nu-1)$. Soit ϱ la somme ainsi obtenue : l'entier ϱ se calcule à l'aide d'un nombre fini d'opérations linéaires sur l'équation donnée (1).

D'autre part, la relation $F=0$, pour C quelconque, définit une fonction $y(x)$ ayant n valeurs distinctes

permutables autour des points critiques mobiles. Il ne saurait y avoir d'exception que pour certaines valeurs particulières $C_1, C_2, \ldots$ de la constante C. Appelons encore valeurs remarquables de C, les valeurs constantes C_j pour lesquelles la relation $\Gamma = 0$ a quel que soit x, des racines multiples $y = g(x)$. Représentons par $a_j, b_j, \ldots c_j$ les ordres de multiplicité des l racines distinctes $y = g_j(x), \ldots y = k_j(x)$ de l'équation (4) où $C \equiv C_j$, et par $a'_j \ldots c'_j$ le nombre de groupes distincts en lesquels se répartissent les racines $C(y, x)$ de (4), égales (pour $y = g_j(x), \ldots$ ou $y = k_j(x)$) à C_j. Nous avons les égalités :

$$\delta = d + 2n = q + r, \quad r \text{ désignant le degré en } y \text{ de } H(y, x),$$

et

$$r = d - \rho + \Sigma\, (a_j - a'_j + b_j - b'_j + \ldots + c_j - c'_j),$$

la somme Σ étant étendue à toutes les valeurs remarquables de C. On déduit de là l'égalité fondamentale :

$$(9) \qquad q - \rho = 2n - \Sigma\, (a_j - a'_j + b_j - b'_j + \ldots + c_j - c'_j)$$

Raisonnons maintenant comme dans le cas du premier degré. Si, pour $C = C_j$, la racine $y = g\ (x)$ est racine multiple de (4), pour $\gamma = \gamma_j(x)$ [intégrale correspondante de l'équation de Riccati (3)] la racine $y = g(x)$ de (2) est racine multiple de même ordre, et vérifie par conséquent la relation $K(y, x) = 0$ obtenue en éliminant γ entre $G = 0$, $\frac{\partial G}{\partial y'} = 0$. Les coefficients de cette relation algébrique en y dépendent algébriquement de ceux de (1), c'est à dire sont ici des fonctions algébriques de x. L'intégrale $y = g(x)$, et par suite $\gamma_j(x)$, sont donc algébriques en x. Il ne peut, ~~en conséquence,~~ exister plus de deux valeurs remarquables de la constante C, quand l'intégrale $y(x)$ de (1) est transcendante : s'il en existe trois, en effet, l'intégrale $\gamma(x)$ de (3) est algébrique, par suite celle de (1) d'après (2).

Quand l'intégrale de (1) est transcendante, nous avons, d'après cela, trois cas à examiner :

1° — Le nombre k des valeurs remarquables de C est nul. On a alors: $q-\rho=2n$

2° — k est égal à 1. On a alors, (si on observe que $a_1+b_1+\dots+c_1$ est égal à n et que $a'_1+b'_1+\dots+c'_1$ est au moins égal au nombre l des racines distinctes $y=g(x)$ de (4) pour $C=C_1$): $q-\rho \geqslant n+l$, donc $n \leqslant q-\rho-l$, et a fortiori : $n \leqslant q-1$.

3° — k est égal à 2. — Si l_1, l_2 sont les nombres des racines distinctes de l'équation (4) en y pour $C=C_1$ et $C=C_2$, on a: $q-\rho \geqslant l_1+l_2$, d'où: $l_1+l_2 \leqslant q-\rho \leqslant q$. Dans ce dernier cas, nous pouvons toujours admettre que C_1 et C_2 sont 0 et ∞ ; or considérons la fonction $C[y,x]$ définie par (4) et la fonction $\frac{\partial}{\partial y}\log C(y,x) \equiv S(y,x)$; S est une fonction algébrique (à m valeurs au plus) de y, et n'admet (pour x quelconque) que l_1+l_2 infinis, tous du premier ordre et à résidus entiers ; pour $y=\infty$, S tend vers zéro, (puisque C n'est pas infini ou nul). Il suit de là que S vérifie une équation algébrique de degré m en S, de degré l_1+l_2 en y, donc de degré en y au plus égal à $q-\rho$.

D'autre part, S est un multiplicateur M du binôme $dy-y'dx$, (où y' est la fonction $f(y,x)$ définie par (1)). On sait toujours reconnaître algébriquement s'il existe des multiplicateurs M vérifiant une relation algébrique de degré m en M, de degré $q-\rho$ en y, dont les coefficients sont des fonctions inconnues de x. S'il existe deux tels multiplicateurs distincts, leur quotient est une intégrale première de (1) rationnelle en y, et fait connaître une limite du nombre n. S'il n'existe qu'un tel multiplicateur M[1] (défini à un facteur constant près), ce multiplicateur dépend d'une quadrature logarithmique, qui donne, par exemple, un de ses résidus $\alpha(x)$:

$$\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} = T(x);$$

mais comme ici ce résidu doit être un entier, T doit se réduire à zéro ; cette condition remplie, l'équation (1) est ramenée

---

(1) M ne doit avoir que des pôles simples.

algébriquement à une quadrature de différentielle totale :

$$J = \int M(y,x)\,[\,dy - y'dx\,] = C^{te}.$$

Pour que l'intégrale $y(x)$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, il faut encore que l'intégrale $\int M(y,\bar{x})\,dy$ [qui est une intégrale abélienne attachée à la courbe (1)] n'ait qu'une période. Quand cette condition est remplie, soit ω la période ; la relation :

$$e^{\frac{2i\pi}{\omega} J(y,x)} = C^{te},$$

est algébrique en y, l'équation (1) s'intègre alors à l'aide de la quadrature $u = e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\int M(y_0,x)\,y'(y_0,x)\,dx}$ Pour que $y(x)$ soit une fonction transcendante, il faut que $u(x)$ ne soit pas algébrique

De même, dans le cas où le nombre n est limité par les considérations précédentes, l'intégrale n'est pas forcément transcendante ; il faut que l'équation de Riccati auxiliaire ne s'intègre pas algébriquement. On sait reconnaître s'il en est ainsi, ou on ramène l'équation à une quadrature logarithmique (voir page 152).

Dans le cas de $\varpi > 1$ (voir page 155), $y(x)$, est toujours algébrique, dans le cas de $\varpi = 1$, il faut et il suffit, pour que $y(x)$ soit transcendant, que la différentielle totale $\int P(y,x)\,dy + Q(y,x)\,dx = C$, qui intègre l'équation (1), ne soit pas une différentielle totale de première espèce[1] à deux périodes.

En définitive, étant donnée une équation (1) quelconque :

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0,$$

algébrique en y', y, x, proposons-nous de reconnaître si l'intégrale $y(x)$ de cette équation est une fonction transcendante qui prend un nombre fini (non donné) de valeurs autour des points critiques mobiles. On sait toujours reconnaître

---

[1] L'intégrale abélienne $\int P\,dy$ (où x est fixe) doit être de première espèce et à deux périodes.

s'il en est ainsi, ou bien on ramène algébriquement l'équation (1) aux quadratures. Dans ce cas, la question revient à reconnaître si une certaine équation $F_1(u', u) = 0$, (algébrique en u', u) a comme intégrale une fonction transcendante à un nombre fini de valeurs. La question posée serait résolue dans tous les cas si on savait la résoudre pour toute équation (1) donnée où x ne figure pas explicitement.

Le cas où x ne figure pas, qui semblait à priori le cas le plus simple, est donc en réalité un cas de réduction singulier pour lequel les méthodes analytiques développées ici sont défaut et qui exige des recherches arithmétiques.

Si au lieu de supposer les coefficients de (1) algébriques, on admet que ce sont des fonctions analytiques quelconques, les considérations précédentes résolvent la question suivante:

« Etant donnée une équation (1), reconnaître si son intégrale est une fonction qui ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de valeurs, sans se réduire à une combinaison algébrique des coefficients[1] de (1). »

On sait déterminer une limite du nombre n des valeurs de $y(x)$ (permutables autour des points mobiles), ou bien on ramène l'équation aux quadratures. Dans ce cas exceptionnel, le problème est encore ramené au problème analogue relatif à une équation (1), où x ne figure pas.

Enfin, les considérations précédentes, et en particulier l'égalité (9) de la page 167, permettent de résoudre les problèmes réciproques (voir page 154), et de former algébriquement toutes les équations $F = 0$ de degré donné en y', y, dont l'intégrale générale prend un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles, ou encore toutes les équations $F = 0$, de degré donné en y', y et algébriques en x, dont l'intégrale est transcendante et ne prend qu'un nombre fini (inconnu) de valeurs, autour des points critiques mobiles.

---

(1) et de leurs dérivées

Onzième Leçon

De l'intégration algébrique des équations du premier ordre

Nous nous sommes occupés dans la leçon précédente du cas où l'intégrale générale est une fonction transcendante, qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles. Proposons-nous maintenant, d'étudier le cas où l'intégrale générale est algébrique. Sans arriver dans ce cas à des résultats aussi précis que dans le cas transcendant, nous pourrons du moins, en combinant les méthodes précédentes avec d'autres considérations, obtenir quelques conséquences importantes.

Pour que l'intégrale de l'équation :

(1) $$F(y', y, x) = 0,$$

(algébrique en $y'y$), soit une fonction algébrique de x, il faut d'abord que la relation (1) soit algébrique en x. Cette condition remplie, trois circonstances peuvent se présenter dans l'hypothèse où l'intégrale $y(x)$ est effectivement algébrique :

1°. _ Le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est plus grand que 1. Ce cas a été élucidé algébriquement.

2°. _ Le genre ϖ est égal à 1. Dans ce cas, l'équation (1) se ramène à une quadrature :

$$J \equiv \int \frac{P(y', y, x)}{F'_{y'}} (dy - y'dx) = C^{te}$$

où l'intégrale abélienne de première espèce $\int \frac{P dy}{F'_{y'}}$ (où x est constant) doit n'avoir que deux périodes ; cette condition remplie, soit : ω, ω' les deux périodes et $sn_{k^2}\, gz$, la fonction elliptique qui a

ces deux periodes : l'intégrale est définie par une relation algébrique (entre y et la constante y_0) qui dépend algébriquement de $sn_{k^2}\, gu$, si $u(x)$ désigne la fonction $\int \frac{P_{y'}}{F_{y'}} dx$ où on donne à y une valeur numérique α. Pour que l'intégrale $y(x)$ soit algébrique, il faut et il suffit que la fonction $v(x) = sn\, gu$ soit algébrique, autrement dit que $u(x)$ soit une intégrale abélienne de première espèce à deux périodes, et admette un parallélogramme de périodes commun avec $sn_{k^2}\, gz$ (ce parallélogramme peut n'être pas le plus simple pour les deux systèmes de périodes]. Ces conditions se résument évidemment ainsi : il faut et il suffit que l'intégrale de différentielle totale $J(y,x)$ soit de première espèce et n'ait que deux périodes.

3° — Le genre ϖ est nul. Nous savons, dans ce cas, que l'intégrale peut s'écrire

$$C^m P_m(y,x) + C^{m-1} P_{m-1}(y,x) + \cdots + P_0(y,x) = 0,$$

les P étant des fonctions algébriques de x et des polynômes en y de degré n (n désigne le nombre des branches de $y(x)$ qui se permutent autour des points critiques mobiles]. Si le nombre des valeurs remarquables de C ne pouvait, ici encore, dépasser deux, il n'y aurait qu'à appliquer la même méthode que dans la leçon précédente. Mais il est facile au contraire de former des exemples où le nombre des valeurs remarquables de C égale ou dépasse 3. Il n'est donc plus possible de limiter n de cette manière. Nous allons indiquer deux procédés qui permettent dans des cas étendus de limiter n : le premier (très élémentaire) se rattache à la géométrie énumérative ; le deuxième n'est que le développement plus approfondi de la

méthode appliquée plus haut au cas transcendant. Ayant surtout en vue de faire comprendre l'esprit de ces deux méthodes je me bornerai à considérer les équations (1) résolues par rapport à y':

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)},$$

où X, Y sont deux polynômes en x, y sans diviseurs communs.

Première méthode — Nous pouvons faire jouer à x, y un rôle symétrique, et les regarder comme les coordonnées (réelles ou imaginaires) d'un point du plan des x, y. Une intégrale particulière quelconque de (2) définira (par hypothèse) une courbe algébrique d'un certain degré n. Le raisonnement de la page 43 montre que l'équation de cette courbe peut recevoir la forme:

$$(3) \qquad \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = C,$$

P et Q étant deux polynômes en x, y de degré n, C une constante arbitraire, et la courbe $P - C_0 Q = 0$ étant indécomposable (sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles de C). Nous dirons que la courbe (3), où C a une valeur constante quelconque, définit l'intégrale de (2), et nous donnerons le nom de courbes intégrales aux courbes (3) qui correspondent à une valeur particulière de C.

La méthode que nous allons indiquer, consiste à évaluer, d'après l'équation différentielle, la classe et le genre d'une courbe intégrale, ainsi que le nombre des points d'intersection de deux courbes

intégrales.

Pour éviter toute difficulté relative aux points à l'infini du plan des x, y, nous admettrons qu'on a effectué sur les variables x, y la transformation homographique [1] à deux variables la plus générale. Les deux polynômes X, Y sont alors de même degré q en x, y : si on change x en $\frac{1}{\xi}$ et y en $\frac{\eta}{\xi}$, l'équation (2) devient,

[en posant : $X_1 \equiv \xi^q X\left(\frac{1}{\xi}, \frac{\eta}{\xi}\right) \quad Y_1 \equiv \xi^q Y\left(\frac{1}{\xi}, \frac{\eta}{\xi}\right)$],

$$\frac{\xi d\eta}{\eta X_1 - Y_1} = \frac{d\xi}{X_1},$$

et comme le degré q ne doit pas changer, $\eta X_1 - Y_1$, est divisible par ξ : autrement dit, on a identiquement :

$$yX - xY \equiv Z,$$

Z étant de degré q seulement en x, y.

---

[1] Il est loisible d'effectuer sur x, y, une transformation rationnelle quelconque : dans les applications toutefois, il sera préférable en général de ne pas faire jouer à x, y un rôle symétrique.

En outre, si on rend X, Y, Z homogènes et de degré q en x, y, z (en changeant x en $\frac{x}{z}$, y en $\frac{y}{z}$, les deux équations $X(x,y,o)=o$, $Z(x,y,o)=o$ n'ont d'autre racine commune que $x=o$, $y=o$, de même que les deux équations $Y(x,y,o)=o$, $Z(x,y,o)=o$. Si on veut étudier les grandes valeurs de x en posant $x=\frac{1}{\xi}$, $y=\frac{\eta}{\xi}$, la nouvelle équation (2) n'admettra aucun point singulier $\xi=\xi_1$, $\eta=\eta_1$, pour lequel ξ_1 soit nul, et la même remarque s'applique à la transformation $x=\frac{\eta}{\xi}$, $y=\frac{1}{\xi}$: tous les points singuliers de l'équation (1), $x=x_1$, $y=y_1$, sont à distance finie.

Soit maintenant x_o, y_o un point quelconque du plan des x, y: par ce point passe une courbe intégrale et une seule. Il n'y a d'exception que pour les points communs aux deux courbes $X=o$, $Y=o$, seuls points d'intersection possibles de deux courbes intégrales, seuls points multiples possibles d'une courbe intégrale, et qui sont tous à distance finie.

Soit $x=o$, $y=o$ un de ces points singuliers. Servons-nous de la méthode de Briot et Bouquet pour reconnaître s'il existe des intégrales $y(x)$ qui s'annulent et soient algébroïdes pour $x=o$. Remplaçons, dans (2), $y(x)$ par le développement:

$$(4) \qquad y=\alpha x^{\frac{\mu}{\nu}}+bx^{\frac{\mu+1}{\nu}}+\dots+x^{\frac{\varrho}{\nu}}\left[l+\varepsilon(x)\right],$$

ε s'annulant avec x. On peut toujours, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques[1] déterminer un ou plusieurs développements (4), arrêtés à une certain terme en $x^{\frac{\varrho}{\nu}}$, les uns dépendant d'une constante arbitraire, les autres à coefficients numériques, et tels qu'à un de ces développements:

$$y=\alpha x^{\frac{\mu}{\nu}}+\dots+lx^{\frac{\varrho}{\nu}},$$

---

[1] Ceci ne résulte pas en toute rigueur de la méthode de Briot et Bouquet, mais c'est là un point facile à compléter.

(où $a, b \dots l'$ sont fixés) ne puisse correspondre qu'une seule intégrale $y(x)$.

Ceci posé, considérons seulement les développements (4) qui dépendent d'une constante arbitraire, soit :

$$(4)' \qquad y = a x^{\frac{\mu}{\nu}} + \dots + k x^{\frac{\rho-1}{\nu}} + x^{\frac{\rho}{\nu}} \left[C' + \varepsilon(x) \right],$$

$a, b, \dots k$ étant numériques et C' désignant une constante arbitraire dont dépend $\varepsilon(x)$. Pour une valeur quelconque C_0 de C, la courbe intégrale (3) possède au moins une branche définie par le développement (4)', où C' a une certaine valeur, mais elle peut en posséder plusieurs, correspondant à λ valeurs distinctes de C', soit $C'_1, \dots C'_\lambda$; et ceci s'applique à tous les autres développements (4)', ainsi qu'à tous les développements analogues, relatifs aux différents points singuliers $x = x_i$, $y = y_i$ de (2). Si on connaissait tous ces entiers λ, la limitation du degré n de (3) ne présenterait aucune difficulté : nous allons, du moins, établir entre n et ces entiers λ, certaines relations d'égalité et d'inégalité.

Une courbe intégrale étant de degré n, deux courbes intégrales se coupent en n^2 points. D'autre part, nous pouvons calculer (en fonction des entiers λ) le nombre des points d'intersection de deux intégrales confondus en un point singulier (x_i, y_i) ou M_i de (2) : en effet on peut calculer le nombre des points d'intersection à l'origine des deux courbes définies par (4)', quand on donne à C' deux valeurs quelconques ; soit α ce nombre ; on aura :

$$(5) \qquad n^2 = \Sigma \, \lambda^2 \alpha,$$

la somme étant étendue à tous les développements (4)' relatifs aux différents points M_i.

Calculons maintenant la classe c d'une courbe intégrale : nous pouvons, là encore, calculer en fonction des

entiers λ, l'abaissement β_i produit dans la classe par le point M_i;[1] et on a :

$$c = n(n-1) - \Sigma \beta_i .$$

D'autre part, considérons l'équation :

$$(5) \qquad X y'_0 - Y = 0,$$

Le nombre des points d'intersection (distincts des M_i) de cette courbe, avec la courbe intégrale (3), représente le nombre de tangentes parallèles à une direction fixe qu'on peut mener à une courbe intégrale ; ce nombre coïncide avec la classe c : il n'en différerait, en effet, que si la droite de l'infini était tangente à toutes les courbe C, ce qui n'a pas lieu puisqu'on a effectué sur x, y la transformation homographique la plus générale.

Comme on peut calculer, en fonction des λ, le nombre des points d'intersection de (3) et de (6) confondus en M_i, on obtient une nouvelle relation entre n et les λ : soit γ' le nombre des points d'intersection confondus au point M_i de la courbe (4)' avec la courbe $X = 0$, γ'' le nombre analogue pour $Y = 0$, γ le plus petit des nombres γ', γ_1'', on a :

$$(7) \qquad n(n-1) - \Sigma \beta_i = n q - \Sigma \lambda \gamma,$$

la seconde somme étant étendue à tous les développements (4)' relatifs à chaque points M_i.

Calculons enfin (en fonction des λ), l'abaissement δ_i provoqué dans le genre p d'une courbe intégrale par chaque point M_i ; on a :

$$(8) \qquad p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \Sigma \delta_i \geqslant 0 .$$

Les trois égalités (5), (7), (8) permettent, dans des

---

[1] On n'a pas à tenir compte des points M_i par lesquels ne passent que des courbes intégrales algébriques isolées.

cas étendus, de reconnaître si l'intégrale de (2) est une courbe algébrique de genre donné. Dans certains cas, les égalités (5), (7), et l'inégalité (8) suffisent (sans aucune hypothèse) à limiter le degré n. Donnons aussitôt un exemple de ce fait. Nous appellerons, dans ce qui va suivre, nœud tout point M_i par lequel passent une infinité de courbes intégrales, c'est-à-dire auquel correspond au moins un développement (4)'. Nous appellerons nœud dicritique [1] un nœud pour lequel un au moins des développements (4)' est de la forme :

$$y = C' \left[x + \mathcal{E}(x) \right] ;$$

si on fait, dans ce cas, $y = tx$, l'équation $\frac{dt}{dx} = R(t, x)$, est régulière pour $x = 0$, $t = C'$ (sauf pour des valeurs particulieres de C'). Il ne peut exister pour un nœud qu'un seul développement (4)' dicritique.

Exemple — Le nombre des nœuds est inférieur à 9 et tous les développements (4)' sont dicritiques. — A chaque nœud M_i ne correspond qu'un développement (4)' : l'égalité (5) donne ici :

$$(5)' \qquad n^2 = \Sigma \lambda^2 .$$

Quant à l'égalité (7), on peut lui substituer une relation qui abrège un peu la discussion. Par 9 points (dont les nœuds), faisons passer une cubique : il vient :

$$(9) \qquad 3n = \Sigma \lambda + k, \quad (k \geqslant 0)$$

D'autre part, l'égalité (8) donne :

$$(n-1)(n-2) - \Sigma \lambda(\lambda - 1) = 2p, \quad \text{ou bien d'après } (5)' :$$

$$\Sigma \lambda - 3m = 2(p-1), \quad \text{d'où}$$

$$k = 2(1-p).$$

---

[1] Le terme de nœud a été introduit par M. Poincaré, celui de point dicritique par M. Autonne.

Donc p est égal à 1 ou à 0 : k est nul dans le premier cas, et égal à 2 dans le second. Mais si le nombre N des nœuds est inférieur à 9, $N = 9 - \alpha$, on peut prendre α points de la cubique sur un courbe intégrale, donc k est au moins égal à α, par suite égal à 2 et p est nul. Ceci suppose toutefois que la cubique auxiliaire n'ait pas une partie commune avec la courbe intégrale : l'exception ne se présentera que si les courbes intégrales sont au plus du troisième degré ; si ces courbes sont du troisième degré, un des N nœuds au moins est compté pour plusieurs points d'intersection ; comme tous les nœuds sont dicritiques, ceci n'est possible que si un nœud est point double commun des cubiques : N est alors égal à 6. Si $n = 2$ les courbes intégrales sont des coniques, $N = 4$; si $n = 1$, N est égal à 1, les courbes sont des droites.

Ces cas écartés, α (étant au plus égal à k) est égal à 1 ou à 2 ; d'où $N = 8$ ou $N = 7$. Soit d'abord $N = 8$; des égalités :

$$9n^2 = 9\Sigma\lambda^2, \quad 3n = 2 + \Sigma\lambda, \quad \text{on tire :}$$

$$9\sum_{i=1}^{i=8}\lambda_i^2 - \left[2 + \sum_{i=1}^{i=8}\lambda_i\right]^8 = 0,$$

ou bien :

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{8}{9}\left[\lambda_1 - \frac{1}{8}\left(2 + \sum_2^8 \lambda_i\right)\right] + \frac{7}{8}\left[\lambda_2 - \frac{1}{7}\left(2 + \sum_3^8 \lambda_i\right)\right]^2 + \cdots \\ + \frac{2}{3}\left[\lambda_7 - \frac{1}{2}\left(2 + \lambda_8\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda_8 - 2\right)^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Cette égalité montre que $(\lambda_8 - 2)^2$ est inférieur ou égal à 8, c'est-à-dire que λ_8 est inférieur à 5. Comme λ_8 est un quelconque des entiers λ_i, on voit qu'aucun des λ ne peut dépasser 4. L'équation (5)' montre alors que n est inférieur à 12.

Si N est égal à 7, il suffit de faire $\lambda_8 = 0$ dans (10) pour voir que $(\lambda_7 - 1)^2$ est moindre que 3 ; aucun λ ne peut dépasser 2 ; n est inférieur à 6.

En définitive, dans l'exemple en question, la méthode

fournit la limite d' : $n < 12$. Parmi les N nœuds, les uns sont points simples, les autres points doubles, triples, etc, des courbes intégrales.

Une discussion tout élémentaire conduit au tableau suivant.

		N. nœuds			
	Degré n	Points quadruples	Points triples	Points doubles	Points simples
$N=8$	$n=11$	7	1	0	0
	10	4	4	0	0
	9	2	5	1	0
	8	1	4	3	0
	8	0	7	0	1
	7	1	1	6	0
	7	0	4	3	1
	6	0	2	4	2
	5	0	1	3	4
	4	0	1	0	7
$N=7$	$n=5$	0	0	6	1
	$n=4$	0	0	3	4
$N=6$	$n=3$	0	0	1	5
$N=4$	$n=2$	0	0	0	4
$N=1$	$n=1$	0	0	0	1

Pour $N=9$, p est nul ou égal à 1. Si on suppose p égal à 1, les relations entre n et les λ sont homogènes :

$$n^2 = \sum_{i=1}^{i=9} \lambda_i^2 \,. \qquad 3n = \sum_{i=1}^{i=9} \lambda_i$$

et ne peuvent par suite limiter n.

Remarque. — Dans l'exemple précédent où la méthode a réussi, il se trouve que le genre p est nul. C'est là un fait général que les considérations suivantes font aisément prévoir.

Les relations dont nous disposons pour limiter n (sans aucune donnée) se composent des deux égalités (5), (7) et de l'inégalité (8). Il est clair que si ces relations sont encore vérifiées quand on substitue à la forme de l'intégrale

$$C = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \equiv X(x,y),$$

la forme réductible

$$C_1 \equiv \rho(C) = \rho(X) \equiv X_1(x,y)$$

où ρ est une fraction rationnelle en X, il est clair, dis-je, que dans ce cas, la méthode employée ne peut limiter n. Montrons qu'on se trouve précisément dans ce cas du moment que p est plus grand que 0.

Soit μ le degré de ρ en X ; quand on substitue à la courbe $C = X$, la courbe $C_1 = X_1$, les entiers n, λ sont remplacés par un nouveau système d'entiers $n_1 = \mu n$, $\lambda' = \mu\lambda$. Tout d'abord, il est certain que les égalités (5), (7) subsistent pour les nouveaux entiers, car rien dans la démonstration de ces égalités ne suppose la courbes (3) indécomposable. Il reste à savoir si l'inégalité (8) subsiste. Nous avons pour la courbe (3) :

$$(m-1)(m-2) - 2d = 2p \quad (p \geqslant 0);$$

la courbe $C_1 = X_1$ est de degré $m\mu$ et le nombre de ses points doubles d_1 est, comme on le voit aisément, $\mu d + \frac{m^2\mu(\mu-1)}{2}$. Le genre p_1 de $C_1 = X_1$ (calculé comme si cette courbe n'était pas décomposable), est donc donné par l'égalité :

$$2p_1 = (\mu n-1)(\mu n-2) - 2\mu d - n^2\mu(\mu-1),$$

ou encore :

$$(11) \qquad p_1 - 1 = \mu(p-1).$$

Ceci nous montre que p_1 est positif à fortiori si p est positif. Lors donc que p n'est pas nul, les égalités (5)(7), et l'inégalité

(8) sont vérifiées aussi bien par les entiers μn; $\mu\lambda_i$, que par les entiers n, λ_i.

D'après cela, étant donnée une equation (2), écrivons les relations arithmétiques (5), (7), (8). Si elles sont incompatibles, l'intégrale de (2) n'est pas algébrique. Si elles sont compatibles et si elles limitent n, l'intégrale n'est pas sûrement algébrique, mais si elle est algébrique, son genre est certainement nul.

Quand on se donne le genre p de l'intégrale supposée algébrique, les égalités (5), (7) et (8) permettent souvent, avons-nous dit, de limiter n. Mais un cas où la méthode sera sûrement inouffisante, c'est celui ou se donne p égal à 1. En effet, si dans ce cas les relations (5), (7), (8) [où $p=1$] sont compatibles, elles sont vérifiées par les entiers μn, $\mu\lambda_i$, si elles le sont par n et λ_i, et cela d'après l'égalité (11). C'est là un fait qui se présente justement dans l'exemple traité antérieurement.

La portée de la méthode étant ainsi fixée, donnons en rapidement deux applications générales.

Application ——— Les nœuds étant en nombre quelconque, on suppose tous les développements (4) dicritiques.

Nous avons d'abord d'après (5):

$$(\alpha) \qquad n^2 = \Sigma \lambda_i^2 ,$$

et si k_i désigne l'ordre de multiplicité le moins élevé du nœud M_i sur les courbes $X=0$, $Y=0$, l'égalité (7) donne:

$$n(n-1) - \Sigma \lambda_i (\lambda_i - 1) = qn - \Sigma k_i \lambda_i ,$$

ou bien, en tenant compte de (α):

$$(\beta) \qquad \Sigma (k_i + 1) \lambda_i = (q+1) n .$$

Joignons à ces relations, l'équation (8):

$$(n-1)(n-2) - \Sigma \lambda_i (\lambda_i - 1) = 2p \text{, ou bien:}$$

(c) $$\Sigma \lambda_i - 3n = 2(p-1).$$

Il vient en éliminant n entre (b) et (c):

(d) $$\Sigma (q-2-3k_i) \lambda_i = 2(p-1)(q+1).$$

Si tous les k_i sont inférieurs à $\frac{q-2}{3}$, tous les coëfficients λ_i sont positifs: p est nécessairement plus grand que 1, et, si on se donne p, la relation (d) limite les λ_i, par suite n.

Si tous les k_i sont supérieurs à $\frac{q-2}{3}$, p est nécessairement nul, et l'équation (d) nous fournit une limite supérieure de n sans aucune hypothèse.

En particulier, quand les k_i sont égaux, trois cas sont possibles:

1° — $3k = q-2-l$, $[l>0]$; on a alors:

$$l \Sigma \lambda_i = 2(p-1)(q+1)$$

et:

$$n = \frac{2(q+1)-l}{3l}(p-1)$$

d'où n en fonction du genre.

2° — $3k = q-2$: dans ce cas, le genre p est nécessairement égal à 1 et les égalités précédentes ne limitent pas n.

3° — $3k = q+2$, $[l>0]$, p est nécessairement nul, et on a:

$$\Sigma \lambda_i \frac{(2(q+1)}{l} \text{, et } n = \frac{2(q+l+1)}{3l};$$

n est connu (sans aucune donnée) d'après l'équation (2).

Un cas particulièrement intéressant, est celui où tous les k_i sont égaux à 1. On a alors:

$$(q-5)\sum\lambda_1 = 2(p-1)(q+1)$$

et:

$$n = \frac{4(p-1)}{q-5}$$

Si q est plus grand que 5, p est plus grand que 1; si $q=5$, $p=1$ et n n'est plus connu en fonction de p; si q est moindre que 5, p est nul, et n est égal à 4 (pour $q=4$), à 2 pour $q=2$, à 1 pour $q=1$.

Douzième Leçon.

De l'intégration algébrique des équations du premier ordre (fin).

Comme dernière application de la méthode développée dans la leçon précédente, nous traiterons le cas suivant qui suit.

"Tous les nœuds M_i de l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$$

sont des points d'intersection simples des deux courbes $X = 0$, $Y = 0$."

C'est ce qui a lieu notamment quand toutes les intersections des courbes $X = 0$, $Y = 0$ sont simples.

Soit $x_i = 0$, $y_i = 0$ un des nœuds M_i. Dans le voisinage de ce point, le coefficient différentiel est de la forme

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha x + \beta y + \dots}{\alpha' x + \beta' y + \dots},$$

et on peut admettre que la condition $\alpha' \beta - \alpha \beta' = 1$ est remplie (puisque les deux courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne sont pas tangentes en M_i). — Employons la méthode de Briot et Bouquet pour reconnaître s'il existe des intégrales de la forme :

$$(2) \qquad 0 = h x + k y + l x^2 + \dots,$$

h, k n'étant pas nuls à la fois, c'est-à-dire des intégrales $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$, φ s'annulant et étant holomorphe pour $x = 0$ (ou ψ s'annulant et étant holomorphe pour $y = 0$).

On trouve aussitôt que h, k doivent vérifier la condition :

$$(3) \qquad \alpha k^2 + (\alpha' - \beta) h k - \beta' h^2 = 0.$$

Deux cas sont possibles :

1°. L'équation (3) est une identité ; autrement dit $\alpha, \beta', (\alpha' - \beta)$ sont nuls. Si on pose alors $y = t x$, l'équation (1) devient :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{A(t,x)}{1 + x B(t,x)}$$

A et B étant holomorphes pour $x = 0$, $t = t_0$ (quel que soit t_0) ; le point M_i est un nœud dicritique.

2°. — L'équation (3) définit deux directions issues de l'origine. Ces deux directions sont nécessairement distinctes quand l'intégrale générale de (1) est algébrique : tout d'abord, $(\alpha'-\beta)$ et β' ne peuvent être nuls simultanément ; en effet, étant donnée une équation :

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \gamma x^2 + \dots\dots}{x + \delta y + \varepsilon x^2 + \dots} \qquad (\delta \neq 0),$$

Briot et Bouquet ont montré que $x = 0$ est un point transcendant des intégrales $y(x)$. Si maintenant, les deux valeurs de $\frac{h}{k}$ sont égales, soit α, leur valeur commune, la transformation $y + \alpha$; $x = x$, ramène l'équation (1) à la forme (4). et δ est différent de zéro, puisqu'autrement le nœud serait dicritique et on aurait $\alpha = \beta' = \beta - \alpha' = 0$

Soit donc (h_1, k_1) et (h_2, k_2) deux solutions (non proportionnelles) de (3) ; la transformation :

$$k_1 x + k_1 y = x_1, \qquad k_2 x + k_2 y = y_1$$

ramène l'équation (1) à la forme :

$$(5) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{s y_1 + \gamma x_1^2 + \dots\dots}{x_1 + \delta x_1^2 + \dots\dots},$$

s ayant la valeur

$$s = \frac{\alpha' - \beta' \frac{h_1}{k_1}}{\alpha' - \beta' \frac{h_2}{k_2}} = \frac{(\alpha'+\beta)^2 + (\alpha'+\beta)\sqrt{(\alpha'+\beta)^2 - 4}}{2} - 1, \quad (\alpha'\beta - \alpha\beta' = 1),$$

comme le montre un calcul tout élémentaire. Les deux valeurs de s qu'on obtient en permutant $\frac{h_1}{k_1}$ et $\frac{h_2}{k_2}$, c'est à dire en changeant le signe du radical, sont inverses l'une de l'autre : s est d'ailleurs différent de 1, sinon le nœud serait dicritique. J'appellerai s_i l'exposant du point singulier M_i

Le théorème fondamental de Briot et Bouquet, exprime alors que l'équation (5) admet une intégrale de la forme : $y_1 = \varphi(x_1) = x_1^2 (r + r_1 x_1 + \dots)$; si on permute le rôle de x_1 et de y_1, on voit de même qu'il existe une intégrale $x_1 = \psi(y_1) = y_1^2 (r' + r_1' y_1 + \dots\dots)$; Si on pose enfin :

$$v = y_1 - \varphi(x_1) = y_1 - x_1^2 (r + r_1 x_1 + \dots), \; u = x_1 - \psi(y_1) = x_1 - y_1^2 (r' + \dots),$$

x_1 et y_1 sont des fonctions holomorphes de u, v pour $u=0$, $v=0$; l'équation (5) devient :

$$(6) \qquad \frac{dv}{du} = \frac{v(s+gu+\dots)}{u(1+du+\dots)},$$

les termes non écrits étant au moins du premier degré en u, v. Je dis d'abord que si l'intégrale générale de (1) est algébrique, s est un nombre réel commensurable.

En effet, M_i étant un nœud de l'équation (1) par hypothèse, l'équation (6) admet une infinité d'intégrales de la forme:

$$v = u^{\rho}\left[a+\varepsilon\right], \quad a \neq 0, \quad \rho > 0,$$

ε tendant vers zéro avec u et ρ étant commensurable. Or en remplaçant v par cette expression dans (6), on trouve : $a\rho = a s$, donc $\rho = s$; λ est donc réel, positif et commensurable. — Inversement, si, dans (6), s est de la forme $\frac{\mu}{\nu}$, μ et ν étant deux entiers positifs la transformation $u=\xi^{\nu}$, $v = t\,\xi^{\mu}$ conduit à l'équation différentielle:

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{A(t,\xi)}{1+\xi B(t,\xi)}$$

où A, B sont holomorphes pour $t=t_0$, $\xi=0$ (quel que soit t_0). L'équation (6) admet une infinité d'intégrales de la forme $v = \xi^{\mu}\left[t_0+\varepsilon(\xi)\right] \equiv u^{\frac{\mu}{\nu}}\left[t_0+\eta(u)\right]$, t_0 désignant une constante arbitraire, $\eta(u)$ une fonction holomorphe de $u^{\frac{1}{\nu}}$ qui dépend de t_0 et s'annule avec u.

Il est toujours loisible de supposer $\frac{\mu}{\nu} > 1$. Toutes les Toutes les intégrales $v = f(u)$ sont tangentes à l'axe des u, sauf l'intégrale $u=0$.

Revenons aux variables x_1, y_1; on a :

$$x_1 = u + a u^2 + 2buv + \dots \qquad y_1 = v + a'u^2 + 2b'uv + \dots$$

Remplaçons v par $u^{\frac{\mu}{\nu}}\left[t_0+\varepsilon(u)\right]$ dans les expressions de x_1, y_1; soit l le plus grand entier inférieur à $\frac{\mu}{\nu}$, et soit $u^{\frac{1}{\nu}} = U$, $x_1^{\frac{1}{\nu}} = \xi$; on a

$$\xi = U + \alpha U^2 + \dots, \text{ d'où } U = \xi + \beta\xi^2 + \dots$$

$$y_1 = (a'u^2 + e'u^3 + \dots + h'u^l) + t_0 u^{\frac{\mu}{\nu}} + \dots = (g x_1^2 + \dots + k x_1^l) + x_1^{\frac{\mu}{\nu}} [t_0 + \varepsilon],$$

$g, \dots k$ ayant des valeurs numériques, ε désignant une fonction holomorphe de $x_1^{\frac{1}{\nu}}$ qui s'annule avec x_1 (et qui dépend de la constante t_0). Toutes les courbes $y_1 = f_1(x_1)$ ainsi définies sont tangentes à l'axe des x_1 et la différence de deux fonctions f_1 est d'ordre $\frac{\mu}{\nu}$ par rapport à x_1. Pour $t_0 = 0$, $y_1 = f_1(x_1)$ est holomorphe et correspond à $v = 0$. A $u = 0$ correspond une intégrale exceptionnelle tangente à l'axe des y_1.

Remarque. — Quand toutes les intersections des courbes $X = 0$, $Y = 0$ sont simples, la marche suivie plus haut s'applique à une intersection M_i quelconque, et permet de ramener l'équation à la forme (5) : si s n'est pas un nombre réel, positif et commensurable, il ne peut passer par le point M_i d'autres intégrales algébriques que $y_1 = \varphi(x_1)$, $x_1 = \psi(y_1)$. L'intégrale de (5), si elle est algébrique, se laisse donc mettre sous la forme :

$$C = [y_1 - \varphi_1(x_1)]^l [x_1 - \psi(y_1)]^j H(x_1, y_1),$$

(H étant holomorphe et différent de zéro pour $x_1 = 0$, $y_1 = 0$) ; ou encore, en introduisant les variables u, v :

$$C = v^l u^j K(u, v),$$

K étant holomorphe et différent de zéro pour $u = 0$, $v = 0$. Si on identifie l'équation

$$0 = d \log C = \frac{l\,dv}{v} + j\,\frac{du}{u} + \frac{\frac{dK}{du}du + \frac{dK}{dv}dv}{K}$$

avec l'équation (6), il vient :

$$0 \equiv l(0 + \dots) + j(1 + \dots) + \frac{1}{K}\left[u\frac{dK}{du}(1 + \dots) + v\frac{dK}{dv}(0 + \dots)\right],$$

d'où $s = -\frac{j}{l}$.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : « Quand toutes les intersections M_i des deux courbes $X = 0$, $Y = 0$ sont simples, l'intégrale ne peut être algébrique que si tous les nombres tels que

$$s = \frac{(\alpha' + \beta)^2 + (\alpha' + \beta)\sqrt{(\alpha' + \beta)^2 - 4}}{2} - 1$$

soient réels et commensurables ; si s est négatif il ne peut passer que

deux branches d'intégrale $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ par le point M_i, et si l'intégrale (supposée algébrique) est mise sous la forme :

$$C = [y - \varphi(x)]^{\ell}\,[y - \psi(x)]^{j}\,S(x,y), \ [S(0,0) \neq 0],$$

ρ est égal au rapport $-\frac{j}{\ell}$ (ou à son inverse). – Si ρ est positif $\left[\rho = \frac{\mu}{\nu}\right]$, toutes les intégrales passent par M_i et sont de la forme.

$$(7) \qquad y = ax + bx^2 + \dots + hx^{\beta} + x^{\frac{\mu}{\nu}}\left[t_0 + \varepsilon(x)\right], \quad \left(\frac{\mu}{\nu} > \beta\right)$$

t_0 désignant une constante arbitraire, $\varepsilon(x)$ une fonction qui s'annule avec x et dépend de t_0. Toutefois, une branche particulière d'intégrale est de la forme

$$y = a'x + b'x^2 + \dots, \quad (a' \neq a).$$

Ajoutons que si ν est égal à 1, toutes les branches (7) sont holomorphes pour $x = 0$; si ν est supérieur à 1, l'intégrale (7) est holomorphe pour $t_0 = 0$. Si ρ est égal à 1, le noeud est dicritique.[1]

Nous appellerons cols les points M_i pour lesquels l'exposant ρ est négatif.

Calcul des relations entre le degré, le genre, la classe, etc. – Soit

$$(8). \qquad f \equiv P - C_0\,Q = 0, \qquad f_1 \equiv P - C'_0\,Q = 0$$

deux courbes intégrales quelconques ; calculons le nombre de leurs intersections confondues en un nœud M_i ou $x_i = 0$, $y_i = 0$. Ce nombre σ est égal au nombre des racines nulles du résultant $R(x)$ obtenu en éliminant y entre les deux équations (8), [les axes $x\,o\,y$ étant quelconques] : si on pose $x = \xi^{\nu}$, l'équation en ξ : $R(\xi^{\nu}) = 0$ aura $\sigma\nu$ racines nulles.

Ceci posé, soit Γ ou $y = \varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)$ une branche (7) : si on fait $x = \xi^{\nu}$, à cette branche correspondent ν branches distinctes $y = \varphi(\alpha\,\xi)$, α désignant une racine ν^{e} de l'unité. Soit Γ et Γ' deux branches

---

[1] Pour que ρ soit égal à 1, il faut et il suffit que $\alpha' + \beta$ soit égal à 2, c'est-à-dire que les deux valeurs de $\frac{h}{k}$ données par (3) coïncident mais l'intégrale ne peut alors être algébrique que si on a : $\alpha = 0$, $\beta' = 0$, $\alpha' = \beta = 1$

(7) quelconques, γ et γ' une des ν branches $y = \varphi(\alpha\,\xi)$ qui leur correspondent respectivement : γ et γ' ont à l'origine un contact d'ordre μ ; les ν branches γ ont donc à l'origine $\mu\,\nu^2$ intersections confondues avec les ν branches γ' ; si une courbe intégrale comprend λ branches (7), on aura par suite : $\sigma\,\nu = \lambda^2\mu\,\nu^2$, c'est-à-dire $\sigma = \lambda^2\mu\,\nu$. D'où la relation :

$$(a) \qquad n^2 = \sum \lambda^2 \mu\,\nu,$$

la somme étant étendue à tous les nœuds.

Calculons maintenant l'abaissement de la classe. Dans les équations (8), les termes de degré le moins élevé (M_i étant l'origine) sont de degré $\lambda\,\nu$, et dans l'équation

$$(9) \qquad f'_x + h\,f'_y = 0$$

les termes de degré le moins élevé sont de degré $\lambda\,\nu - 1$. Si on pose $x = \xi^\nu$, les $\lambda\,\nu$ branches distinctes définies par $f(\xi^\nu, y) = 0$ et les $(\lambda\,\nu - 1)$ branches définies par (9) ont, deux à deux, un contact d'ordre μ en M_i ; elles ont donc $\lambda\nu\,(\lambda\,\nu - 1)\,\mu$ points communs confondus en M. Il suit de là que la courbe $f(x, y) = 0$ et sa polaire ont $\lambda\,\mu\,(\lambda\,\nu - 1)$ intersections confondues en M_i. La classe c de $f = 0$ est donc donnée par la formule :

$$c = n\,(n-1) - \sum \lambda\,\mu\,(\lambda\,\nu - 1).$$

D'autre part, une courbe $f = 0$ et la courbe

$$X(x, y) - y'_0\,Y(x, y) = 0$$

ont (en dehors des nœuds), $[q\,n - \sum \lambda\,\nu]$ points communs. D'où la relation :

$$n\,(n-1) - \sum \lambda\,\mu\,(\lambda\nu - 1) = q\,n - \sum \lambda\,\nu,$$

ou encore (en tenant compte de (a)) :

$$(b) \qquad \sum \lambda\,(\mu + \nu) = n\,(q+1)$$

Calculons enfin le genre : pour chaque branche de l'intégrale (7) ou $y = \varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)$, le point M_i (au point de vue du genre équivaut à $\dfrac{(\mu-1)(\nu-1)}{2}$ points doubles.

d'après une formule connue. La multiplicité de M_i est donc égale au nombre $\frac{\lambda(\mu-1)(\nu-1)}{2}$ augmenté de $\frac{\lambda(\lambda-1)\mu\nu}{2}$, nombre des intersections confondues en M_i qu'ont entre elles les λ branches distinctes de $f = 0$. Il vient donc :[1]

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \lambda^2 \mu\nu + \sum \frac{\lambda}{2}(\mu+\nu-1).$$

Si on tient compte de (a), on trouve :

$$p = 1 + \sum \frac{\lambda}{2}(\mu+\nu-1) - \frac{3m}{2},$$

et si on tient compte de (b) :

$$(c) \qquad p = 1 + \sum \frac{\lambda}{2}\left[\mu+\nu-1-3\left(\frac{\mu+\nu}{q+1}\right)\right] = 1 + \sum \frac{\lambda}{2}\left[(\mu+\nu)\left[1-\frac{3}{q+1}\right]-1\right]$$

Cette égalité (c) permet de reconnaître si l'intégrale générale de (1) est algébrique et de genre donné p, chaque fois que q est plus grand que 5.

Plus généralement, il suffit que les coëfficients des λ dans (c) soient tous du même signe.

Le genre p est nécessairement plus grand que 1 si q est supérieur à 4. Toutefois, pour $q = 5$, si tous les nœuds sont dicritiques, p est égal à 1. Si, pour $q = 5$, aucun nœud n'est dicritique, n est limité en fonction de p.

Le genre p sera nécessairement égal à 1 dans les cas suivants : $q = 5$, $\mu = 1$, $\nu = 1$ pour tous les nœuds,
$q = 3$, $\mu = 3$, $\nu = 1$ —— " ——

Le degré n n'est plus alors limité par les égalités (a), (b), (c).

Le genre p sera nécessairement nul si on a :

$q = 4$, $\mu = 1$, $\nu = 1$ pour tous les nœuds,

---

[1] C'est d'ailleurs une formule classique de la théorie des courbes algébriques.

ou $q = 3$, $\mu = 2$ ou 1, $\nu = 1$ pour tous les nœuds,

ou $q < 3$.

Dans ces trois derniers cas, le degré n est limité sans aucune donnée supplémentaire

Observons que p est encore nul pour $q = 3$ si les entiers μ sont au plus égaux à 3 (un au moins étant inférieur à 3) et les ν égaux à l'unité. — Mais le degré n n'est plus limité par les formules précédentes, dès qu'un des μ est égal à 3.

Extension aux équations du premier ordre de degré quelconque en y'.

La méthode que nous venons d'employer peut être étendue aux équations non résolues par rapport à y'. Soit

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0$$

une équation quelconque algébrique en y', y, x et irréductible. Nous voulons étudier le cas où l'intégrale de (1) est algébrique, le genre de la relation entre les constantes intégrales étant nul.

L'intégrale peut s'écrire alors :

$$(2) \qquad R(y', y, x) = C,$$

R désignant une fonction rationnelle en y', y, algébrique en x, telle que, pour toute valeur de la constante C, l'équation (2) définisse seulement les branches d'une même intégrale. Si R n'est pas rationnel en x, soit $R_1, R_2, \ldots\ldots R_\nu$ les ν valeurs de R qui (pour y, y' quelconques) correspondent à une valeur de x. Soit $S(y', y, x)$ une des fonctions symétriques :

$$R_1 + \ldots\ldots + R_\nu, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, R_1 R_2 \ldots\ldots R_\nu.$$

L'intégrale est encore définie par l'égalité :

$$(3) \qquad S(y', y, x) = C_1$$

où S est rationnel en y', y, x ; C_1 est une fraction rationnelle en C de degré ν ; les ν valeurs de C qui correspondent à une valeur de (1) sont les ν valeurs de C qui correspondent à un système y'_0, y_0, x_0 vérifiant (1). La relation $S = C_1$ définit donc seulement (pour C_1 constant) les diverses branches de la même intégrale.

Ceci posé, regardons y', y, x comme les coordonnées d'un point d'un espace à trois dimensions. Une intégrale quelconque est l'intersection entière de la surface fixe $F = 0$ et d'une surface du faisceau $S = C_1$. On conçoit dès lors qu'on puisse appliquer les formules de la théorie des courbes gauches algébriques de la même manière que nous avons utilisé la théorie des courbes planes : formules relatives aux intersections, aux points multiples réels et apparents, aux points d'inflexion, etc.

La variable y' se prêtant mal d'ordinaire aux calculs de la géométrie énumérative, il y aura avantage à lui faire correspondre birationnellement une nouvelle variable z convenablement choisie : autrement dit, on écrira l'équation (1) ainsi :

$$y' = G(x, y, z)$$

avec

$$H(x, y, z) = 0,$$

G étant rationnel en x, y, z et H étant un polynôme irréductible ; inversement, z devra s'exprimer rationnellement en y', y, x :

$$z = G_1(y', y, x) ;$$

à toute intégrale $y(x)$ correspond une seule fonction algébrique $z(x)$; et réciproquement, l'intersection entière de $H = 0$ par un certain faisceau

$$C = \Sigma(x, y, x),$$

définit une seule intégrale $y(x)$, [Σ étant rationnel en x, y, z].

C'est à cet ordre d'idées que se rattache une série de remarquables mémoires de M. Autonne. L'auteur a choisi un mode de correspondance qui peut sembler artificiel au premier abord, mais qui en réalité lui permet d'employer heureusement les formules d'Halphen relatives aux courbes gauches. Les méthodes de M. Autonne suffisent à déterminer, dans des cas très_étendus, si l'intégrale est algébrique et de genre donné, et même, dans certains cas résolvent le problème sans qu'on se donne le genre.

Deuxième méthode. — Dans la deuxième méthode que nous venons d'appliquer, ce sont les noeuds, - ou plus exactement les branches algébriques d'intégrales passant par un point singulier et dépendant d'une constante arbitraire, — dont le rôle est essentiel. Nous allons indiquer une seconde méthode où l'étude des cols - ou plus exactement des branches isolées de l'intégrale —, combinée avec la considération des valeurs remarquables de la constante, conduit à des résultats importants.

Considérons une équation (1) quelconque du premier degré en y':

$$(1) \qquad y' = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$$

et supposons que son intégrale soit algébrique et mise sous la forme irréductible.

$$(2) \qquad C = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \equiv X(x,y),$$

P et Q étant deux polynômes en x, y de degré n. Comme il est loisible d'effectuer sur (1) la transformation homographique en x, y la plus générale, nous admettons que la droite de l'infini ne fait pas partie d'une des courbes (2), autrement dit que, pour aucune valeur de C, la courbe $QC - P = 0$ n'est de degré inférieur à n. Nous admettons de plus que tous les points singuliers M_i

de (1) sont à distance finie (voir page 177). Ceci posé, si nous éliminons C en différentiant (2), on forme la relation :

$$Y_1 - X_1 \; y' = 0,$$

où X_1, et Y_1 sont deux polynômes, de degré exactement égal à $2n-1$ en x, y. On doit donc avoir $Y_1 = HY$, $X_1 = HX$, H étant un polynôme en x, y d'un certain degré r, et on voit (comme à la page 146) que si H renferme en facteur le polynôme irréductible $\varphi(x, y)$ à la puissance σ, $\varphi = 0$ est une intégrale de (1) qui correspond à une certaine valeur C_0 de C, et la relation $P - C_0 Q$ renferme φ en facteur à une puissance exactement égale à $\sigma + 1$. D'après cela, considérons toutes les valeurs C_0 de la constante pour lesquelles le polynôme $P - C_0 Q$ est réductible, et soit a le degré d'un des polynômes irréductibles $\varphi(x, y)$ qui entre en facteur dans $P - C_0 Q$, et α la puissance à laquelle il figure dans $P - C_0 Q$. On a :

(3) $$q = 2n - 1 - \Sigma \; a(\alpha - 1),$$

la somme étant étendue à tous les polynômes tels que φ.

Nous appellerons, dans ce qui suit, valeurs remarquables toutes les valeurs C_0 de C pour lesquelles le polynôme $P - C_0 Q$ se décompose. Nous dirons que la valeur remarquable C_0 est de seconde espèce, si $P - C_0 Q$ est une puissance exacte R_1^{β} $(\beta > 1)$, d'un polynôme $R(x, y)$ réductible ou irréductible. Sinon la valeur remarquable C_0 sera dite de première espèce.

Pour introduire la considération des cols, je me placerai dans le cas particulier où tous les points communs M_i aux deux courbes $X = 0$, $Y = 0$, sont des points simples d'intersection de ces courbes.[1] Mais la méthode et ses résultats

---

[1] Il faut se garder de considérer ce cas le plus

s'étendent à une équation (1) quelconque.

Pour une équation (1) de l'espèce considérée, nous avons distingué les points singuliers M_i en nœuds et en cols. Soit (x_i, y_i) un des points communs à $X=0$, $Y=0$, et soit $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ les quatre quantités :

$$\frac{\alpha'}{\frac{\partial X}{\partial x}(x_i, y_i)} = \frac{\beta'}{\frac{\partial X}{\partial y}(x_i, y_i)} = \frac{\alpha}{\frac{\partial Y}{\partial x}(x_i, y_i)} = \frac{\beta}{\frac{\partial Y}{\partial y}(x_i, y_i)}, \alpha'\beta - \alpha\beta' = 1;$$

soit enfin s l'expression [dont les deux valeurs ont un produit égal à 1]

$$s = (\alpha'+\beta)\left(\frac{\alpha'+\beta+\sqrt{(\alpha'+\beta)^2-4}}{2}\right) - 1;$$

nous avons vu que si l'intégrale de (1) est algébrique, chaque nombre s doit être réel et commensurable : si s est négatif, il ne passe par M_i que deux intégrales, M_i est un col ; si s est positif et différent de 1, il passe par M_i une infinité de branches, tangentes à une même droite (sauf une seule) ; soit $\frac{\mu}{\nu}$ la valeur de s plus grande que 1, (μ, ν désignant deux entiers positifs premiers entre eux) : l'équation de ce faisceau de branches est, en prenant M_i comme origine :

(4) $\quad y = (ax + bx^2 + \dots + hx^l) + x^{\frac{\mu}{\nu}}\left[c + \mathcal{E}(x)\right], \quad \frac{\mu}{\nu} > l;$

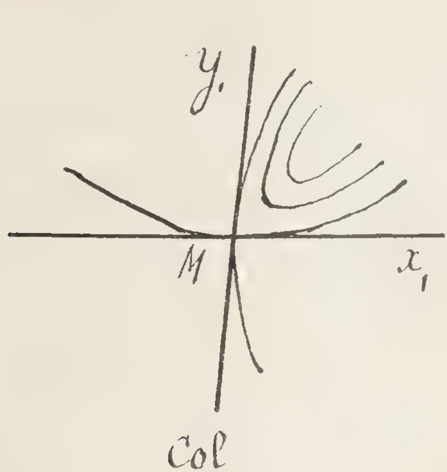
$\mathcal{E}$ désigne une fonction holomorphe de $x^{\frac{1}{\nu}}$ qui s'annule avec x (et qui peut dépendre de la constante arbitraire c). Pour $c = 0$, la branche de courbe $y = \varphi(x)$ est régulière à l'origine, au lieu que, si ν est plus grand que 1, les autres branches ont un rebroussement

---

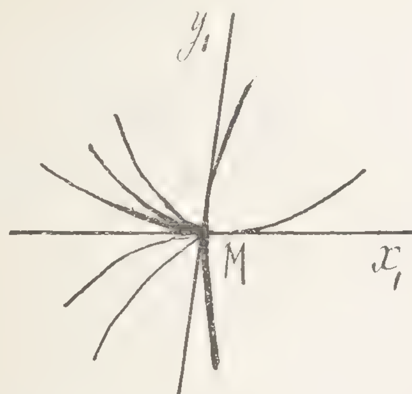
[...]mple comme donnant l'image du cas général : quand plusieurs [po]ints d'intersection sont confondus en M_i, des singularités bien [plu]s compliquées se présentent, et il est impossible en général de [tro]uver une transformation algébrique en x, y qui ramène le cas de [l'i]ntersection multiple M_i au cas d'intersections simples.

en ce point. Nous donnerons le nom de branches remarquables à la branche qui correspond à la valeur $c = 0$ de la constante, ainsi qu'à la branche particulière holomorphe pour $x = 0$ qui est tangente à une autre direction $y = a'x$. Toutefois, si r est égal à 1, toutes les branches (4) sont régulières : nous réservons alors le nom de branche remarquable à la seule branche $y = a'x + b'x^2 + \ldots$

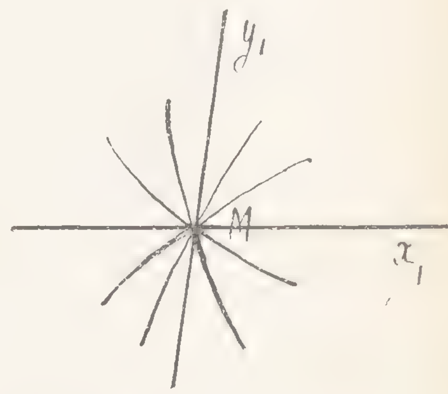
Enfin quand s est égal à 1, M_i est un nœud dicritique : il passe par M_i une courbe intégrale et une seule tangente à une direction arbitraire.



Col



Nœud



Nœud dicritique

Ceci posé, montrons que, si pour $C = C_0$ la courbe algébrique $P - C_0 Q = 0$ se décompose en plusieurs courbes distinctes, elle passe nécessairement par un col.

Soit $C_0 = 0$ la valeur remarquable considérée : observons aussitôt qu'il est loisible d'admettre que la courbe $P = 0$ n'a aucun des points M_i (nœuds ou cols) de tangente parallèle à Oy : autrement, on ferait un changement d'axes.

Cette remarque faite, soit $P \equiv R^\alpha S$, R étant un polynôme irréductible (de degré r) qui n'entre pas en facteur dans le polynôme S (de degré ρ) : l'égalité $R = 0$ définit r fonctions $y(x)$, soit $y_1(x), \ldots\, y_r(x)$, et l'égalité $S = 0$ définit $\rho = n - r\alpha$ fonctions $y(x)$, soit $z_1(x), \ldots\, z_\rho(x)$. Pour $C = \varepsilon$, l'égalité $P - C\,Q = 0$ définit αr fonctions $y(x, \varepsilon)$ très-voisines de $y_1(x), \ldots$ ou $y_r(x)$, et ρ fonctions $y(x, \varepsilon)$ très-voisines de

$z_1(x), \ldots\ z_p(x)$. Comme la relation $F - \varepsilon Q = 0$ est indécomposable, une au moins des racines $y(x, \varepsilon)$ du premier groupe, soit $Y(x,\varepsilon)$, se permute avec une racine du second groupe, soit $Z(x, \varepsilon)$, autour d'un certain point x_0 : je représente par y_0 la valeur commune de Y et Z en x_0. Quand ε tend vers zéro, le point (x_0, y_0) tend vers un certain point limite (a, b), $Y(x,\varepsilon)$ tend vers une des fonctions $y_i(x)$, soit $y_1(x)$; de même $Z(x, \varepsilon)$ tend vers $z_1(x)$; par le point (a, b) passent donc deux intégrales distinctes $y_1(x)$, $z_1(x)$; ce point est un nœud ou un col. Montrons que c'est un col.

Admettons, en effet, que a, b soit un nœud ; prenons ce nœud comme origine et supposons d'abord qu'il soit dicritique. Les intégrales, dans le voisinage de ce nœud, sont de la forme :

$$y = x\left[c + \eta(x, c)\right] = \varphi(x, c),$$

η désignant une fonction de x, c, qui s'annule pour $x = 0$ et qui est holomorphe pour $x = 0$, $c = t_0$, quel que soit t_0 (voir page 190). Les deux intégrales $y_1(x)$, $z_1(x)$ correspondent aux valeurs c_1, c_2 de c : pour c voisin de c_1, l'intégrale $y(x) = \varphi(x, c)$ devrait avoir un point critique x_0 voisin de l'origine ; ce qui est absurde, puisque φ est holomorphe dans deux cercles de centres $x = 0$ et $c = c_1$ (décrits respectivement dans le plan des variables complexes x, c).

Si le nœud n'est pas dicritique, toutes les branches (sauf une seule) qui passent par le nœud sont de la forme :

$$(5) \qquad y = ax + bx^2 + \ldots + hx^l + x^{\frac{\mu}{\nu}}\left[c + \eta(x, c)\right] = \varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}, c\right),$$

la fonction φ étant une fonction holomorphe des variables $\xi = x^{\frac{1}{\nu}}$ et c pour $\xi = 0$, $c = t_0$, quel que soit t_0 (voir page 192). Une au moins des intégrales $y_1(x)$, $z_1(x)$ coïncide avec une des intégrales (5),

par exemple, $y_1(x)$ s'obtient en faisant $c = c_1$ dans (5). Ici deux hypothèses sont possibles : ou bien le point critique x_0 et la valeur correspondante y_0 coïncident constamment avec $a = 0$, $b = 0$, ou bien (x_0, y_0) tend vers l'origine quand ε tend vers zéro. Cette seconde hypothèse est à rejeter, parce que la fonction $\varphi(\xi, c)$, holomorphe pour $\xi = 0$, $c = c_1$, devrait admettre un point critique $\xi = \xi_0$ tendant vers zéro quand c tend vers c_1. La première hypothèse est également inadmissible : en effet, si $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ quel que soit ε, les deux branches $Y(x, \varepsilon)$, $Z(x, \varepsilon)$ sont deux branches de la même intégrale (5) correspondant à deux déterminations de $\xi = x^{\frac{1}{\nu}}$; pour $c = c_1$, ($c_1 \neq 0$), les deux branches $y_1(x)$, $z_1(x)$ se permutent encore autour du point $x = 0$; pour $c_1 = 0$, $y_1(x)$ et $z_1(x)$ se confondent ; ces deux conséquences étant absurdes, le point (a, b) ne peut être un nœud. C'est donc un col. C.Q.F.D.

Un raisonnement tout-à-fait analogue montre que si, pour $C = C_0$, $P - C_0 Q$ est une puissance S^{α} d'un polynôme S, la courbe $S = 0$ ou bien passe par un col, ou bien comprend une branche remarquable passant par un nœud. Dans ce cas, en effet, les deux branches $Y(x, \varepsilon)$, $Z(x, \varepsilon)$, qui se permutent autour de x_0, peuvent tendre vers la même fonction $y_1(x)$: il est donc possible que $y_1(x)$ coïncide avec la branche remarquable (5) obtenue en faisant $c = 0$, ou avec la branche remarquable non tangente aux autres branches. D'ailleurs nous n'emploierons pas ici ce corollaire.

Complétons ce théorème en utilisant une remarque faite sur l'exposant s d'un col. Supposons toujours que, pour $C = 0$, la courbe $P - C\,Q = 0$ se décompose en plusieurs courbes distinctes, et soit $P \equiv P_1^{l_1} P_2^{l_2} \ldots P_k^{l_k}$, $P_1 \ldots P_k$ étant des polynômes irréductibles. Nous savons que deux des courbes $P_i = 0$, soit $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, ont respectivement une branche, $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$, qui passe par un col qu'on peut supposer être l'origine. L'intégrale, dans le

voisinage de ce point, sera de la forme :

$$C = [y - \varphi(x)]^{l_1} [y - \psi(x)]^{l_2} H(x, y),$$

H étant holomorphe et différent de zéro pour $x = 0$, $y = 0$. Nous avons vu qu'on avait dans ce cas (page 194) : $s = -\frac{l_1}{l_2}$. L'exposant s changé de signe fait donc connaître le rapport des puissances auxquelles figurent dans P les polynômes P_1 et P_2.

Observons de plus que si l'exposant s d'un col M_i n'est pas égal à -1, ($s = \frac{-\mu}{\nu}$), l'intégrale générale (quand elle est algébrique) se décompose nécessairement en passant par ce col : car soit $C = 0$ la valeur pour laquelle l'intégrale passe par M_i ; P renferme en facteur un polynôme P_1 à la puissance $\sigma\mu$, et un polynôme P_2 à la puissance $\sigma\nu$ $[\mu \neq \nu]$. Au contraire, si s est égal à -1, M_i peut être un point double à tangentes distinctes de la même courbe intégrale.

Précisons enfin ces résultats de la manière suivante : par hypothèse, P est de la forme

$$P(x, y) \equiv P_1^{l_1} P_2^{l_2} \dots P_k^{l_k} ;$$

$P_1, \dots P_k$ étant des polynômes distincts et indécomposables ; les deux courbes $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ passent par un certain col M_1 d'exposant $-s_1$. Séparons les racines $y(x)$ de $P - CQ = 0$ en deux groupes, le premier groupe formé des racines qui, pour C très petit, vérifient sensiblement l'équation $P_1^{l_1} P_2^{l_2} = 0$, le second formé des autres racines, (qui vérifient sensiblement l'équation $P_3^{l_3} \dots P_k^{l_k} = 0$). Le raisonnement de la page 205 montre aussitôt que les deux courbes ($P_1^{l_1} P_2^{l_2} = 0$, $P_3^{l_3} \dots P_k^{l_k} = 0$, ont respectivement une branche qui passe par un certain col M_2 d'exposant $-s_2$: par exemple, $P_1 = 0$ et $P_3 = 0$ passent par M_2 et on a : $\frac{l_3}{l_1} = -s_2$. — En considérant de même les courbes $P_1^{l_1} P_2^{l_2} P_3^{l_3} = 0$, $P_4^{l_4} \dots P_k^{l_k} = 0$, on voit en définitive que la courbe $P = 0$ passe au moins par $(k-1)$

cols distincts, dont les exposants s_i sont égaux à $-\frac{l_m}{l_j}$, les nombres l_j, l_m épuisant les k nombres $l_1, \ldots\ldots l_k$.

Une conséquence immédiate, c'est que, si tous les exposants des cols situés sur la courbe $P=0$ sont égaux à -1, P est nécessairement de la forme : $P \equiv (P_1 P_2 \ldots P_k)^\sigma$. — Si tous les exposants qui ne sont pas égaux à -1 ont leurs termes μ, ν supérieurs à un nombre r, tous les exposants $l_1, \ldots\ldots l_k$ sont supérieurs à r.

Ces remarques permettent de reconnaître dans des cas étendus si l'intégrale de l'équation donnée (1) est algébrique.

Première application. — Tous les cols de l'équation (1) ont leur exposant égal à -1.

Dans ce cas, si C_0 est une valeur remarquable, on a nécessairement :

$$P - C_0 Q = (R_1 R_2 \ldots\ldots R_k)^\sigma,$$

$R_1, \ldots\ldots R_k$ étant des polynômes irréductibles et distincts. Si l désigne le nombre des valeurs remarquables[1] pour lesquelles σ est supérieur à 1 ; on a, d'après l'égalité (3) [voir page 202] :

$$(3)' \qquad q+1 = (2-l)n - n\left[\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_l}\right] = \left[\frac{1}{\sigma_1} + \cdots + \frac{1}{\sigma_l} + 2 - l\right]n.$$

Les entiers $\sigma_1, \ldots \sigma_l$ sont premiers entre eux deux à deux : car si σ_1, σ_2 admettaient un diviseur commun d, comme il est loisible de

---

[1] Dans ce qui suit, nous réservons le nom de valeurs remarquables aux valeurs C_0 de C pour lesquelles $Q - CP$ renferme en facteur un polynôme $R(x, y)$ à une puissance plus grande que 1. Les autres valeurs de C pour lesquelles l'intégrale se décompose n'interviennent pas dans la formule (3) qui relie n et q.

supposer $C_1 = 0$, $C_2 = \infty$, on aurait : $C' = \frac{P_1^{\frac{d\sigma_1'}{}}}{P_2^{d\sigma_2'}}$, et l'équation (2) ne serait pas irréductible, mais se ramènerait à la forme :

$$C' = \frac{P_1^{\sigma_1'}}{P_2^{\sigma_2'}}$$

de degré $\frac{n}{d}$.

Cela étant, je dis que l est au plus égal à 2.

Tout d'abord, si l est égal à zéro, on a : $n = \frac{q+1}{2}$; si $l = 1$, on a : $q + 1 = n\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)$, d'où $n < q + 1$. Pour $l = 2$, soit $C = 0$, $C = \infty$ les deux valeurs remarquables, on a : $C = \frac{P_1^{\sigma_1}}{Q_1^{\sigma_2}}$, et si n_1 est le degré de P_1, n_2 le degré de Q_1, l'égalité (3) s'écrit :

$$q + 1 = n_1 + n_2$$

Il suffit donc d'écrire l'égalité $C = \frac{P_1^{\sigma_1}}{Q_1^{\sigma_2}}$, où P_1, Q_1 sont des polynômes de degré $q + 1$ à coëfficients indéterminés, et de vérifier si l'égalité (où σ_1, σ_2 sont aussi indéterminés) définit l'intégrale de (1). – Quand il en est ainsi, le rapport $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ doit être, de plus, commensurable. – En définitive, quand on sait que l est moindre que 3, le problème ne présente aucune difficulté.

Pour $l > 2$, soit $l = k + 2$, on a :

$$q + 1 = n\left[\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_{k+2}} - k\right] = n\left[\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} - \left(1 - \frac{1}{\sigma_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\sigma_{k+2}}\right)\right];$$

si on range les nombres $\sigma_1, \ldots \sigma_{k+2}$ par grandeurs croissantes, comme ces nombres sont premiers entre eux deux à deux, les trois premiers σ_1, σ_2, σ_3 sont au moins égaux respectivement à 2, 3, 5 ; $\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}$ est donc moindre que 1, toutes les différences $\left(1 - \frac{1}{\sigma_3}\right), \ldots \left(1 - \frac{1}{\sigma_{k+2}}\right)$ sont plus grandes que $\frac{4}{5}$. Pour que le coëfficient de n soit positif, k doit donc être au plus égal à 1, l à 3. Pour $l = 3$, la différence $\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3} - 1$ n'est positive que si σ_1 est moindre que 3 (d'où $\sigma_1 = 2$), σ_2 moindre que 4 (d'où $\sigma_2 = 3$), σ_3 moindre que 6 (d'où $\sigma_3 = 5$). On a donc :

$$q+1 = n \times \frac{1}{30}\,;\quad n = 30\,(q+1).$$

On voit ainsi que n est limité. Mais ce dernier cas ne peut se présenter : en effet, on aurait, dans ce cas, en supposant $C_1 = 0$, $C_2 = \infty$, $C_3 = -1$,

$$P_1^{\sigma_1} + P_2^{\sigma_2} + P_3^{\sigma_3} \equiv 0,$$

P_1, P_2, P_3 étant trois polynômes. Or Halphen a démontré qu'une telle identité est impossible quand la courbe $QC - P = 0$ est indécomposable. (Voir son mémoire couronné sur les équations linéaires). Il suit de là que l est au plus égal à 2. La question est résolue quand les exposants des cols sont tous égaux à 1.

Remarque – Observons que le raisonnement précédent (quels que soient les exposants des cols) montre que le nombre des valeurs remarquables de la constante est au plus égal au nombre $\delta + 3$, δ représentant le nombre des cols, et cela sans s'appuyer sur le théorème d'Halphen. En effet, si $(k+2)$ désigne le nombre des valeurs remarquables C de seconde espèce, on a :

$$q+1 \leqq n\left[\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} - \left(1 - \frac{1}{\sigma_3}\right) - \cdots\cdots - \left(1 - \frac{1}{\sigma_{k+2}}\right)\right],$$

d'où $l_{3} + 2 \leqq 3$; et pour les autres valeurs remarquables de C, la courbe passe par un col.

Si on s'appuie sur le théorème d'Halphen, on voit que les valeurs remarquables de la seconde classe sont en nombre égal au plus à 2 ; le nombre total des valeurs remarquables ne peut dépasser $\delta + 2$.

Deuxième application. – Tous les exposants

$\frac{-\mu}{\nu}$ des cols, qui ne sont pas égaux à -1, (mis sous forme irréductible) ont leurs termes μ, ν plus grands que 5.

Nous supposons qu'il existe au moins un col dont l'exposant n'est pas égal à -1 : autrement, on rentrerait dans

l'application précédente. Il existe alors au moins une valeur remarquable C' de C pour laquelle $P - CQ$ renferme des facteurs distincts à des puissances différentes $\sigma\mu$, $\sigma\nu$: pour ces diverses valeurs C', les puissances des facteurs en lesquels $P - CQ$ se décompose, sont toutes égales au moins à 6. Il suit de là que le nombre des valeurs remarquables de première et de seconde espèce est au plus égal à 2. En effet, s'il existe plus de deux valeurs remarquables, l'égalité (3) donne ici :

$$q + 1 \leqq n\left[\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{6} - 1\right],$$

σ_1 étant au moins egal à 2, σ_2 à 3 ; inégalité absurde. On sait, par suite, reconnaître si l'intégrale de l'équation donnée est algébrique.

On pourrait étendre ces applications ; mais elles suffisent à faire comprendre la portée de la méthode. Cette méthode peut être appliquée d'ailleurs à une équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)},$$

où X, Y sont des polynômes tout à fait quelconques. Les branches d'intégrales qui passent par un point singulier M_i (intersection de $X = 0$, $Y = 0$) se répartissent en branches qui dépendent d'une constante, et en branches isolées : nous montrons que ces branches isolées forment des groupes inséparables Γ, et qu'aux r branches d'un de ces groupes correspond un système d'entiers $\lambda_1, \ldots \lambda_p$, premiers entre eux, et qui se calculent sur l'équation (1) à l'aide d'un nombre fini d'opérations

linéaires. Quand, pour $C = C_0$, la courbe intégrale se décompose en plusieurs courbes distinctes, elle comprend nécessairement un de ces groupes Γ de branches isolées, et l'équation $P - C_0 Q = 0$, dans le voisinage du point singulier correspondant M_i, est de la forme :

$$P - C_0 Q \equiv \left[y - f_1(x)\right]^{\sigma\lambda_1}\left[y - f_2(x)\right]^{\sigma\lambda_2} \cdots \left[y - f_r(x)\right]^{\sigma\lambda_r} H(x, y),$$

$y = f_i(x)$ étant une des branches du groupe Γ, et $H(x, y)$ étant holomorphe dans le domaine de M_i.

Il suit de là que quand tous les entiers λ_i d'un groupe Γ quelconque sont égaux à l'unité, ou plus grand que 5, on sait reconnaître si une équation (1) donnée a son intégrale algébrique.

Insuffisance du critérium précédent. —

Nous avons ainsi un moyen de tenir compte (sur l'équation différentielle) de ce fait que l'intégrale est supposée irréductible. — On peut se demander si les conditions ainsi exprimées sont suffisantes pour que l'intégrale soit sûrement irréductible ? Autrement dit, les égalités qu'entraîne la seconde méthode limitent-elles, dans tous les cas, le degré n de l'intégrale supposée algébrique ? Il n'en est rien. Dans les deux applications faites plus haut, le nombre des valeurs remarquables de la constante se trouve être inférieur à 3 : c'est là un fait général chaque fois que la méthode réussit. Dès que le nombre des valeurs remarquables de la constante (l'intégrale étant algébrique) dépasse 2, on peut remplacer l'intégrale irréductible $\chi(x, y) = C$ par une combinaison rationnelle de degré

aussi élevé qu'on veut $R(\chi) = C'$, sans que les égalités en question cessent d'être vérifiées.[1]

On peut, il est vrai, combiner la seconde méthode avec la première ; on peut même compléter la première méthode en calculant non seulement la classe, le genre de l'intégrale générale, et le nombre des intersections de deux intégrales quelconques, mais aussi la classe, le genre des courbes irréductibles qui correspondent aux valeurs remarquables de la constante, le nombre de leurs intersections deux à deux ou avec l'intégrale générale $\chi = C$. Mais les formules qu'on obtient ainsi sont vérifiées encore quand on remplace l'intégrale $\chi = C$ par une combinaison rationnelle quelconque $R(\chi) = C'$, du moment que le genre de la courbe $\chi = C$ n'est pas nulle. Nous arrivons donc à la conclusion suivante : pour reconnaître si l'intégrale d'une équation (1) quelconque

$$y' = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)},$$

est algébrique, on applique à la fois la première et la seconde méthode. Si les égalités et les inégalités ainsi obtenues sont incompatibles, l'intégrale n'est pas algébrique. Si elles sont compatibles et limitent n, le problème est résolu ; mais on est certain dans ce cas qu'une au moins des deux conditions suivantes sera realisée : ou bien les courbes intégrales sont unicursales, ou bien le nombre

---

(1) La chose est aisée à démontrer.

des valeurs remarquables [1] de la constante est inférieur à 3. — Comme il est facile de former des exemples où les intégrales sont de genre quelconque et où le nombre des valeurs remarquables C est égal à 3, on voit que la question appelle de nouvelles recherches.

Equations différentielles de degré quelconque. —

La seconde méthode s'étend à une équation quelconque du premier ordre

$$F\ (y', y, x) = 0$$

algébrique en y', y, x : tout d'abord, il est facile d'établir une égalité qui correspond à la formule (9) de la page 167, comme l'égalité (3) que nous venons d'employer correspond à la formule (8) de la page 147. On met ensuite en évidence sur l'équation différentielle un nombre fini de points singuliers M_i, par lesquels passent un nombre fini de branches d'intégrales, les unes isolées, les autres dépendant de constantes. Les branches isolées se répartissent en groupes Γ de branches inséparables auxquels sont attachés des systèmes d'entiers $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, premiers entre eux, qui jouent le même rôle que plus haut. Quand, pour une valeur de C, la courbe intégrale irréductible se décompose en plusieurs courbes distinctes, elle comprend au moins un des groupes Γ : d'où le moyen de limiter n quand tous ces entiers λ sont égaux à 1, ou plus grands que 5, etc. Toutefois, dans certains cas exceptionnels où ces conditions sont remplies, on sait seulement ramener l'intégrale à la forme $J \equiv \int H\ (y, x)\ [dy - y'\,dx] = C$, H étant une fonction algébrique de x, y, et y' la fonction définie par $F = 0$; pour que l'intégrale soit algébrique, il faut que l'expression $e^{gJ(x,y)}$, pour une certaine valeur de g, soit algébrique.

On peut combiner cette méthode avec celle de M. Autonne,

---

[1] Nous réservons toujours le nom de valeurs remarquables aux valeurs C pour lesquels $P - C\,Q$ renferme au moins un polynôme à une puissance supérieure à 1.

mais on n'obtient pas ainsi la solution générale du problème.

Conclusions. — En définitive les deux méthodes que nous venons d'exposer employées seules ou combinées, permettent de reconnaître dans des cas très étendus, si l'intégrale d'une équation donnée

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0$$

est algébrique, ou de ramener l'équation à une quadrature. Il résulte, d'ailleurs, de ce qui précède, que la question ne peut faire aucun progrès nouveau si on n'introduit pas, d'une manière ou d'une autre, des conditions (distinctes de celles que nous possédons déjà) pour exprimer que l'intégrale est irréductible. Autrement dit, il faudra ajouter aux égalités et inégalités qui découlent des deux méthodes précédentes, d'autres égalités et inégalités qui ne subsistent plus quand on remplace l'intégrale irréductible $X(x, y) = C$ par une combinaison rationnelle $R(X) = C'$ d'un degré suffisamment élevé en X.

Pour chercher ces nouvelles conditions, on peut suivre deux voies : ou bien étudier les propriétés générales des courbes planes ou gauches et chercher de nouvelles formules de géométrie énumérative qui supposent l'irréductibilité ; ou bien chercher directement sur l'équation différentielle de nouvelles conséquences de l'irréductibilité supposée de l'intégrale, comme dans la seconde méthode. On prévoit que dans de telles recherches, l'expression uniforme des coordonnées d'un point d'une courbe en fonction d'un paramètre, — soit à l'aide des fonctions abéliennes, soit à l'aide des fonctions fuchsiennes, — doive jouer un rôle utile : en effet, quand les coordonnées sont ainsi exprimées, l'équation algébrique qu'elles vérifient est toujours irréductible.

J'ajoute qu'on ne peut espérer résoudre d'un coup le problème qui consiste à limiter n. L'énoncé vers lequel il faut tendre doit avoir la forme suivante : « On sait reconnaître si l'intégrale « d'une équation (1) donnée est algébrique ou ramener l'équation aux « quadratures. » Dans ce dernier cas, la question reviendrait à reconnaître

si une certaine intégrale abélienne (de première ou de troisième espèce) n'a que deux ou une périodes.

Historique. – Jusque dans ces dernières années, on ne s'est occupé de l'intégration algébrique des équations $F(y', y, x) = 0$ que dans les cas particuliers où l'équation a une des trois formes.

$$y' = f(x), \quad \frac{y'}{y} = f(x), \quad \frac{y'}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = f(x),$$

cas particuliers qui se présentent d'eux-mêmes quand on étudie les équations $F(y', y) = 0$ dont l'intégrale $y(x)$ est une fonction à un nombre fini de branches. De plus, l'étude des cas où l'équation linéaire et homogène du second ordre a son intégrale générale algébrique, comprenait évidemment l'étude du même problème relatif à l'équation de Riccati. Mais le premier résultat général relatif à une équation quelconque $F(y', y, x) = 0$, [algébrique en y', y, x], est dû à M. Darboux. Dans un mémoire magistral (Bulletin des sciences mathématiques, 1876), M. Darboux a montré que si on connaît $\frac{q(q+1)}{2} \equiv d$ intégrales algébriques particulières distinctes d'une équation :

$$y' = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)},$$

on sait intégrer l'équation, dont l'intégrale est de la forme

$$(m) \qquad C = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots\ldots\ldots P_d^{\alpha_d},$$

$P_i(x, y) = 0$ est une des intégrales particulières connues et les α sont des constantes numériques. Pour que l'intégrale soit algébrique, il suffit que l'intégrale puisse se mettre sous une forme (m) où les α soient réels et commensurables. Le théorème a été étendu par M. Picard aux équations $F = 0$ de degré quelconque en y' : ce résultat se déduit aussi d'une extension donnée par M. Darboux lui-même à son théorème, pour une équation différentielle d'ordre quelconque.

J'ai fait connaître les principes de la première méthode que j'ai exposée plus haut dans une note des Comptes-Rendus

de l'Académie des sciences de Paris, mai 1890, en indiquant que ces principes ne pouvaient limiter n que dans le cas où le genre de l'intégrale se trouve être nul. Peu de temps après, M. Autonne a publié les premiers résultats auxquels il était parvenu de son côté et qu'il a développés plus tard dans des mémoires auxquels j'ai déjà renvoyé.

Quant à la seconde méthode, l'égalité (3), qui lui sert de point de départ, se trouve déjà dans le mémoire cité de M. Darboux. La correspondance si importante entre les cols et les valeurs remarquables de la constante a été établie par M. Poincaré dans une note des Comptes-Rendus (Avril 1891) pour les équations (1)'

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)},$$

où X et Y sont des polynômes en x, y tels que les courbes $X = 0$, $Y = 0$ n'aient que des intersections simples : ces résultats se trouvent développés dans un mémoire des Rendiconti del Circolo Mat. de Palermo (Avril 1891). J'étais parvenu vers la même époque, par une méthode différente, à des résultats qui coïncident avec ceux de M. Poincaré pour les équations (1)', mais qui s'appliquent à une équation quelconque du premier ordre algébrique en y', y, x : j'ai énoncé succinctement ces résultats dans une note des Comptes-Rendus (Mai 1891). Dans cette leçon, je me suis restreint pour plus de simplicité aux équations (1)', mais la démonstration que j'ai employée s'étend à une équation quelconque algébrique en y', y, x. On trouvera la démonstration de M. Poincaré dans le mémoire du Circolo.

J'ajoute qu'en combinant les égalités relatives au genre et au nombre d'intersections des courbes intégrales avec la considération des valeurs remarquables de la constante, M. Poincaré (loc. cit.) a obtenu explicitement la formule fondamentale (c) de la page 197, formule relative aux équations (1)' que nous avons donnée comme une des applications de la première méthode.

J'insiste enfin sur le procédé de démonstration qui a mis en évidence, dans l'exposé de la seconde méthode, le rôle des cols. Étant donnée une relation

$$F(y, x, C) = 0$$

entière en y, C et de degré n en y, supposons que, pour une valeur quelconque de C, les n déterminations de $y(x)$ se permutent autour de points critiques mobiles (c'est-à-dire variable avec C) : si pour une valeur particulière C_0 de C, il n'en est plus ainsi, le procédé consiste à voir ce que deviennent (quand C tend vers C_0) les points critiques x autour desquels se permutent deux branches $y(x, C)$ qui cessent de se permuter pour $C = C_0$. On conçoit que ce procédé s'applique à toutes les questions du même genre.

Treizième Leçon

Équations dont l'intégrale n'a qu'un nombre fini de branches. Conclusions générales sur les équations du premier ordre.

Dans les leçons précédentes, nous avons établi deux propriétés fondamentales des équations du premier ordre :

(1) $$F(y', y, x) = 0,$$

(algébriques en y', y) :

1° Les points singuliers transcendants de l'intégrale $y(x)$ sont fixes.

2° L'intégrale $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ considérée comme fonction de y_0 ne présente dans tout le champ des y_0, que des singularités algébriques.

Appliquées à la classe particulière d'équations (1)

dont l'intégrale n'a qu'un nombre fini n de branches permutables autour des points critiques mobiles, ces deux propositions montrent que l'intégrale $y(x)$ d'une telle équation est une fonction algébrique de la constante y_0 et vérifie une relation

(2) $$y^n + \rho_{n-1}(x, u, u')\, y^{n-1} + \cdots + \rho_0(x, u, u') = 0,$$

avec :

(3) $$\sigma(u', u, x) = 0,$$

les ρ étant rationnels en u', u, et l'équation différentielle (3) algébrique en $u'u$ ayant ses points critiques fixes : les coefficients des ρ et de σ s'expriment rationnellement en fonction des coefficients de (1) et de leurs dérivées.

Ceci revient à dire que les combinaisons symétriques :

$$R_{n-1}(x) = y_1 + \cdots + y_n, \ldots\ldots R_0(x) = y_1\, y_2 \cdots y_n,$$

s'expriment algébriquement en fonction d'une d'entre elles (soit R_0) ainsi que les dérivées $R_i'(x)$, les coëfficients $A(x)$ des fonctions algébriques $R_i = g_i(R_0, x)$, $R_i' = g_i'(R_0, x)$ se calculant algébriquement à l'aide des coëfficients de (1) [et de leurs dérivées].

On peut être tenté de regarder ce résultat comme évident à priori ; il est bien certain, en effet, que les fonctions $R_i(x, y_0)$ sont des fonctions à points critiques fixes, et qu'en éliminant y_0 on exprime les $R_i(x)$, $R_i'(x)$ en fonction d'un des R_i, soit $R_0(x)$; en sorte que $y(x)$ est donné par une relation :

(2)' $$y^n + \rho_{n-1}(R_0, x)\, y^{n-1}, \ldots + \rho_1(R_0, x)\, y + R_0 = 0,$$

avec :

(3)' $$\sigma\left(\frac{dR_0}{dx}, R_0, x\right) = 0$$

l'équation (3)' ayant ses points critiques fixes. De plus, le système (2)', (3)' est évidemment unique, (si n est le nombre exact des valeurs de $y(x)$ permutables autour des points critiques mobiles). Mais, d'une part, les ρ_i sont-ils algébriques en R_0 et l'équation $\sigma = 0$ est-elle algébrique en R_0', R_0 ? D'autre part, cette première condition

remplie, les coëfficients $A(x)$ des fonctions $\rho_i(R_o, x)$ et σ se calculent-ils algébriquement d'après ceux de l'équation (1) ? Il n'est nullement évident qu'il en soit ainsi. La réponse à la première question est affirmative parce que les $R_i(x, y_o)$ renferment algébriquement y_o. La réponse à la seconde question est affirmative parce que les conditions pour qu'une équation $\sigma(u', u, x) = 0$ (algébrique en u', u) ait ses points critiques fixes, sont elles-mêmes algébriques.

Nous verrons que pour le second ordre, la proposition analogue est en défaut parce que $y(x)$ n'est plus en général une fonction algébrique de y_o, y'_o. Mais nous allons voir dès maintenant que pour le premier ordre, la proposition analogue étendue à tous les points critiques (fixes ou mobiles), n'est plus vraie en général, parce qu'on ne sait plus exprimer algébriquement que les $R_i(x)$ n'ont pas de points critiques fixes.

Equations dont l'intégrale $y(x)$ est une fonction à n branches. – Pour fixer les idées, nous supposerons que les coëfficients de l'équation (1) sont rationnels en x, [le polynôme F en y', y étant irréductible pour x quelconque]

Si l'intégrale générale de l'équation (1) est une fonction à n branches, elle vérifie une relation :

$$y^n + R_{n-1}(x, y'_o, y_o)\, y^{n-1} + \cdots + R_1(x, y'_o, y_o)\, y + R_o(x, y'_o, y_o) = 0,$$

où les R_i sont des fonctions uniformes de x et des fonctions rationnelles du point y'_o, y_o de la courbe $F(y'_o, y_o, \bar{x}_o) = 0$. Les R_i s'expriment algébriquement en fonction d'un d'entre eux, soit $R_i = \rho_i(R_o, x)$, et satisfont respectivement à une équation différentielle :

$$(4) \qquad \sigma_i\left(\frac{dR_i}{dx}, R_i, x\right) = 0 \qquad (i = n-1 \ldots 1, 0),$$

algébrique en R_i, $\frac{dR_i}{dx}$. De plus, le système de fonctions $\rho_i(R_o, x)$, et d'équations $\sigma_i = 0$ est unique : mais les coëfficients $\lambda(x)$ des ρ_i, σ sont en général des fonctions transcendantes de x.

Appelons n' le nombre des valeurs de l'intégrale générale $y(x)$ qui se permutent autour des points critiques mobiles : $n' \leq n$. Si $n = n'$ les fonctions $R_i(x) = \varrho_i(x, u, u')$ qui figurent dans (2) sont uniformes ainsi que la fonction $u(x)$. L'intégrale $y(x)$ se laisse donc mettre sous la forme (2), (3) où les ϱ_i sont des fonctions rationnelles de x, u, u', et où l'équation (3) a son intégrale uniforme.

Il en va tout autrement si n' est moindre que n. Nous savons que l'intégrale se met sous la forme :

(2) $$y^{n'} + \varrho^1_{n'-1}(x, u, u')\, y^{n'-1} + \cdots + \varrho^1_0(x, u, u') = 0$$

(3) $$\sigma_1(u', u, x) = 0, \qquad [u \equiv \Sigma \lambda_i \varrho^1_i]$$

σ est une équation à points critiques fixes dont l'intégrale $u(x)$, a un nombre fini ν de déterminations ; le polynôme σ_1 en u', u est irréductible pour x quelconque et rationnel en x, et les ϱ_i sont rationnels en x : les λ sont des fonctions rationnelles de x choisies une fois pour toutes.

Le produit $n'\nu$ est au moins égal à n. Je dis qu'il est exactement égal à n. Soit, en effet, $n'\nu > n$, et soit $u_1, \ldots u_\nu$ les ν branches d'une même fonction $u(x)$. Les $n'\nu$ déterminations $y(x)$ que l'équation (2) fait correspondre à ces ν branches de u, se permutent toutes entre elles, et par suite ne sont pas toutes distinctes. Il existe donc deux branches de u, soit u_1 et u_2, telles que les deux équations (2) obtenues en faisant $u = u_1$, $u' = u'_1$, et $u = u_2$, $u' = u'_2$, aient au moins une racine $y(x)$ commune : si ces deux équations ne coïncident pas, elles ont μ racines $y(x)$ communes ($\mu < n'$) et $y(x)$ n'acquiert que μ déterminations autour des points critiques mobiles : si elles coïncident, les identités $u_1 \equiv \Sigma \lambda_i \varrho^1_i(x, u_1, u'_1)$, $u_2 \equiv \Sigma \lambda_i \varrho^1_i(x, u_2, u'_2)$ montrent que u_1 et u_2 coïncident aussi : n' et ν sont donc deux diviseurs de n dont le produit est égal à n.

Je ferai encore deux remarques bien simples. Supposons que l'intégrale générale $y(x)$ de (1) se laisse mettre sous la forme:

(2)'' $$y^n + R_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \cdots + R_1(x)\, y + R_0(x) = 0,$$

où les coefficients R_i sont des fonctions uniformes de x qui s'expriment algébriquement, ainsi que leurs dérivées, à l'aide de x et d'un d'entre eux. Soit $v = \sum l_i(x) R_i(x)$, les l_i étant des fonctions rationnelles de x choisies arbitrairement une fois pour toutes. On voit (comme à la page 88) que les R_i s'expriment rationnellement en fonction de v, $\frac{dv}{dx}$ (x figurant algébriquement): v est <u>uniforme</u> et est l'intégrale générale d'une équation différentielle $\sigma(v', v, x) = 0$ algébrique en v', v, x. Cette dernière équation en v', v, étant mise sous forme entière irréductible (pour x quelconque), renferme nécessairement x de façon rationnelle. De plus, les expressions $R_i = \varrho_i(v', v, x)$ sont aussi rationnelles en x: car soit $x = \alpha$, un point critique des coefficients de ϱ_i, et $v(x)$ une solution de $\sigma = 0$ qui pour $x = x_0$ est égale à v_0 et a pour dérivée v'_0; la fonction $\overline{R}_i(x) \equiv \varrho_i(v'(x), v(x), x)$ est uniforme par hypothèse; or quand on revient au point x_0, après avoir tourné autour du point α, v et v' reprennent les valeurs v'_0, v_0 et la valeur primitive $\varrho_i(v'_0, v_0, x_0)$ devient $\varrho^1_i(v'_0, v_0, x_0)$: on doit donc avoir $\varrho^1_i(v'_0, v_0, x_0) = \varrho_i(v'_0, v_0, x_0)$, quels que soient v'_0, v_0, x_0. La fonction $\varrho_i(v', v, x)$ est rationnelle en v', v, x.

L'intégrale $y(x)$ vérifie donc une équation de la forme:

(A) : $$y^n + \varrho_{n-1}(v', v, x)\, y^{n-1} + \cdots + \varrho_1(v', v, x)\, y + \varrho_0(v', v, x) = 0,$$

avec:

$$\sigma(v', v, x) = 0,$$

les fonctions ϱ étant rationnelles en v', v, x, et l'équation $\sigma = 0$, ayant son intégrale générale uniforme.

Les n branches $y_1, \ldots y_n$ s'expriment algébriquement en fonction de x, v. Inversement, admettons que $y_1, \ldots y_n$ s'expriment en fonction algébrique de x et de l'intégrale $v(x)$ d'une certaine équation quelconque,

$\sigma(v', v, x) = 0$, algébrique en v', v, v : il en est de même des combinaisons symétriques : de $y_1, \dots y_n$

$$y_1 + \dots + y_n = R_{n-1}, \dots\dots y_1 y_2 \dots y_n = R_0,$$

et l'intégrale $y(x)$ de (1) se laisse mettre sous la forme (2)'', donc sous la forme A. Les n branches $y_i(x)$ s'expriment algébriquement en fonction de x et d'une d'entre elles.

Plus généralement, supposons que μ déterminations de y vérifient une relation :

(5) $$y^\mu + S_{\mu-1}(x, w)\, y^{\mu-1} + \dots + S_0(x, w) = 0,$$

où les S sont algébriques en x, w, et où w est l'intégrale générale d'une équation $\tau(w', w, x) = 0$ algébrique en w', w, x : soit $y_1 \dots y_{\mu'}$, μ' de ces déterminations de y ; les combinaisons $y_1 + y_2 + \dots + y_{\mu'}, \dots y_1 y_2 \dots y_{\mu'}$, sont des fonctions algébriques de x, w, et par suite, elles s'expriment algébriquement (ainsi que leurs dérivées) en fonction de x et d'une d'entre elles.

D'après cela, pour démontrer que $y(x)$ ne peut pas se laisser mettre sous la forme (5) où μ est plus grand que n', il suffit de démontrer que $y_1(x), \dots y_{n'+1}(x)$ étant $(n'+1)$ branches distinctes de la fonction $y(x, y_0)$, une au moins des fonctions $y_i = g_i(x, y_1)$, $[i = 2 \dots (n'+1)]$, obtenues en éliminant y_0, est transcendante en x ; et cela de quelque manière qu'on choisisse les $(n'+1)$ valeurs $y_1 \dots y_{n'+1}$ parmi les n valeurs de y.

Ces remarques faites, distinguons trois cas suivant que le genre ϖ de la courbe $\sigma(u', u, \bar{x}) = 0$ est nul, égal à 1 ou plus grand que 1.

Si ϖ est plus grand que 1, l'équation (1) s'intègre algébriquement, et y vérifie une relation :

$$y^n + \rho_{n-1}(x, c, c')\, y^{n-1} + \dots + y\, \rho_1(x, c, c') + \rho_0(x, c, c') = 0,$$

où les ρ sont rationnels en x, c, c' et où c, c sont deux constantes liées algébriquement.

Les seuls cas qui nous intéressent sont donc les

cas : $\varpi = 0$, $\varpi = 1$. Étudions-les d'abord sur deux types particuliers d'équations (1).

Exemples particuliers.

Considérons en premier lieu l'équation à points critiques fixes :

(1)' $$y'^2 = h(x)(1-y^2)(1-k^2y^2),$$

où h est rationnel en x, et où k est une constante numérique. Pour que l'intégrale générale $y(x)$ de (1)' n'admette qu'un nombre fini de branches, il faut et il suffit que la differentielle totale exacte :

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} - \sqrt{h(x)}\,dx$$

n'ait que deux périodes, soit ω, ω'. Représentons par

$$\frac{g\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}$$

la différentielle elliptique de première espèce dont les périodes sont ω, ω'. On peut passer de la première différentielle elliptique à la seconde par une transformation $z = \varphi(y)$, où φ est une fonction rationnelle de y à coëfficients numériques. L'égalité :

(6) $$\frac{g\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}} = \sqrt{h(x)}\,dx,$$

définit alors pour z une fonction à deux valeurs z_1, z_2, si $h(x)$ n'est pas un carré parfait ; on a :

$$z_1 = sn\,[C + J(x)],\quad z_2 = sn\,[C - J(x)],$$

C désignant une constante ; pour une valeur α de C, ces deux valeurs $z_1(x)$, $z_2(x)$ se confondent et $z(x)$ est une fonction uniforme de x, $Z(x)$; l'intégrale de (6) peut s'écrire :

$$z(x) = \frac{Z(x)\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)} \pm \frac{\gamma Z'}{\sqrt{h(x)}}}{1-k^2\gamma^2Z^2(x)},$$

---

y étant une constante arbitraire. Si nous posons $z_1 + z_2 = v$, $z_1 z_2 = w$, les égalités :

$$v = \frac{2Z\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2y^2Z^2(x)}, \qquad w = \frac{Z^2(1-y^2)(1-k^2y^2)-y^2(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}{(1-k^2y^2Z^2)^2},$$

quand on élimine y, définissent w en fonction algébrique de v et transcendante de x[1]. C'est ce qu'on vérifie à l'aide d'un calcul élémentaire. Pour éviter ce calcul, il suffit d'observer que la relation entre v, w ne renferme x que par l'intermédiaire de la fonction $Z(x)$ qui y entre algébriquement. Si donc $Z(x)$ est transcendante, la relation entre w, v, x, est transcendante en x ou indépendante de x. Dans ce dernier cas, z_1 et z_2 sont liés algébriquement par une relation à coefficients numériques, c'est à dire que les deux fonctions $z_1(x, C)$, $z_2(x, C)$ des deux variables x, C, sont fonctions l'une de l'autre ; z_2 devrait donc être une simple fonction de $C + J(x)$, ce qui est absurde.

L'intégrale à deux valeurs $z(x)$ de l'équation (6) ne peut donc se mettre sous la forme (A), [où $n = 2$].

Revenons à l'équation (1)' soit ν le nombre de périodes $(m\omega + m'\omega')$ de $sn_{k_1^2} g\xi$ qui ne soient pas congruentes par rapport aux périodes ω_1, ω_2 de sn_{k^2}. On voit aussitôt que la fonction $y(x)$ définie par $z = \varphi(y)$, est une fonction à ν branches pour $z = Z(x)$ et une fonction à 2ν branches pour les autres solutions $z(x)$ de (6). La fonction y vérifie donc une équation de degré ν en y.

(7) $$\varphi(y) = z, \qquad \text{avec } g^2 z'^2 = \overline{h(x)}\,\overline{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)},$$

la fonction $z(x)$ ainsi définie étant à 2 valeurs. Mais si on laisse de côté le cas où $h(x)$ est carré parfait et celui où $\int\sqrt{h(x)}\,dx$ est une intégrale abélienne de première espèce, on ne peut mettre $y(x)$

---

[1] Du moment que $Z(x)$ n'est pas algébrique, c'est-à-dire du moment que l'intégrale abélienne $\int\sqrt{h(x)}\,dx$ n'est pas de première espèce.

sous la forme (A) où $n = 2\nu$.

D'où ce théorème : quand $h(x)$ n'est pas un carré parfait et quand $\int \sqrt{h(x)}\, dx$, n'est pas de première espèce, le nombre des branches de $y(x)$ est nécessairement paire, $n = 2\nu$; $y(x)$ se laisse mettre sous la forme (7), mais non point sous la forme (A). En remplaçant y par $y^{n'}$ dans (1)', on voit de même que $y(x)$ ne se laisse pas mettre sous la forme (A), mais sous la forme (5) où $\mu = \frac{nn'}{2} = \nu n'$.

2e Exemple — Prenons maintenant une équation de la classe des équations de Riccati, à savoir l'équation linéaire [où n est un entier positif] :

$$\frac{dy}{dx} = -\left(n x^{n-1} + \frac{1}{nx}\right) y + 1$$

L'intégrale de cette équation est une fonction à n valeurs :

$$y = x^{-\frac{1}{n}} e^{-x^n}\left[C + \int_0^x x^{\frac{1}{n}} e^{x^n} dx\right],$$

C désignant une constante arbitraire. Je dis que $y(x)$ ne peut se mettre sous la forme (A), ou, plus généralement, sous la forme (5) où μ est plus grand que 1. S'il en était autrement, en effet, il existerait au moins deux déterminations y_1, y_2 de y vérifiant (quel que soit C) une relation $g(y_1, y_2, x) = 0$ algébrique en y_1, y_2, x. Or on a, ε désignant une certaine racine ne de l'unité, $u(x)$ une certaine branche de la fonction $x^{-\frac{1}{n}} e^{-x^n}$, $U(x)$ la fonction $\int_0^x \frac{dx}{u(x)}$:

$$y_1 = Cu + uU, \qquad y_2 = \varepsilon Cu + uU,$$

d'où :

$$\varepsilon y_1 - y_2 = (\varepsilon - 1)\, uU.$$

Cette relation doit coïncider avec la relation $g = 0$, et par suite être algébrique en x; $uU \equiv x^{-\frac{1}{n}} e^{-x^n}\int_0^x x^{\frac{1}{n}} e^{x^n} dx$ serait donc une fonction algébrique de x, ce qui est absurde.(1)

---

(1) La fonction uniforme uU est holomorphe dans tout le plan des x, car elle s'annule pour $x = 0$; si elle est algébrique,

Soit encore l'équation :

$$(n'-1)\, y^{n'-1} y' = -\left(\nu x^{\nu-1} + \frac{1}{\nu x}\right) y^{n'} + 1,$$

où n', ν sont deux entiers positifs. Son intégrale prend n' valeurs autour des points critiques mobiles, et $n'\nu = n$ valeurs dans tout le plan des x. Elle vérifie l'équation :

$$y^{n'} = V, \quad \frac{dV}{dx} = -\left(\nu x^{\nu-1} + \frac{1}{\nu x}\right) V + 1,$$

c'est à dire la relation :

$$y^{n'} = x^{-\frac{1}{\nu}} e^{-x^\nu} \left[C + \int_0^x x^{\frac{1}{\nu}} e^{x^\nu} dx\right];$$

mais il est impossible de la mettre sous la forme (A), ou sous la forme (5) où μ est plus grand que n'.

Équations à points critiques fixes de genre zéro ou 1

Considérons maintenant, d'une manière générale, les équations à points critiques fixes dont l'intégrale n'a qu'un nombre fini de branches. Soit :

(1) $$F(y', y, x) = 0,$$

une telle équation, où la courbe $F(y', y, \bar{x}) = 0$ est indécomposable et de genre $\varpi = 0$, ou $\varpi = 1$, les coëfficients dépendant rationnellement de x.

Si ϖ est nul, et si la courbe $F = 0$, est de degré impair, on sait, d'après un théorème de Nœther, exprimer y', y en fonction rationnelle d'un paramètre t, et cela à l'aide de simples opérations linéaires. On ramène donc l'équation (1) à une équation de Riccati :

(1)' $$\frac{dt}{dx} = \alpha t^2 + \beta t + \gamma,$$

---

c'est un polynôme en x de degré q, $P(x)$; mais dans l'identité :

$$P'(x) \equiv -\left(n x^{n-1} + \frac{1}{nx}\right) P(x) + 1,$$

le terme en x^{q+n-1}, qui figure dans le second membre, ne saurait être détruit par aucun autre.

par une transformation :

$$y = r(t,x),\ y' = r_1(t,x), \qquad t = r_2(y',y,x),$$

r, r_1, étant rationnels en t, x, r_2 en y', y, x, et α, β, γ en x. Pour que l'intégrale de (1) puisse se mettre sous la forme (A), [ou plus généralement sous la forme (5)], il faut et il suffit que la même condition soit remplie pour l'intégrale de (1)'. Nous savons, d'après le dernier exemple, qu'il n'en est pas ainsi en général[1].

Quand le degré de la courbe $F = 0$ est paire, des opérations linéaires permettent de la ramener à une conique, et par suite de ramener l'équation (1) à la forme :

$$(1)'' \qquad \frac{dy}{dx} = ay^2 + by + c + (gy + h)\sqrt{\alpha y^2 + \beta y + \gamma},$$

où les coëfficients sont rationnels en x, et où les deux racines $y_1(x)$, $y_2(x)$ du radical sont des solutions singulières. Que l'intégrale d'une telle équation ne puisse en général se mettre sous la forme (1) [ou sous la forme (5)], c'est ce que montre immédiatement l'exemple 2° où on remplace y par $\sqrt{y}$, ce qui donne :

$$y' = 2\left(nx^{n-1} + \frac{x}{n}\right) y + 2\sqrt{y}.$$

— Passons aux équations de genre 1. Nous savons qu'une intégrale première de (1) est de la forme :

$$(8) \qquad C^{te} = J \equiv \int \sqrt{H(x)}\ P(y',y,x)\left[dy - y'dx\right] \equiv \int \sqrt{H(x)}\left[Pdy + Qdx\right];$$

---

[1] On peut préciser les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale $y(x)$ d'une équation de Riccati, supposée à n branches, ($n > 1$), puisse se mettre sous la forme (A) [ou sous la forme (5) où μ est plus grand que 1]. Ces conditions entraînent notamment cette conséquence que l'équation s'intègre par une seule quadrature, quand on en connaît une solution. — La même remarque s'applique aux équations de la forme (1)''.

$P(y', y, x)\, dy$ est la différentielle abélienne de première espèce (rationnelle en x) attachée à la courbe $F(y', y, x) = 0$; H est une fonction rationnelle de x.[1] Les périodes de $\int P dy$ sont indépendantes de x, et les périodes de $J(y, x)$ doivent se réduire à deux pour que l'intégrale $y(x)$ de (1) n'ait qu'un nombre limité n de valeurs.

D'autre part, une transformation algébrique $\theta = \psi(y', y, x)$, transforme une certaine différentielle elliptique $\frac{g\, d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}}$ (où g, k^2 sont numériques) en une différentielle totale de première espèce :

$$dJ_1 \equiv \sqrt{H(x)} \quad [P(y', y, x)\, dy + Q_1(y', y, x)\, dx],$$

rationnelle en y', y, algébrique en x et qui n'a que deux périodes. Il est aisé de montrer[2] qu'on peut supposer Q_1 rationnel aussi en x. De plus, Q et Q_1 se laissent mettre sous forme de polynômes en y' de degré $(m-1)$, à coefficients rationnels en y, x, [m est le degré de F en y']. La différence $Q_1(y', y, x) - Q(y', y, x)$ [polynôme de degré $m-1$ en y'], se réduit, quand on tient compte de (1), à une simple fonction de x ; on a donc identiquement : $Q_1(y', y, x) - Q(y', y, x) \equiv X(x)$, X étant rationnel en x.

Ces préliminaires établis, soit ω_1, ω_2, les périodes de J_1, et soit $\frac{g_1\, d\theta_1}{\sqrt{(1-\theta_1^2)(1-k_1^2\theta_1^2)}}$ la différentielle elliptique qui a comme périodes ω_1, ω_2. L'égalité :

$$\theta_1 = sn_{k_1^2}\left[\frac{J_1(y', y, x)}{g_1}\right],$$

(si on choisit convenablement la constante d'addition qui figure dans J_1) définit θ en fonction rationnelle de y', y, x, et θ_1 vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{g_1\, d\theta_1}{\sqrt{(1-\theta_1^2)(1-k_1^2\theta_1^2)}} = \sqrt{H(x)}\; X(x)\; dx.$$

---

[1] Pour certaines valeurs exceptionnelles du module k^2 de la courbe $F = 0$ (de genre 1), $\sqrt{H(x)}$ doit être remplacé par $\sqrt[4]{H(x)}$ ou $\sqrt[6]{H(x)}$; je néglige, pour abréger, ces valeurs singulières.

[2] La démonstration se trouve faite plus loin (page 284)

Plaçons-nous dans le cas général où $\sqrt{H(x)}$ n'est pas carré parfait, et où $\int \sqrt{H(x)}\,X(x)\,dx$ n'est pas de première espèce....

Si on pose $\tau = \varphi(\theta_1)$, φ étant une certaine fonction rationnelle en θ_1, la fonction $\tau(x)$ ainsi définie est une fonction à deux valeurs $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, et on a:

$$\tau = \psi(y', y, x)$$

ψ étant rationnel en y', y, x ; τ satisfait à l'équation différentielle:

$$(1)' \qquad \frac{g'\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} = \sqrt{H(x)}\; X(x)\, dx.$$

La fonction $y(x)$ vérifie d'après cela, une relation: $G(y, \tau, x) = 0$, où G est un polynôme en y, τ, x. Pour chacune des branches $\tau = \tau_1(x)$, $\tau = \tau_2(x)$ d'une solution de $(1)'$, une solution $y(x)$ correspondante à q valeurs qui sont racines de $G = 0$: q est au moins égal à $\frac{n}{2}$, autrement, $y(x)$ aurait moins de n branches. Je dis que q est égal à n ou à $\frac{n}{2}$; le nombre total des valeurs $y_1, \dots y_q$ et $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \dots \bar{y}_q$ qui correspondent à τ_1, τ_2 est égal à $2q$, si donc q est supérieur à $\frac{n}{2}$, ces $2q$ valeurs ne sont pas toutes distinctes, y_1 par exemple coïncide avec $\bar{y}_1$, et par suite, à cause de la permutation des diverses branches entre elles, chaque valeur du premier groupe coïncide avec une valeur du second ; donc $q = n$.

Ce point établi, si q est égal à n, les n valeurs $y_1, \dots y_n$ de $y(x)$ sont des fonctions algébriques de τ, x ; $y(x)$ se laisse donc mettre sous la forme (A). Mais τ_1 et τ_2 s'obtiennent en remplaçant, dans $\psi(y', y, x)$, y et y' par y_1, y_1' et par y_2, y_2', [y_1 et y_2 étant deux certaines branches de $y(x)$] ; τ_1 et τ_2 s'expriment donc algébriquement en x, v ; autrement dit τ_1 est une fonction algébrique de x, τ_2, et l'intégrale de $(1)'$ se laisse mettre aussi sous la forme (A), ce qui est impossible.

---

en même temps qu'une étude des différentielles totales algébriques (page 175).

Le nombre n est donc pair et l'entier q est égal à $\frac{n}{2}$, les valeurs $y_1, y_2, \dots y_q$ de $y(x)$ qui correspondent à $\tau(x)$ s'expriment algébriquement en τ, x, et l'intégrale de (1) se laisse mettre sous la forme (5) où $\mu = \frac{n}{2}$, à savoir sous la forme :

$$y^q + S_{q-1}(x,\tau)\, y^{q-1} + \dots + S_0(x,\tau) = 0$$

où les S sont algébriques en τ et où τ est une fonction à 2 valeurs qui vérifie l'équation (1)'. De plus, les coefficients $S(x,\tau)$, quand on y remplace τ en x, sont des fonctions $\bar{S}(x)$ à deux branches, ou d'une façon plus précise, des fonctions uniformes de x, $\sqrt{H(x)}$. En effet, quand x, partant d'un point x_0, y revient avec le même signe de $\sqrt{H(x)}$, $\tau(x)$ revient avec la même valeur, et q valeurs de $y(x)$ seulement peuvent s'échanger ; les fonctions $S_{q-1} \dots S_0$ gardent donc la même valeur.

En définitive, du moment que $H(x)$ n'est pas carré parfait et que $\int \sqrt{H(x)}\, X(x)\, dx$ n'est pas une intégrale de première espèce, l'intégrale de (1) ne se laisse pas mettre sous la forme (A), mais se laisse mettre sous la forme (5) où $\mu = \frac{n}{2}$ et où les coëfficients S sont des fonctions de x à deux valeurs, [n est nécessairement pair].[1]

Equations à points critiques mobiles — Les résultats précédents, s'étendent d'eux-mêmes aux équations dont l'intégrale $y(x)$ a un nombre fini n' de branches permutables autour des points critiques mobiles, [n' est supposé plus petit que le nombre total n des branches de $y(x)$].

---

[1] Pour les valeurs exceptionnelles signalées du module de la courbe $F=0$, $\sqrt{H(x)}$ doit être remplacé par $\sqrt[j]{H(x)}$, j étant égal à 3, 4 ou 6. Toutes les conclusions précédentes subsistent : du moment que $\sqrt[j]{H(x)}$ est une fonction de x à j branches permutables, et que $\int \sqrt[j]{H(x)}\, X(x)\, dx$ n'est pas une intégrale de première espèce, l'intégrale $y(x)$ de (1) ne peut pas se mettre sous la forme (A), mais seulement sous la forme (5) où $\mu = \frac{n}{j}$

Les seuls cas qui nous intéressent sont ceux où le genre ϖ de de la relation $\sigma(c, c_1) = 0$ entre les constantes intégrales est égal à zéro ou à 1.

Dans le premier cas, nous savons, d'après un exemple, que $y(x)$ ne se laisse mettre en général, ni sous la forme (A), ni sous la forme (5) où μ est moindre que n'.

Dans le second cas, $y(x)$ ne se laisse pas mettre en général sous la forme (A), mais se laisse mettre alors sous la forme (5) où μ est égal à $\frac{n}{2}$ [ou à $\frac{n}{i}$, pour des valeurs exceptionnelles du module de la courbe $\sigma(c, c_1) = 0$, $i = 3, 4$ ou 6]. Il suffit, pour le voir, de mettre l'intégrale sous la forme (2)', (3)' [page 214] et d'observer que la fonction $u(x)$ à ν branches vérifie une équation différentielle $\sigma_1 = 0$ de genre $\varpi = 1$ à points critiques fixes, $u(x)$ vérifie donc une relation (5) où $\mu = \frac{\nu}{2}$ [ou $\frac{\nu}{i}$]. Par suite, $y(x)$ vérifie une équation (5) où $\mu = \frac{n'\nu}{2} = \frac{n}{2}$, [ou $= \frac{n}{i}$].

D'une façon précise, pour que l'intégrale de l'équation (1), se laisse mettre sous la forme (A) [ou sous la forme (5) où μ est plus grand que n'], il faut et il suffit que l'intégrale $u(x)$ de l'équation $\sigma_1(u', u, x) = 0$ à points critiques fixes se laisse mettre sous la forme (A) [ou sous la forme (5), $\mu > 1$]. La chose est évidente d'après les raisonnement déjà employés.

Conclusions — La discussion qui précède se résume ainsi :

Considérons une équation (1):

$$F(y', y, x) = 0 \tag{1}$$

où F est un polynôme irréductible en y', y (pour x quelconque) à

[n est un multiple de j], et les coefficients $S(x)$ de (5) sont des fonctions à j valeurs qui s'expriment algébriquement en τ, x; τ vérifie l'équation:

$$\frac{g' \, d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} = \sqrt[j]{H(x)} \; X(x) \, dx .$$

coëfficients rationnels en x. Parmi ces équations, soit (E_1) la classe des équations à points critiques fixes, et (E_n) la classe des équations dont l'intégrale générale prend n valeurs autour des points critiques mobiles.

Toute transcendante $y(x)$ engendrée par une équation (E_n) s'exprime algébriquement en fonction de x et d'une transcendante engendrée par une équation E_1.

Plus généralement, soit (E'_1) (ou E'_n) la classe des équations algébriques en y', y, x, dont l'intégrale générale a des points critiques fixes (ou n'acquiert que n valeurs autour des points critiques mobiles). Toute transcendante $y(x)$ engendrée par une équation (E'_n), s'exprime algébriquement en fonction de x et d'une transcendante engendrée par une équation (E'_1). Si on veut, $y(x)$ s'exprime algébriquement en x, u, la fonction u vérifiant soit une équation de Ricatti à coëfficients algébriques, soit une équation : $y'^2 = h(x)(1-y^2)(1-k^2y^2)$, où $h(x)$ est algébrique.

Considérons maintenant toutes les équations algébriques en y', y, x dont l'intégrale est <u>uniforme</u> : soit $(\mathcal{E}_1)$ cette classe d'équations. L'équation $(\mathcal{E}_1)$ étant mise sous la forme $F(y', y, x) = 0$ où F est (pour x quelconque) un polynôme irréductible en y', y, F est nécessairement rationnel en x.

Soit de même $(\mathcal{E}_n)$ la classe des équations :

(1) $$F(y', y, x) = 0,$$

dont l'intégrale générale est une fonction $y(x)$ à n branches, F désignant toujours un polynôme en y', y, à coëfficients rationnels. En général une transcendante $y(x)$ engendrée par une équation $(\mathcal{E}_n)$ ne s'exprime pas algébriquement en fonction de x et d'une solution d'une équation $(\mathcal{E}_1)$.

Soit en effet $y_1(x)$ une solution transcendante d'une équation (1) de la classe $(\mathcal{E}_n)$, et soit $u_1(x)$ une solution d'une équation $(\mathcal{E}_1)$

(1)' $$f(u', u, x) = 0,$$

telle qu'on ait : $y_1 = \varphi(u_1, x)$, φ étant algébrique en u_1, x. Si on remplace y par $\varphi(u, x)$ dans (1), l'équation ainsi obtenue :

$$(2) \qquad F_1(u', u, x) = 0,$$

algébrique en u', u, x, doit avoir au moins une solution $u_1(x)$ commune avec (1)'; si (1)' et (2) ne se confondent pas, $u_1(x)$ est algébrique, par suite $y_1(x)$, ce qui est contre l'hypothèse. Les équations (1)' et (2) ne sont donc pas distinctes, et toutes les solutions de (1) s'obtiennent en remplaçant, dans φ, u par une solution quelconque de (1)' : autrement dit, l'intégrale de (1) se laisse mettre sous la forme (A). Or nous savons que cela est impossible en général.[1]

Appelons (T_1) la classe de toutes les transcendantes $y(x)$ engendrées par les équations $(\mathcal{E}_1)$; appelons (T_2) toutes les transcendantes engendrées par une équation $(\mathcal{E}_2)$, qui ne s'expriment pas algébriquement en fonction de x et d'une transcendante T_1 ; appelons T_i toutes les transcendantes engendrées par une équation $(\mathcal{E}_i)$, qui ne s'expriment pas algébriquement en fonction de x et d'une transcendante T_k, $[k < i]$. Les fonctions T_i sont des fonctions à i branches.[2]

Soit $(\mathcal{E}_i)$ l'équation (unique) que vérifie une transcendante T_i, et soit ϖ le genre de la relation $\sigma(c, c_1) = 0$ entre les constantes intégrales qui correspond à $(\mathcal{E}_i)$; ϖ est égal à zéro ou à 1. Si ϖ est égal à 1, i est égal à 2, 3, 4, ou 6 ; dans les trois derniers cas, le module k^2 de la relation $\sigma = 0$ a une valeur singulière. Si ϖ est nul, i peut être quelconque.

On peut donner aux propositions précédentes une forme plus générale encore. Considérons une fonction quelconque $y = \varphi(x, u_1, \dots u_j)$,

---

[1] A fortiori, la même proposition subsiste si on appelle $(\mathcal{E}_n)$ la classe de toutes les équations algébriques en y', y, x dont l'intégrale générale est à n branches.

[2] Certaines solutions d'une équation $(\mathcal{E}_i)$ peuvent avoir moins de i branches.

où φ est rationnel en $x, u_1, \dots u_j$ et où $u_1, \dots u_j$ sont j solutions de j équations $(\mathcal{E}_1)$. Appelons (τ_1) l'ensemble de toutes ces fonctions uniformes $y(x)$. Soit d'autre part $Y(x)$ une fonction de x à n branches, qui vérifie par suite une relation :

$$Y^n + R_{n-1}(x)\, Y^{n-1} + \dots + R_0(x) = 0,$$

les R étant uniformes et les n valeurs de Y se permutant quand x varie. Je dirai que $Y(x)$ se ramène algébriquement aux fonctions (τ_1) si chacun des coëfficients $R(x)$ est une fonction (τ_1)

Théorème — Cette définition admise, je dis qu'en général une transcendante (T_n) ne se ramène pas algébriquement aux fonctions (τ_1). Admettons en effet qu'une solution transcendante $y(x)$ d'une équation $(\mathcal{E}_n)$ vérifie une relation :

$$(3) \qquad y^q + R_{q-1}\, y^{q-1} + \dots + R_0 = 0, \qquad (q \leq n),$$

où on a : $R_0 = \varphi_0(x, u_1, \dots u_j)$, ... $R_{q-1} = \varphi_{q-1}(x, u_1, \dots u_j)$, les φ étant rationnels et les u_k vérifiant chacun une équation $(\mathcal{E}_1)$

$$(4) \qquad f_k(u'_k, u_k\, x) = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots j),$$

à intégrale générale uniforme. Si j'exprime que l'équation :

$$(\mathcal{E}_n) \qquad F(y', y, x) = 0,$$

et les équations (3) et (4) sont compatibles, j'obtiens certaines conditions algébriques (Σ) entre x, les u et leurs dérivées. Toute solution $u_k(x)$ de (Σ) étant solution de (4), est uniforme, et quand on remplace, dans les R, les u par une solution quelconque de (Σ), les R sont des fonctions uniformes de x : si le système le plus général de fonctions $R(x)$ ainsi formé, ne dépend pas de constantes, il est algébrique en x, la solution $y(x)$ considérée n'est pas transcendante, ce qui est absurde. Si le système $R(x)$ dépend de constantes, il ne dépend que d'une constante : en effet, l'intégrale générale $y(x)$ de $(\mathcal{E}_n)$ ayant exactement n branches, q est nécessairement égal à n dans l'équation (3) et les fonctions $R_i(x)$

renferment une constante et une seule. Si on élimine u_1 par exemple entre les $R_i = \varphi_i(x, u_1, \dots u_j)$ et les dérivées $\frac{dR_i}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} u'_1 + \cdots$, les $u_2 \dots u_j$ se trouvent éliminés d'eux-mêmes, et les R_i, R'_i s'expriment algébriquement en fonction de x et d'un d'entre eux. Lorsque $y(x)$ se ramène algébriquement aux fonction (τ_1), l'intégrale de $(\mathcal{E}_n)$ se laisse donc mettre sous la forme (A); $y(x)$ s'exprime algébriquement en fonction de x et d'une seule fonction (τ_1). D'où le théorème:

Remarque. — Dans toute la discussion précédente, (pages 213-230), nous avons supposé les coëfficients de (1) rationnels en x. Si on les suppose uniformes, ou plus généralement si on suppose qu'ils s'expriment en fonction uniforme de deux variables x, X, liées analytiquement, rien n'est changé dans les résultats énoncés. Quand l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à n branches du couple (x, X), et quand n' branches seulement se permutent autour des points critiques mobiles $[n' < n]$, il est impossible en général de mettre l'intégrale sous la forme:

$$y^n + R_n\, y^{n-1} + \quad + R_0 = 0,$$

les R étant des fonctions uniformes de x, X qui s'expriment algébriquement en fonction des coëfficients de (1), de leurs dérivées, et de $u(x)$: $u(x)$ désigne l'intégrale (uniforme en x, X) d'une équation $\sigma(u', u, x) = 0$, où σ est algébrique en u', u et par rapport aux coëfficients de (1) (et à leurs dérivées).

En particulier, si x et X sont liés algébriquement, ceci revient à dire que $y(x)$ ne peut en général s'exprimer algébriquement en fonction de x et de l'intégrale générale $u(x)$ (uniforme en x, X) d'une équation $\sigma(u', u, x) = 0$, algébrique en u', u, x. A fortiori, $y(x)$ ne peut se mettre sous la forme précédente où $u(x)$ est assujetti à être uniforme en x.

Passons au problème qui consiste à reconnaître si l'intégrale générale d'une équation donnée (1) est une fonction à n branches.

De la question de reconnaître si l'intégrale générale d'une équation (1) est une fonction à un nombre fini de branches — Soit donnée une équation :

(1) $$F(y', y, x) = 0,$$

où F est un polynôme en y', y irréductible pour une valeur arbitraire de x, et dont les coëfficients sont algébriques en x.[1] Il est loisible alors, de supposer que ces coëfficients sont des fonctions rationnelles du point analytique (x, X) d'une certaine courbe algébrique $G(x, X) = 0$. Proposons-nous d'abord de reconnaître si l'intégrale générale de (1) est une fonction transcendante à un nombre fini de branches.

Soit n' le nombre des branches de $y(x)$ permutables autour des points critiques mobiles $[n' \leq n]$. Le problème précédent renferme trois problèmes distincts suivant qu'on se propose de le résoudre.

1° En se donnant n (ou une limite supérieure de n) ;

2° En se donnant seulement n' (ou une limite supérieure de n') ;

3° En ne se donnant ni n, ni n'.

Le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est nul ou égal à 1. Traitons d'abord les problèmes 1° et 2° : on sait reconnaître algébriquement si l'intégrale $y(x)$ ne prend que n' valeurs autour des points critiques mobiles, et ramener alors l'équation (1) soit à une équation de Riccati,

(2) $$\frac{du}{dx} + u^2 + A(x) = 0,$$

soit à une équation de la forme :

(3) $$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = A(x)\,dx,$$

---

(1) On pourrait aussi bien supposer que les coëfficients de (1) sont des fonctions uniformes du couple (x, X) lié analytiquement ; on distinguerait encore deux cas suivant que (1) s'intègre ou non algébriquement.

A étant une fonction rationnelle de x et d'une certaine irrationnelle $\xi(x)$. La question est ensuite de reconnaître si $u(x)$ est une fonction de (x,ξ) à un nombre fini ν de valeurs, ν étant limité dans le problème 1° et entièrement inconnu dans le problème 2°.

Étude de l'équation de Riccati (2) Admettons en premier lieu que l'équation de réduction soit une équation de Riccati (2). Si on pose $u = \frac{z'}{z}$, z vérifie l'équation linéaire:

$$z'' + A(x,\xi)z = 0, \tag{4}$$

et si u_1, u_2, u_3 sont trois intégrales de (2), l'expression:

$$z = \sqrt{\frac{u_2 - u_3}{(u_2-u_1)(u_3-u_1)}}\,,$$

est une intégrale de (4) [voir page 30]. D'autre part, on sait que le quotient de deux intégrales z_1, z_2 de (4), soit $t = \frac{z_2}{z_1}$, vérifie l'équation dite de Schwarz:

$$\frac{t'''}{t'} - \left(\frac{t''}{t'}\right)^2 = 2A(x,\xi), \tag{5}$$

si $t_1(x,\xi)$ est une intégrale de (5) correspondant à une certaine branche de $\xi(x)$, l'intégrale générale de (5) [correspondant à la même branche $\xi(x)$] s'obtient en effectuant sur t_1 une transformation homographique à coëfficients constants. A toute solution $t(x)$ de (5) correspond une solution $z = t'^{-\frac{1}{2}}$ de (4).[1] Il suit de là qu'à toute solution $t(x)$ de (5), correspond une solution $u = -\frac{1}{2}\frac{t''}{t'}$ de (2), et qu'à trois solutions u_1, u_2, u_3 de (2) correspond la solution $t = \frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}$ de (5).

Les trois équations (2), (4) et (5) sont donc rigoureusement équivalentes; quand on sait intégrer l'une, on sait intégrer les deux autres. Si l'intégrale générale d'une de ces équations est une fonction à un nombre fini ν de valeurs, l'intégrale des deux autres équations a aussi un nombre fini ν' et ν'' de valeurs et si ν est

[1] Voir F. Klein, Vorlesungen über das Icosaeder; pages 74-77.

limité, ν' et ν'' le sont également.

Ceci posé, si $t_1(x,\xi)$ est une des branches d'une solution $t(x)$ de (5), toutes les autres branches se déduisent de celle-là par une transformation $t=\frac{a t_1+b}{c t_1+d}$ où a, b, c, d sont des constantes. Lorsque le nombre des branches de la fonction t de (x,ξ) est fini, les opérations $t=\frac{a t_1+b}{c t_1+d}$ qui déduisent d'une des branches t_1 toutes les autres, forment un groupe fini. Or M. F. Klein a formé tous les groupes de cette nature: il existe cinq types canoniques de ces groupes, à savoir les groupes cycliques, du dièdre, du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre, composés respectivement de N, $2N$, 12, 34, 60 opérations; à chacun de ces groupes correspond une fonction fondamentale rationnelle en t, soit $T=R(t)$, de degré égal respectivement à N, $2N$, 12, 24, 60, et qui reste invariante pour les substitutions du groupe, [$T=t^N$ pour le groupe cyclique, $T=t^N+\frac{1}{t^N}$ pour le groupe du dièdre, etc]. Tous les groupes finis de transformations homographiques se ramènent à un de ces cinq groupes par une transformation homographique convenable effectuée sur t. Observons que le groupe cyclique et le groupe du dièdre renferment seuls un élément indéterminé, l'entier N.

Si l'intégrale $t(x,\xi)$ de (5) n'a qu'un nombre fini de branches, il existe une intégrale particulière $t_1(x,\xi)$ dont les différentes branches se déduisent d'une d'entre elles par les transformations d'un des cinq groupes canoniques. Quand on remplace, dans la fonction fondamentale correspondante $T=R(t)$, t par cette solution de (5), T devient une fonction uniforme de x, ξ. D'autre part le changement de variable $T=R(t)$ transforme l'équation (5) en la suivante:

$$\frac{T'''}{T'}-\left(\frac{T''}{T'}\right)^2+\frac{N^2-1}{2N^2T^2}\,T'^2=2A(x,\xi), \tag{6}$$

ou en la suivante:

$$\frac{T'''}{T'}-\left(\frac{T''}{T'}\right)^2+T'^2\left\{\frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(T-1)^2}+\frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2T^2}+\frac{\left[\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2}+\frac{1}{\nu_3^2}-1\right]}{2(T-1)T}\right\}=2A(x,\xi), \tag{7}$$

suivant que $R(t)$ est la fonction fondamentale x^N correspondant au groupe cyclique ou la fonction correspondante à un autre groupe. Les lettres ν_1, ν_2, ν_3 représentent des entiers donnés, pour chaque groupe, par le tableau suivant:[1]

	ν_1	ν_2	ν_3
Dièdre	2	2	N
Tétraèdre	2	3	3
Octaèdre	2	3	4
Icosaèdre	2	3	5

Pour que l'intégrale de (5) soit une fonction à un nombre fini de valeurs, il faut et il suffit qu'une des cinq équations (6) ou (7) admette une solution particulière $t(x,\xi)$ uniforme en (x,ξ)[2]. Les deux premières de ces équations renferment un entier indéterminé N: cet entier est limité dans le problème 1°, inconnu dans le problème 2°.

Indiquons rapidement une autre méthode, qui repose sur ce fait que $R(t)$ est une fonction rationnelle de x^N pour les deux premiers groupes, de $x^{2'}$, de x^4 et de x^5 pour les trois derniers respectivement. Il suit de là que les différentes valeurs de $\frac{t_1''}{t_1'}(x,\xi)$ se réduisent à 1, 2, 6, 6, ou 12, pour la solution $t_1(x,\xi)$ considérée. Il en est de même dans le cas du groupe cyclique, pour la solution $t=\frac{1}{t_1}$. Quand l'intégrale de (1) n'a qu'un nombre fini de valeurs, l'équation (2) possède donc une solution $u(x,\xi)$ de (2) qui n'a que 2, 6, 6 ou 12 déterminations, ou deux solutions uniformes en x,ξ.

---

(1) Voir F. Klein, loc. cit. p. 122.

(2) Cette condition résout évidemment le problème dans certains cas particuliers: par exemple, si A est rationnel en x, et n'admet que le pôle $x=0$ à distance finie, et si on met en évidence une solution de (5) rationnelle dans le domaine de $x=0$, cette solution est uniforme dans tout le plan.

Cette méthode est utile surtout pour l'étude des deux premiers groupes : dans le cas du groupe cyclique, l'équation (2) doit admettre deux solutions uniformes ; dans le cas du groupe du diédre, l'équation du second ordre que vérifie la combinaison $v = t_1 + t_2 + c t_1 t_2$, doit admettre une solution uniforme quel que soit c ; [$t_1(x,\xi)$, $t_2(x,\xi)$, désignent deux solutions arbitraires de (1) et c une constante numérique].

Étude de l'équation (3) — Passons au cas où l'équation de réduction est de la forme (3). Pour que l'intégrale de (3) n'ait qu'un nombre fini de valeurs, il faut et il suffit que les périodes de : $\int A(x, \xi)\, dx$ soient de la forme $\frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\lambda}$; ω et ω' sont les périodes de la différentielle $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$ μ et μ' des entiers quelconques, λ un certain entier invariable. L'entier λ est limité dans le problème 1°, inconnu dans le problème 2°.

On peut dire encore que la question revient à reconnaître si l'équation :

(3)' $$\frac{du}{\lambda\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = A(x, \xi)\, dx,$$

a son intégrale générale uniforme en (x, ξ) : λ désignant toujours un entier, connu ou inconnu suivant qu'on traite le problème 1° ou 2°.

En particulier, supposons que $\int A(x,\xi)\, dx$ soit de la forme $R(x,\xi) + \int B(x,\xi)\, dx$, R étant rationnel en x, ξ et l'intégrale abélienne $\int B\, dx$ étant de première espèce : le problème revient à reconnaître si l'équation (3)', où on remplace A par B, a son intégrale générale <u>rationnelle</u> en x, ξ.

Étude du problème 3° — Quand on ne se donne ni n, ni n', ou bien on sait déterminer une limite supérieure de n' [on rentre alors dans le problème 2°], ou bien (à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques) on ramène l'équation (1) à la quadrature :

$$J = \int P(y', y, x)\, [\, dy, y'dx\,] = C^{te}.$$

où P est rationnel en y', y, algébrique en x. L'intégrale abélienne J doit

ou bien être de troisième espèce et avoir ses résidus polaires commensurables, ou bien être de première espèce. Ces conditions remplies, pour que l'intégrale $y(x)$ de (1) n'ait qu'un nombre fini de branches, il faut encore et il suffit que l'intégrale abélienne J n'ait qu'une période dans le premier cas et que deux périodes dans le second. Si on veut encore, P étant exprimé rationnellement en fonction de y', y, x et d'une irrationnelle $\eta(x)$, il faut et il suffit que l'équation:

$$\frac{d\theta}{\lambda\theta} = P\,[dy - y'\,dx], \text{ dans le premier cas, ou}$$

l'équation:

$$\frac{g\,d\theta}{\sqrt{(1-\theta)^2(1-k^2\theta^2)}} = P[dy - y'\,dx], \text{ dans le second cas, ait son}$$

intégrale générale $\theta(y, x)$ uniforme en y', y, x, η; λ est un entier inconnu, et g, k deux constantes numériques inconnues.

Revenons maintenant en quelques mots sur la recherche des cas où l'intégrale de (1) est algébrique.

De l'intégration algébrique de l'équation (1) — Soit toujours n le nombre des valeurs de y, (x, ξ) et n' le nombre des valeurs permutables autour des points critiques mobiles. On peut se proposer de reconnaître si l'intégrale de (1) est algébrique:

1°. En se donnant une limite supérieure de n;

2°. En se donnant une limite supérieure de n';

3°. Sans se donner ni n ni n'

Dans l'hypothèse $\varpi > 1$, les trois problèmes se traitent sans difficulté. Reste l'hypothèse $\varpi \leq 1$: suivant qu'on a $\varpi = 1$ ou $\varpi = 0$, les problèmes 1° et 2° reviennent à reconnaître si une équation (2) ou une équation (3), [p. 237], a son intégrale algébrique, le nombre des valeurs de $u(x)$ étant limité dans le problème 1°, inconnu dans le problème 2°.

Pour ce qui est de l'équation (2), elle doit admettre ou deux solutions rationnelles en (x, ξ), ou une solution algébrique

$u_1(x,\xi)$ à i branches $[i=2,6,6$ ou $12]$. On détermine sans difficulté la limite supérieure du degré en x de la relation $G(u_1, x)=0$, entière en u_1 et de degré i en u_1, qui définit $u_1(x)$;[1] et on sait, par suite, reconnaître si une telle solution existe. Quand il en est ainsi, l'intégrale de (2) est algébrique dans le cas $i>2$, si i est égal à 2 ou s'il existe deux solutions $u(x,\xi)$ rationnelles en x,ξ, l'équation (1) se ramène à la forme:

(2)' $$\frac{dv}{v} = H(x)\,dx,$$

où H est algébrique en x. La question est alors de reconnaître si l'intégrale de (2)' est algébrique, le nombre de ses valeurs étant donné dans le problème 1°, et inconnu dans le problème 2°. D'où ce théorème:

Dans l'hypothèse $\varpi=0$, on sait résoudre algébriquement le problème 1°; quant au problème 2°, on sait le résoudre algébriquement, ou bien on ramène algebriquement l'équation (1) à une quadrature (2)'.

Dans l'hypothèse $\varpi=1$, la question revient à reconnaître si l'intégrale $v(x,\xi)$, d'une équation

(3)' $$\frac{dv}{\lambda\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = A(x,\xi)\,dx,$$

est rationnelle en x,ξ; k^2 a une valeur numérique connue, λ est un entier limité dans le problème 1°, inconnu dans le problème 2°.

Passons au problème 3°: dans l'hypothèse $\varpi=1$, on reconnaît que l'intégrale de (1) n'est pas algébrique, ou bien on intègre l'équation (1) par la quadrature:

(4) $$J \equiv \int P(y', y, x)\,[dy - y'dx] = C^{te},$$

où J est une différentielle totale de première espèce, qui doit n'avoir que deux périodes. La difficulté consiste à reconnaître si l'équation:

---

(1) Voir, par exemple, les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. (Juillet 1887).

$$\frac{g\,d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}} = \int P(y', y, x, \eta)\,dy + Q(y', y, x, \eta)\,dx,$$

a son intégrale θ rationnelle en y', y, x, η, [g et k^2 sont des constantes inconnues]

J'insiste sur l'intérêt du problème qui consiste à reconnaître si l'intégrale d'une équation $\frac{g\,d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}} = H(x, X)\,dx$ est rationnelle en x, X, problème qu'on peut se poser en se donnant g et k^2, ou en se donnant seulement k^2, ou en ne se donnant ni g, ni k^2, [H est donné numériquement].

Quant à l'hypothèse $\varpi = 0$, nous l'avons longuement discutée en développant deux méthodes pour limiter le degré de l'intégrale. Nous avons indiqué les cas où ces méthodes combinées sont insuffisantes et montré que l'irréductibilité de l'intégrale doit jouer le rôle essentiel dans les conditions nouvelles à introduire.

De quelques propriétés générales des équations du premier ordre — Dans toutes les leçons précédentes, c'est exclusivement aux équations dont l'intégrale n'a que n branches permutables autour des points critiques mobiles, que nous avons appliqué les théorèmes fondamentaux établis sur les équations du premier ordre. Mais ces théorèmes peuvent s'appliquer utilement à l'étude des équations du premier ordre entièrement quelconques. Je me bornerai ici à établir, à l'aide de ces théorèmes, une propriété générale des transcendantes définies par une équation quelconque

$$F(y', y, x) = 0, \tag{1}$$

algébrique en y', y, x.

On connaît ce beau théorème de M. Picard sur les fonctions analytiques entières $G(x)$: « L'égalité $G(x) - A = 0$ a une infinité de racines pour toute valeur finie de A, sauf pour une au plus. » C'est un théorème analogue que je vais établir sur les équations (1).

Je marque dans le plan des y toutes les valeurs constantes $y = a$, qui vérifient l'équation (1). D'une façon plus précise, je considère seulement les valeurs $y = a$, qui sont (quel que soit x),

des zéros, du premier ordre au moins, d'une branche $y'(y,x)$. Soit de plus, η les valeurs de y auxquelles on peut associer une valeur $x=\xi$ (finie ou non) telle que le couple $x=\xi$, $y=\eta$, soit un couple exceptionnel de l'équation (1)[1]. Les valeurs α, η sont en nombre fini j, et s'obtiennent algébriquement.

Quand on regarde dans (1), x comme la fonction, y comme la variable, l'intégrale $x(y)$ de l'équation:

(1)' $$o = F_1(x', x, y) \equiv F\left(\frac{1}{x'}, y, x\right),$$

n'admet pas de points singuliers transcendants en dehors des j points, $y=\alpha$, $y=\eta$: les points $y=\alpha$, sont de la classe ξ', les points $y=\eta$ de la classe ξ'' [voir page 58].

Ceci posé, soit A une valeur numérique quelconque, distincte des j valeurs α, η, et soit $y=\Phi(x)$ une solution de (1), (à un nombre fini ou infini de branches). Je vais démontrer ce théorème:

Théorème _ L'égalité:

(3) $$y(x) - A = o,$$

admet une infinité de racines, à moins que la fonction $x=\Psi_I(y)$, définie par $y=\Phi(x)$, ne soit une fonction à n branches.

En effet, si la solution $x=\Psi_I(y)$ de (2) a une infinité de déterminations, ces déterminations sont algébroïdes pour toute valeur $y=\bar{y}$ distincte des points α, η; si ψ_1 est une des valeurs $\Psi_I(\bar{y})$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs $\Psi_I(\bar{y})$ qui coïncident avec ψ_1. Le nombre des valeurs distinctes $\Psi(\bar{y})$ est donc infini. Il suffit de faire $\bar{y}=A$ pour que

---

(1) J'entends par là un couple tel qu'une telle solution de (1) égale à η pour $x=\xi$ ne soit pas forcément algébroïde dans le domaine de $x=\xi$. Si F est du premier degré en y', y' a la forme $\frac{o}{o}$ pour $x=\xi$, $y=\eta$. Si y' entre dans F à un degré quelconque, nous avons énuméré (page 56) tous les couples exceptionnels ξ, η. Ces couples (en nombre fini) s'obtiennent algébriquement.

le théorème soit démontré.

Si $y(x)$ est une solution quelconque de (1), l'égalité (3) a une infinité de racines (sauf peut être pour certaines solutions $y_1(x)$ exceptionnelles), à moins que l'équation (2) ne s'intègre algébriquement, ou ne se ramène soit à une équation de Riccati soit à une équation $\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}} = h(x)\,dx$, équations dont l'intégrale ne doit avoir qu'un nombre fini de branches.

Supposons, en particulier, qu'il n'existe aucune valeur $y = a$, finie ou infinie.[1] Une intégrale de l'équation (2) qui n'a que n branches est nécessairement algébrique. D'où ce théorème :

« Si A est une valeur distincte des η, et $y(x)$ une solution transcendante de (1), l'égalité (3) admet une infinité de racines ». Quand $y = \infty$ n'est pas un point η, toute solution transcendante de (1) admet une infinité de pôles.

Quand la valeur A coïncide avec une des valeurs a, η, la démonstration précédente est en défaut parce que la solution $x = \Psi(y)$ de (2) peut admettre $y = A$ comme point transcendant ; $y = A$ peut être un point essentiel de $\Psi(y)$ si A fait partie des points a, et seulement un point transcendant ordinaire si A fait partie des points η.

Admettons que A fasse partie des points η [et non des points a]. L'égalité (3), où $y(x)$ est une solution quelconque de (1), admet au moins une racine $x = g(A)$, variable avec la solution $y(x)$ considérée. En effet, une branche au moins de la fonction $y'(y, x)$ est holomorphe pour $x = x_0$, $y = A$, x_0 étant quelconque, et la solution correspondante $y(x)$ est holomorphe pour $x = x_0$. De plus, si on représente par ξ toutes les valeurs en nombre fini de x telles que le couple $x = \xi$, $y = A$ soit un

---

[1] Par définition, $y = \infty$, fait partie des valeurs a, si dans la transformée de (1) en $\frac{1}{y} = z$, une branche $z'(z, x)$, admet $z = 0$ comme zéro (du premier ordre au moins) quel que soit x. De même $y = \infty$ est un point η si l'équation en z admet un couple exceptionnel $x = \xi$, $z = 0$.

couple exceptionnel, toute racine $x = g(A)$ de (3), qui ne coïncide pas avec une des valeurs ξ, varie nécessairement avec la solution $y(x)$ considérée et c'est ce qui apparaît aussitôt, si on observe qu'une solution $y(x)$ définie par les conditions $\bar{x} = g(A)$, $\bar{y} = A$, $[x \neq \xi]$ est algébroïde pour $x = g(A)$.

Cela étant, supposons que (pour une solution quelconque $y(x)$), l'équation (3) n'admette qu'un nombre fini n de racines[1]. (Nous considérons seulement les racines $x = g(A)$ distinctes des ξ). Considérons la solution de (2) définie par les conditions $y = y_0$, $x = x_0$, $x' = x'_0$; soit $x = \psi(y, x'_0, x_0, y_0)$. Pour $y = A$, ψ admet n déterminations (et n seulement) qui ne se réduisent pas aux valeurs numériques constantes, soit :

$$x_1 = \chi_1(x'_0, x_0, y_0) \quad \ldots \quad x_n = \chi_n(x'_0, x_0, y_0).$$

Nous savons d'autre part que toute branche de la fonction $\psi(y, x'_0, x_0, y_0)$ est algébroïde pour $y = A$, $x'_0 = \bar{x}'_0$, $x_0 = \bar{x}_0$, $y_0 = \bar{y}_0$, à moins que la branche considérée de la fonction $\psi(y, \bar{x}'_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ ne soit égale à une des valeurs ξ pour $y = A$: il existe, par hypothèse, n branches de ψ (et n seulement) telles que $\psi(y, \bar{x}'_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ diffère des ξ pour $y = A$, du moment que $\bar{x}'_0$, $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ ne sont pas choisis d'une manière exceptionnelle. La fonction $x_i = \chi_i(x'_0, x_0, y_0)$ est donc une fonction à n branches de : (x'_0, x_0, y_0), analytique et algébroïde (sauf pour des valeurs exceptionnelles de x'_0, x_0, y_0). Si on appelle x', x'' des valeurs de la même solution $x_1(y)$ et de sa dérivée pour $y = y_1$, les n valeurs $x_i = \chi_i(x'_0, x_0, y_0)$ et $x_i = \chi_i(x^1, x^1, y^1)$ coïncident ; autrement dit, l'équation (2) admet l'intégrale première $\chi(x', x, y) = C^{te}$, et comme toute combinaison symétrique de $\chi_1, \ldots \chi_n$ est encore une intégrale première, l'équation (2)

---

[1] On établit aisément que si n_{y_0} représente le nombre des racines de (3), qui correspond à la solution $y = \varphi(x, y_0, \bar{x}_0)$, n_{y_0} est indépendant de y_0, (et ne s'abaisse que pour des valeurs exceptionnelles de y_0).

admet une intégrale première uniforme en x', x, y.

D'où ce théorème :

Si le point A ne fait pas partie des points α, l'équation (3) où $y(x)$ est une solution (prise au hasard) de (1), admet une infinité de racines, ou bien il existe une intégrale première de (1) qui est uniforme en y', y, x [1], soit :

$$C = R(y', y, x).$$

Exemple — Considérons l'équation :

(1) $$y' = \frac{y+x}{x},$$

dont l'intégrale générale est :

(4) $$y = x\left[\frac{y_0}{x_0} + \log\frac{x}{x_0}\right]$$

Le point $y = \infty$ est un point α et le point $y = 0$ est un point η (auquel est associé la valeur $x = 0$) : il n'existe pas d'autres points α, η, ni d'autres couples exceptionnels (à distance finie ou infinie).

Pour $A = 0$, l'équation (3) :

$$A = y \equiv x\left[\frac{y_0}{x_0} + \log\frac{x}{x_0}\right]$$

n'admet qu'une racine [abstraction faite de la racine singulière $x = 0$], à savoir :

$$x_1 = x_0\, e^{-\frac{y_0}{x_0}}.$$

L'équation (1) doit donc admettre une intégrale première uniforme, à savoir :

$$C = x\, e^{-\frac{y}{x}}$$

---

[1] On peut pousser plus loin l'étude de cette fonction uniforme $R(y', y, x)$; on établit notamment qu'il existe deux intégrales premières uniformes en y', y, x, soit $R(y', y, x) = C$, $R_1[y', y, x] = C_1$ (liées par une relation algébrique), et telles que les égalités $R = C$, $R_1 = C_1$ définissent seulement toutes les branches d'une même solution $y(x)$. Les singularités de R sont données par une relation $G(y', y, x) = 0$, qui définit une solution particulière de (1), etc.

Cette équation définit pour $x(y)$ et pour $y(x)$ des fonctions à un nombre infini de branches.

Corollaire _ Une conséquence immédiate de la dernière proposition est la suivante :

Soit $H(y, x) = 0$ une relation algébrique quelconque qui ne définit pas une solution de (1). Pour une solution $y(x)$ de (1) arbitrairement choisie, l'égalité $H[x, y(x)] = 0$ admet une infinité de racines, ou bien il existe une intégrale première de (1) uniforme en y', y, x.

Il suffit, pour le voir, de faire le changement de variables $Y = H(x, y)$.

En particulier, si la solution la plus générale $y(x)$ d'une équation (1) n'a qu'un nombre fini de points critiques, ou bien l'équation (1) a ses points critiques fixes, ou bien elle admet une intégrale première uniforme en y', y, x. Ce nouveau corollaire est une conséquence du précédent appliqué à la courbe $H(x, y) = 0$, qui définit les infinis et les points de ramification de $y'(y, x)$.

Equations du premier ordre $y' = f(y, x)$ où f est transcendant en y. _ J'observe, en terminant, que plusieurs des méthodes et des résultats exposés plus haut, sont susceptibles d'être étendus aux équations transcendantes en y', y, x. Par exemple, supposons que la fonction analytique $y' = f(y, x)$ soit (pour x quelconque) une fonction de y à m branches qui ne présente pas de ligne singulière : on peut établir qu'aucune intégrale particulière : $y(x)$ ne saurait admettre de singularités essentielles en dehors de certains points fixes mis en évidence par l'équation elle-même. Si on cherche, parmi les équations de cette espèce, celles dont l'intégrale ne prend qu'un nombre limité de valeurs (autour des points critiques mobiles), on trouve que $f_1(y, x)$ doit être algébrique en y ; et on rentre dans les problèmes traités antérieurement.

Quatorzième Leçon.

Equations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale dépend algébriquement des constantes

La classe des équations du premier ordre $F(y', y, x) = 0$, algébriques en y', y, dont l'intégrale générale ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles peut être aussi caractérisée par cette propriété que l'intégrale $y(x)$ est une fonction algébrique de la constante arbitraire (convenablement choisie). La méthode employée pour étudier cette classe d'équations, s'étend (moyennant des complications inévitables) aux équations différentielles du second ordre ou d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est une fonction algébrique des constantes arbitraires.

Considérons une équation quelconque du second ordre:

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0$$

où F est un polynôme en y'', y', y, de degré m en y'',[1] et irréductible pour une valeur constante de x (sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles). Supposons que l'intégrale $y(x)$ de cette équation soit de la forme:

$$(2) \qquad y = f(x, a, b),$$

a, b désignant des constantes arbitraires qui figurent dans f algébriquement. Il est clair que les points singuliers essentiels ou transcendants de $y(x)$ sont fixes, et que de plus le nombre des branches de $y(x)$ permutables autour des points critiques mobiles, est fini. En effet, la relation

(1) Les coefficients de F sont des fonctions analytiques quelconques de x.

(2) peut toujours s'écrire :

(3) $\quad y^n + f_{n-1}(x,a,b)\, y^{n-1} + f_{n-2}(x,a,b)\, y^{n-2} + \dots + f_0(x,a,b) = 0,$

où les f_i sont rationnels en a, b et ont par suite leurs points critiques fixes : la racine $y(x)$ de cette équation (3) admet au plus n déterminations quand x varie autour des points critiques mobiles sans tourner autour des points critiques fixes des $f_i(x)$. De plus, les seuls points singuliers non algébriques de $y(x)$ sont les points analogues des coëfficients des $f_i(x)$, points qui sont indépendants de a, b. Les seules singularités mobiles de $y(x)$ sont donc des pôles ou des points critiques algébriques.

Inversement, quand l'intégrale d'une équation (1) a ses singularités essentielles fixes et n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, cette intégrale est-elle une fonction algébrique des deux constantes (convenablement choisies) ? Il n'en est rien. Pour étudier la question de plus près, plaçons nous d'abord dans le cas où tous les points critiques ou essentiels de l'intégrale sont fixes. Marquons alors dans le plan des x les points singuliers fixes ξ_i, et joignons-les par des coupures que nous assujettissons x à ne pas franchir : comme ces points ξ_i comprennent notamment tous les points critiques des coëfficients de F, la fonction $y''(y', y, x)$ définie par (1) est, dans ces conditions, une fonction à m déterminations de y', y, x (une fois choisies les déterminations initiales, pour $x = x_0$, des coëfficients de F). Considérons l'intégrale de (1) définie par les conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$, [x_0, y_0, y'_0, y''_0 étant des valeurs quelconques qui vérifient la condition $F(y''_0, y'_0, y_0, x_0) = 0$], cette intégrale varie avec y''_0, y'_0, y_0, x_0 ; soit

---

(1) On peut toujours supposer que a, b sont les valeurs pour $x = x_0$ de y, y', soit y_0, y'_0, puisque a, b s'expriment algébriquement en y_0, y'_0 et inversement.

$$y = \varphi''(x, y''_0, y'_0, y_0, x_0) \equiv \Phi(x, y'_0, y_0, x_0)$$

cette intégrale. D'après le théorème de Cauchy, φ est une fonction holomorphe de x, y'_0, y_0, x_0 pour $x = \bar{x}_0$, $y'_0 = \bar{y}'_0$, $y_0 = \bar{y}_0$, $x_0 = \bar{x}_0$, du moment que $\bar{y}''_0, \bar{y}'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0$ ne satisfont pas à certaines conditions exceptionnelles. Suivons maintenant la fonction $y(x) = \varphi(x, y''_0, y'_0, y_0, x_0)$ en faisant varier x de x_0 jusqu'en $\bar{x}$ sur un chemin L qui n'a aucun point commun avec les coupures. On n'arrive ainsi en $\bar{x}$ (quel que soit L) qu'avec une seule détermination de $y(\bar{x})$: comme ceci est vrai (quand on donne à x_0 une valeur numérique $\bar{x}_0$) quels que soient $\bar{x}$, y''_0, y'_0, y_0 du moment que $\bar{x}$ n'est pas sur une coupure, on voit que la fonction $\varphi(\bar{x}, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ est une fonction uniforme des variables y''_0, y'_0, y_0 liées par la relation $(1)'$:

$$(1)' \qquad F(y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) = 0.$$

mais cette fonction n'est pas nécessairement rationnelle ; elle peut présenter des singularités transcendantes, comme le montre l'exemple de la première leçon (page 13) :

$$y = y_0 \, e^{\frac{y'_0}{y_0}(x - x_0)} \text{ intégrale de } y'' = \frac{y'^2}{y}.$$

Parmi les équations (1) dont l'intégrale générale a ses points essentiels ou critiques fixes, les équations dont l'intégrale renferme algébriquement les constantes y_0, y'_0 forment une classe particulière ; pour cette classe, l'intégrale $y(x)$ est une fonction rationnelle $\varphi(x, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ des variables y''_0, y'_0, y_0 liées par la relation algébrique $(1)'$. Il est clair d'ailleurs qu'inversement une expression $\varphi(x, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ rationnelle en y''_0, y'_0, y_0 [liées par $(1)'$], définit une fonction $y(x)$ dont les points critiques et les points essentiels sont fixes.

Considérons maintenant une équation (1) dont l'intégrale générale n'acquiert que n valeurs autour des points critiques

mobiles. La fonction $y = \varphi(x, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x}_0)$ est alors susceptible de n déterminations, à savoir les n valeurs de $y(x)$ permutables autour des points mobiles, $y(x)$ désignant l'intégrale de (1) définie par les conditions initiales y_0, y'_0, y''_0 en $\overline{x}_0$. Les fonctions symétriques.

$$R_{n-1} = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n, \dots\dots R_0 = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$$

sont donc des fonctions uniformes des variables y''_0, y'_0, y_0 liées par (1)'. Mais ces fonctions peuvent présenter des singularités essentielles. Quand $y(x)$ dépend algébriquement des constantes, $y(x)$ dépend algébriquement de y'_0, y_0, et les fonctions $R_1, \dots R_n$ sont rationnelles en (y''_0, y'_0, y_0).

En définitive, parmi les équations (1) dont l'intégrale générale a ses points essentiels fixes et n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, nous considérons seulement, dans cette leçon, la classe particulière pour laquelle l'intégrale dépend algébriquement des deux constantes. L'intégrale peut toujours dans ce cas se mettre sous la forme:

$$(4) \quad y^n + R_{n-1}(x, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x}_0) y^{n-1} + \dots + R_0(x, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x}_0),$$

les R_i étant rationnels en y''_0, y'_0, y_0 (liés par (1)'): n désigne le nombre de valeurs qui se permutent autour des points critiques mobiles. Nous allons chercher à définir nettement quelle est, dans ce cas, la nature de l'intégrale, et pour cela nous ramènerons d'abord le cas de n quelconque au cas de $n = 1$.

Réduction du cas de n quelconque au cas de $n = 1$.

Si on répète identiquement le raisonnement de la 5e Leçon (pages 79-81), on voit, en permutant x et x_0, que toute intégrale $y(x)$ et ses dérivées y', y'' vérifient les relations:

$$R_i(\overline{x}_0, y'', y', y, x) = C_i,$$

C_i désignant une constante. Les R_i dans (4) sont des fonctions algébriques $\overline{R}_i$ de y'_0, y_0, et (pour $\overline{x}$ fixe et quelconque) deux au moins

de ces fonctions sont indépendantes : autrement, la fonction $y(x)$ dépendrait seulement d'une constante. On peut donc toujours choisir deux fonctions R_i, soit R_0 et R_1, telles que les égalités :

$$(5) \qquad R_0[\bar{x}_0, y'', y', y, x] = C_0, \quad R_1[\bar{x}_0, y'', y', y, x] = C_1,$$

(où y'' est la fonction de y', y, x donnée par (1)), définissent y et y' en fonction de C_0, C_1 et de x, et représentent l'intégrale générale de (1).

En suivant pas à pas la même marche qu'aux pages 81-88, on arrive aux résultats suivants :

Toute constante intégrale, c'est-à-dire toute intégrale première de la forme

$$C = R(y'', y', y, x),$$

où R est rationnel en y'', y', y, s'exprime rationnellement à l'aide de trois constantes intégrales convenablement choisies :

$$C_1 = r_1(y'', y', y, x), \quad C_2 = r_2(y'', y', y, x), \quad C_3 = r_3(y'', y', y, x),$$

liées par une relation algébrique

$$\sigma(c_1, c_2, c_3) = 0.$$

Les trois constantes intégrales et la relation $\sigma = 0$ (dite relation entre les constantes intégrales) ne sont définies qu'à une transformation birationnelle près. On peut toujours choisir comme constantes intégrales c_1, c_2, c_3, les trois suivantes :

$$c = a_{n-1}(x_0)\, R_{n-1}(x_0, y'', y', y, x) + \dots + a(x_0)\, R_0(x_0, y'', y', y, x),$$
$$\equiv r(x_0\, y'', y', y, x)$$
$$c' = \frac{dr}{dx_0}(x_0, y'', y', y, x), \qquad c'' = \frac{d^2 r}{dx_0^2}(x_0, y'', y', y, x)$$

liées par la relation :

$$G(G'', c', c, x_0) = 0,$$

où x_0 a une valeur numérique.[1]

---

[1] Les $a_i(x_0)$ sont des fonctions quelconques de x_0, choisies seulement de façon à ne pas vérifier certaines conditions exceptionnelles : par exemple, on peut prendre $a_i(x_0) = \alpha_i x_0^2 + \beta_i x_0 + \gamma_i$, où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sont des nombres quelconques.

En permutant dans ce dernier résultat x et x_0, on voit que l'intégrale $y(x)$ peut toujours se mettre sous la forme suivante : si on pose

(6) $u = a_{n-1}(x) R_{n-1}(x, y''_0, y'_0, y_0 \overline{x}_0) + \ldots + a_0(x) R_0(x, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x}_0)$,

u vérifie une certaine équation différentielle

(7) $$G(u'', u', u, x) = 0$$

algébrique en u'', u', u, dont l'intégrale $u(x)$, donnée par (6), a évidemment ses points critiques et essentiels fixes. D'autre part, $y(x)$ est donnée par une relation

(8) $$y^n + \rho_{n-1}(u'', u', u, x) y^{n-1} + \ldots + \rho_0(u'', u', u, x) = 0,$$

les $\rho_0, \ldots \rho_{n-1}$ étant rationnels en u'', u', u (liés par (7)). En définitive, l'intégrale $y(x)$ s'obtient en remplaçant, dans (8), u, u', u'' par une intégrale quelconque $u(x)$ et ses deux premières dérivées. De plus, on a identiquement d'après (6) :

$$u \equiv a_{n-1}(x) \rho_{n-1} + \ldots + a_0(x) \rho_0$$

(si on tient compte de (7)). — Enfin, les fonctions $a_{n-1}(x), \ldots a_0(x)$ une fois choisies, l'intégrale ne peut se mettre sous la forme (8), (7) que d'une seule manière, si n est le nombre exact des valeurs de $y(x)$ qui se permutent autour des points critiques mobiles [1]

Si donc l'intégrale de (1) est de l'espèce étudiée, la fonction u vérifie l'égalité (6) où les R_i sont d'un certain degré en y''_0, y'_0, y_0 ; elle satisfait à une équation $G = 0$ d'un certain degré en

---

[1] J'entends par là que, une fois choisis les $a_{n-1}(x), \ldots a_0(x)$, l'équation (7) est parfaitement déterminée : si μ est son degré en u'', et si on met les ρ_i sous la forme :

(9) $\rho_i = u''^{\mu-1} \alpha_{\mu-1}(u', u, x) + \ldots + u'' \alpha_1(u', u, x) + \alpha_0(u', u, x)$,

où les α sont rationnels en u', u, les coefficients $\alpha(u', u, x)$ sont aussi parfaitement déterminés.

u'', u', u ; enfin l'intégrale $y(x)$ vérifie une relation (8) où les φ_i sont d'un certain degré en u', u (quand on les a mis sous la forme (9)). Toutes ces relations algébriques sont parfaitement déterminées, mais leurs coefficients sont des fonctions de x qui peuvent dépendre, à priori, d'intégrations plus ou moins compliquées. Je dis que les coëfficients de (7), (8) se déduisent de ceux de (1) à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques linéaires. En effet, remplaçons dans (6), (7), (8) tous les coefficients par des fonctions indéterminées de x, et exprimons d'une part que l'égalité (6) définit l'intégrale de (7), d'autre part que la formule (8) transforme l'équation (7) en l'équation (1) ; nous obtenons ainsi un certain nombre de relations algébriques entre les coefficients inconnus, leurs dérivées premières et secondes, et ces conditions (qui sont compatibles) ne définissent qu'un seul système[1] de coëfficients pour (7) et (8) : ce système est donc connu, en fonction des coëfficients de l'équation (1) et de leurs dérivées, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques linéaires. C. Q. F. D

En définitive, le cas de n quelconque se ramène algébriquement[2] au cas de $n = 1$. – Quand l'intégrale d'une équation (1) est une fonction algébrique des constantes, on peut toujours, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques linéaires, calculer une transformation (8) qui ramène l'équation à la forme

$$G\,(u'', u', u, x) = 0,$$

l'intégrale de la nouvelle équation étant une fonction rationnelle des constantes u''_0, u'_0, u'_0, valeurs en $\overline{x}_0$ de u'', u', u, liées par la relation $G(u''_0, u'_0, u_0, \overline{x}_0) = 0$

---

[1] Mais ces conditions définissent une infinité de systèmes de coefficients pour (6).

[2] Observons que nous ne cherchons pas ici à reconnaître si une équation (1) donnée rentre dans la classe étudiée, mais seulement à définir la nature de l'intégrale quand l'équation est de cette classe.

Remarquons que u, u', u'' s'expriment rationnellement en y'', y', y ; en effet, une intégrale quelconque $y(x)$ vérifie la relation

$$R_i\,(x, y''_0, y'_0, y_0, x_0) = R_i\,(x, y'', y', y, x),$$

en sorte que la relation (6)

$$(6) \qquad u = a_{n+1}(x)\,R_{n-1}(x, y''_0, y'_0, y_0, x_0) + \dots + a_0(x)\,R_0(x, y''_0, y'_1, y_0, x_0),$$

peut aussi s'écrire :

$$(9) \qquad u = a_{n-1}(x)\,R_{n-1}(x, y'', y' y, x) + \dots\dots + a_0(x)\,R_0(x, y'', y', y, x)$$
$$\equiv r\,(y'', y', y, x),$$

ce qui entraîne.

$$(10) \qquad u' = \frac{du}{dx} = r_1\,(y'', y', y, x), \quad u'' = \frac{du'}{dx} = r_2\,(y'', y', y, x),$$

r, r_1, r_2 étant rationnels en y'', y', y.

D'autre part, pour u'', u', u donnés, la relation (8) définit n valeurs de y, à savoir les n valeurs d'une intégrale $y(x)$ permutables autour des points critiques mobiles ; y' et y'' sont ensuite donnés rationnellement en fonction de u'', u', u et de y, en différentiant l'équation (8).

La surface algébrique $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$ est donc une transformée rationnelle de la surface algébrique $G(u', u', u, \bar{x}) = 0$. A un point de $F=0$ correspond un seul point de $G=0$: à un point de $G=0$ correspondent exactement n points de $F=0$.

La relation $G(u''_0, u'_0, u_0, \bar{x}_0) = 0$ peut être choisie comme relation entre les constantes intégrales attachée à l'équation (1). On a :

$$u_0 = a_{n-1}(x_0)\,R_{n-1}(x_0, y'', y', y, x) + \dots + a_0(x_0)\,R_0(x_0, y'', y', y, x)$$
$$= \rho\,(x_0, y'', y', y, x)$$
$$u'_0 = \frac{\partial \rho}{\partial x_0} \equiv \rho', \quad u''_0 = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_0^2} \equiv \rho'',$$

et ($\bar{x}_0$ ayant une valeur numérique) les trois intégrales premières de (1),

$u_0 = \rho$, $u'_0 = \rho'$, $u''_0 = \rho''$ définissent, pour u''_0, u'_0, u_0 donnés, les n branches de la même intégrale $y(x)$. Les trois relations $u_0 = \rho$, $u'_0 = \rho'$, $u''_0 = \rho''$ transforment rationnellement la surface $G(u''_0, u'_0, u_0, \bar{x}_0) = 0$ en la surface $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$. On voit qu'il n'y a pas la moindre modification à apporter à la méthode suivie pour le premier ordre.

Tout revient maintenant à définir les intégrations dont dépend l'intégrale d'une équation (1), quand cette intégrale a ses points critiques fixes et renferme algébriquement les constantes.

Équations différentielles à points critiques fixes. –

Soit donc une équation

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0$$

dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes et dépend algébriquement des constantes. L'intégrale peut se mettre sous la forme:

$$(A)\begin{cases} y = \varphi(x, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) \equiv y''^{\,m-1}_0 r_{m-1}(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0) + \dots + r_0(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0) \\ y' = \dfrac{d\varphi}{dx} \equiv \varphi'(x, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) \equiv y''^{\,m-1}_0 r'_{m-1}(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0) + \dots + r'_0(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0), \\ y'' = \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi''(x, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) \equiv y''^{\,m-1}_0 r''_{m-1}(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0) + \dots + r''_0(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0), \end{cases}$$

les r étant des fractions rationnelles en y'_0, y_0 d'un certain degré μ. En permutant x et $\bar{x}_0$, on trouve:

$$(A_1)\begin{cases} y_0 = \varphi(\bar{x}_0, y'', y', y, x) \equiv y''^{\,m-1} r_{m-1}(\bar{x}_0, y', y, x) + \dots + r_0(\bar{x}_0, y', y, x), \\ y'_0 = \varphi'(\bar{x}_0, y'', y', y, x) \equiv y''^{\,m-1} r'_{m-1}(\bar{x}_0, y', y, x) + \dots + r'_0(\bar{x}_0, y', y, x) \\ y''_0 = \varphi''(\bar{x}_0, y'', y', y, x) \equiv y''^{\,m-1} r''_{m-1}(\bar{x}_0, y', y, x) + \dots + r''_0(\bar{x}_0, y', y, x) \end{cases}$$

Les formules (A), (A_1) définissent une correspondance birationnelle entre les points des deux surfaces $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$ et

$$(1)' \qquad F(y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) \equiv F_0 = 0,$$

$\bar{x}$ et $\bar{x}_0$ étant des valeurs fixes quelconques.

La relation $F_0 = 0$ peut être choisie comme relation entre les constantes intégrales. Toute intégrale première de (1) de la forme

$$R(y'', y', y, \bar{x}) = C,$$

où R est rationnel en y'', y', y, est une fonction rationnelle des trois intégrales $y_0 = \varphi$, $y'_0 = \varphi'$, $y''_0 = \varphi''$ définies par (A_1); on a : $C = R(y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$.

Quand on connait les trois intégrales premières (A_1) l'équation (1) est intégrée. Tout revient donc à déterminer les intégrations dont dépendent les coëfficients $\alpha_i(x)$, $\beta_j(x)$ de (A) et de (A_1).

Tout d'abord, écrivons les relations (A) et (A_1) en laissant indéterminés leurs coëfficients $\alpha_i(x)$, $\beta_j(x)$ qui seront des fonctions quelconques de x, et exprimons que les relations (A), (A_1) définissent une correspondance birationnelle entre $F=0$ et $F_0=0$. Il suffit pour cela d'exprimer que quand on remplace, dans (1) et (A_1), y'', y', y en y''_0, y'_0, y_0 d'après (A), les relations ainsi obtenues sont des conséquences de la relation $F_0=0$. Nous formons ainsi un certain nombre d'équations algébriques entre les $\alpha_i(x)$, $\beta_j(x)$ et les coëfficients de (1). Ces conditions sont toujours compatibles, si l'intégrale de (1) est bien de l'espèce indiquée; quand elles sont déterminées, elles admettent un nombre fini de solutions, dont une au moins définit l'intégrale de (1). Cette intégrale est donc une combinaison algébrique des coëfficients de l'équation (1).

Deux correspondances birationnelles entre (1) et (1)' définissent une transformation birationnelle de la surface (1) en elle-même, soit

$$(A)' \qquad y = Y''^{m-1} \rho_{m-1}(Y', Y, \bar{x}) + \dots, \quad y' = \dots\dots, \quad y'' = \dots$$

avec

$$F(Y'', Y', Y, \bar{x}) = 0,$$

où les $\rho_{m-1}, \dots$ sont rationnels et d'un certain degré μ' en Y', Y. Les correspondances birationnelles entre (1) et (1)' seront donc en nombre fini si la surface (1) n'admet qu'un nombre fini de transformations birationnelles (A)' en elle-même (où le degré μ' est donné). Dans ce cas, une quelconque des transformations de passage (A_1) de (1)' à (1) définit l'intégrale générale de (1); en effet, toutes les transformations (A_1) se déduisent d'une d'entre elles (en particulier d'une transformation qui définit l'intégrale) en effectuant sur y''_0, y'_0, y_0, une substitution à coëfficients numériques.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où les

relations algébriques qui donnent les transformations (A), (A_1) permettent de choisir arbitrairement un ou plusieurs des coëfficients $(\alpha, b \ldots g)$ des r_{m-1}, r'_{m-1} .... Nous déterminerons alors algébriquement un système (B) de la forme[1]:

$$(B)\quad \begin{cases} y_0 = \varphi(y'', y', y, \bar{x}, \alpha, b, \ldots g) \\ y'_0 = \psi(y'', y', y, \bar{x}, \alpha, b, \ldots g) \\ y''_0 = \chi(y'', y', y, \bar{x}, \alpha, b, \ldots g), \end{cases}$$

où φ, ψ, χ, sont des fonctions rationnelles en y'', y', y, (entières et de degré $(m-1)$ en y''), des fonctions algébriques des quantités indéterminées $\alpha, b, \ldots g$, et enfin renferment algébriquement les coëfficients de l'équation (1).

Quand on remplace $\alpha, b \ldots g$ par des fonctions quelconques de $\bar{x}$, les formules (B) définissent une correspondance birationnelle[2] entre (1) et (1)':

$$(1)\quad F(y'', y', y, \bar{x}) = 0, \qquad (1)'\quad F(y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) = 0.$$

Observons que la même transformation birationnelle ne peut être mise de deux manières distinctes sous la forme :

$$y_0 = y''^{m-1} r_{m-1}(y', y, x) + \ldots, \quad y'_0 = \ldots\ldots, \quad y''_0 = \ldots\ldots$$

Il suit de là que (l désignant le nombre des indéterminées $\alpha, b \ldots g$), la transformation (B) dépend de l indéterminées $\alpha(\bar{x}), \ldots g(\bar{x})$ distinctes. Autrement dit, on ne peut, par un changement des paramètres $\alpha, \ldots g$, abaisser leur nombre.

Quand, dans (B), on remplace $\alpha, b, \ldots g$ par des fonctions convenables de $\bar{x}$, le système (B) coïncide avec celui qui définit

---

[1] x_0 a reçu une valeur numérique.

[2] Il peut se faire que les conditions algébriques qui assujettissent les coëfficients des r_{m-1}, r_{m-2} .... [quand (A) et (A_1) définissent une transformation birationnelle de (1) en (1)'] se décomposent en plusieurs systèmes distincts de relations. Il faut alors considérer successivement

l'intégrale générale de (1) et où y_0, y'_0, y''_0 sont les valeurs de y, y', y'' pour $x = \bar{x}_0$; soit:

$$y_0 = u\ (y'', y', y, \bar{x}),\quad y'_0 = v\ (y'', y', y, \bar{x}),\qquad y''_0 = w\ (y'', y', y, \bar{x}),$$

ce dernier système.

Considérons maintenant, parmi les formules (B) toutes celles où $a(x), b(x), \dots g(x)$ sont choisis de façon que (B) définisse l'intégrale générale de (1), [y_0, y'_0, y''_0 représentant dans (B) des constantes quelconques liées par (1)'] Soit:

$$\varphi \equiv U\ (y'', y', y, x),\qquad \psi \equiv V\ (y'', y', y, x),\qquad \chi \equiv W(y'', y', y, x),$$

les seconds membres d'un tel système (B). Une intégrale particulière quelconque de (1) vérifie les relations:

$$U(y'', y', y, x) \;=\; U\ (y''_0, y'_0, y_0, x_0),\quad V(y'', y', y, x) = V\ (y''_0, y'_0, y_0, x_0), \dots\dots$$

Il suit de là qu'on a identiquement:

$$(C)\quad \begin{cases} U(y'', y', y, x) \equiv U\ (w, v, u, \bar{x}_0) \equiv \varphi\ (w, v, u, \bar{x}_0, a_0, b_0 \dots g_0), \\ V\ (y'', y', y, x) \equiv V\ (w, v, u, \bar{x}_0) \equiv \psi\ (w, v, u, \bar{x}_0, a_0, b_0 \dots g_0), \\ W\ (y'', y', y, x) \equiv W\ (w, v, u, \bar{x}_0) \equiv \chi\ (w, v, u, \bar{x}_0, a_0, b_0 \dots g_0), \end{cases}$$

Les fonctions U, V, W dépendent donc au plus de l constantes arbitraires; elles se déduisent du système u, v, w par les formules (C). Deux systèmes U, V, W et U_1, V_1, W_1 sont liés birationnellement par les formules:

$$(D)\quad \begin{cases} U_1 = W^{m-1} R_{m-1}(V, U) + \dots + W R_1\ (V, U) + R_0\ (V, U) \\ V_1 = W^{m-1} R'_{m-1}\ (V, U) + \dots + W R'_1\ (V, U) + R'_0\ (V, U) \\ W_1 = W^{m-1} R''_{m-1}\ (V, U) + \dots + W R''_1\ (V, U) + R''_0\ (V, U), \end{cases}$$

où les R, R', R'' sont des fractions rationnelles en V, U d'un certain degré μ, à coëfficients constants ; U, V, W et U_1, V_1, W_1, vérifient les relations:

$$F(W, V, U, \bar{x}_0) = 0,\qquad\qquad F(W_1, V_1, U_1, \bar{x}_0) = 0.$$

---

chacun de ces systèmes (qui sont en nombre fini) et les formules (B) correspondantes: les conclusions qui vont suivre s'appliquent au moins à un de ces systèmes.

Ceci posé, exprimons que les formules (B), où $a, b, \dots g$ sont des fonctions inconnues de x, définissent l'intégrale générale de (1). Nous obtenons ainsi un certain nombre de conditions algébriques entre $a(x), \dots g(x)$, leurs dérivées premières et secondes, et les coëfficients de (1) (et leurs dérivées). Ces conditions[1] sont compatibles et définissent les fonctions inconnues $a(x), \dots g(x)$ à l'aide de l constantes au plus. Soit k l'ordre de ce système différentiel (Σ). D'une façon plus élégante, si on donne à y', y, des valeurs numériques $\bar{y}', \bar{y}$, la fonction $U(y'', y', y, x)$, où on tient compte de (1), devient une certaine fonction $\bar{U}(x)$; V et W deviennent de même $\bar{V}(x)$ et $\bar{W}(x)$. Les fonctions $\bar{U}(x)$, $\bar{V}(x)$, $\bar{W}(x)$ sont définies par un système (σ) d'équations différentielles, et ce système, d'ordre k, une fois intégré, les coëfficients de U, V, W sont déterminés algébriquement. Si k est nul, autrement dit si $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$, sont donnés algébriquement, l'équation (1) s'intègre algébriquement.

Exprimons maintenant que deux solutions quelconques (U, V, W) et (U_1, V_1, W_1) sont liées par les formules (D). Pour cela, nous laissons indéterminés dans (D) les coëfficients $\alpha, \beta \dots \lambda$ qui sont des constantes, et nous exprimons que si on effectue sur la substitution :

$$U = \varphi(y'', y', y, x, a, \dots g), \quad V = \psi(\dots), \quad W = \chi(\dots),$$

la substitution (D), les fonctions U_1, V_1, W_1, sont encore de la forme :

$$U_1 = \varphi(y'', y', y, x, a_1 \dots g_1), \quad V_1 = \psi(\dots), \quad W_1 = \chi(\dots).$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les $a, b, \dots g$ satisfassent à certaines conditions algébriques où figurent les $\alpha, \beta, \dots \lambda$ [et les coëfficients de (1)]. Ecrivons que ces conditions (τ) et les relations différentielles (Σ) sont compatibles. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que certaines relations algébriques entre les $\alpha, \beta, \dots \lambda$, les coëfficients de (1) et leurs dérivées soient vérifiées. Comme ces conditions doivent être

---

[1] A priori, il est possible que ces conditions se décomposent en plusieurs systèmes compatibles distincts. Il suffit alors de considérer un de ces systèmes.

compatibles pour des valeurs constantes de $\alpha, \beta \dots \lambda$, en donnant à x un certain nombre de valeurs numériques (au plus égal au nombre des $\alpha, \dots \lambda$) on forme un système de relations algébriques (S) qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les relations (Σ) et (τ) en $a, b \dots g$ soient compatibles. Soit $\alpha_0, \beta_0 \dots \lambda_0$ une solution quelconque de ces conditions (S) : deux hypothèses sont possibles suivant que les relations (τ), pour $\alpha = \alpha_0, \dots \lambda = \lambda_0$, sont ou non des conséquences de (Σ), et cela quelle que soit la solution $\alpha_0 \dots \lambda_0$ considérée.

Plaçons-nous d'abord dans la première hypothèse. Je dis que l'ensemble des transformations (D) où $\alpha, \beta, \dots \lambda$ vérifient les conditions (S), forme un groupe. Soit en effet (D)' ces transformations : deux solutions quelconques (U, V, W) et (U_1, V_1, W_1) sont liées par une transformation (D)', et inversement toute transformation (D') substitue à une solution quelconque (U, V, W) une autre solution (U_1, V_1, W_1). D'après cela, considérons deux transformations (D') ; la première change la solution (U, V, W) en (U_1, V_1, W_1), la seconde change la solution (U_1, V_1, W_1) en (U_2, V_2, W_2). Si on effectue successivement la première et la seconde transformation, la transformation résultante change (U, V, W) en (U_2, V_2, W_2) ; c'est donc une transformation (D'). De même l'inverse de la première transformation change (U_1, V_1, W_1) en (U, V, W) ; c'est encore une transformation (D)'. L'ensemble des substitutions (D') forme donc un groupe continu fini, qui dépend algébriquement de k paramètres $\alpha, \beta \dots \delta$. En effet, si j désigne le nombre des paramètres $\alpha, \beta \dots \lambda$ qu'on peut se donner arbitrairement dans (D'), le système $U_1 V_1 W_1$ déduit d'un système (U, V, W) particulier, dépend exactement de j paramètres distincts, puisque deux transformations (D') distinctes, conduisent à deux systèmes (U_1, V_1, W_1) distincts : donc $j = k$. On voit ainsi que le système différentiel (σ), d'ordre k, qui définit les fonctions $\overline{U}(x)$, $\overline{V}(x)$, $\overline{W}(x)$, admet le groupe de transformations (D'), où on fait $U = \overline{U}, \dots W_1 = W_1$, $y' = \overline{y}'$, $y = \overline{y}$. Observons enfin que le groupe (D') transforme en elle-même la surface $F(W, V, U, \overline{x}_0) = 0$.

Plaçons-nous maintenant dans la seconde hypothèse : pour $\alpha = \alpha_0, \ldots \lambda = \lambda_0$, les conditions (τ) ne sont pas conséquences de (Σ); les solutions communes à (τ) et à (Σ) vérifient donc un système différentiel (Σ_1) d'ordre moindre, et sur les solutions (U, V, W) définies par (Σ_1), on peut répéter identiquement le raisonnement appliqué à (Σ). En poursuivant la méthode, on voit qu'en définitive ou bien on obtient algébriquement une solution (U, V, W), ou bien on arrive à un système différentiel (σ') d'ordre $\mathcal{R}$ dont les solutions (U, V, W) se déduisent d'une d'entre elles par les transformations d'un groupe continu fini à $\mathcal{R}$ paramètres, qui conserve la surface $F(W, V, U, \bar{x}_0) = 0$.

On peut donc énoncer ce théorème. L'équation (1) considérée :

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0,$$

s'intègre algébriquement ou bien (pour x constant) la surface algébrique $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$ admet un groupe continu fini de transformations birationnelles en elle-même, groupe qui renferme algébriquement ses paramètres.

Nous sommes amenés ainsi à étudier les transformations birationnelles des surfaces algébriques. C'est ce que nous ferons dans la prochaine leçon.

Quinzième leçon.

Surfaces algébriques qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Nous déterminerons dans cette leçon toutes les surfaces algébriques

$$(1) \qquad S(x, y, z) = 0$$

qui admettent un groupe continu fini de transformations birationnelles en elles-mêmes.

J'insiste sur cette condition que les substitutions birationnelles considérées, qui dépendent de paramètres arbitraires, forment un groupe. Une surface $S = 0$ peut, en effet, admettre un faisceau continu de transformations birationnelles en elle-même sans que ce faisceau forme un groupe ou fasse partie d'un groupe fini.

Il est bien clair que l'ensemble E de toutes les substitutions birationnelles qui conservent une surface $S=0$, forme un groupe; car l'inverse d'une telle substitution ou la combinaison de deux telles substitutions fait encore partie de l'ensemble E. Mais l'ensemble E peut former un groupe infini. Par exemple, si la surface $S = 0$ est le plan $z = 0$, l'ensemble E est formé de toutes les substitutions de Cremona relatives aux variables x, y. En particulier, la transformation de Cremona du second degré la plus générale constitue un faisceau continu de transformations qui conserve le plan $z = 0$; mais le faisceau ne forme pas un groupe et ne fait pas partie d'un groupe continu fini, car la combinaison de plusieurs substitutions du

faisceau conduit à une transformation de Cremona de degré aussi élevé qu'on veut.

Il y a là une difficulté qui ne se présentait pas dans le cas d'une courbe. Les transformations birationnelles $X = r(x, y)$, $Y = \rho(x, y)$, d'une courbe algébrique $\sigma(x, y) = 0$ (de degré m en y) vérifient nécessairement une condition de la forme $H(x, X) = 0$, où H est un polynôme de degré m en x et en X; l'ensemble de toutes les transformations en question dépend donc d'un nombre fini de paramètres moindre que $(m+1)^2$, et comme cet ensemble forme un groupe, c'est un groupe fini.[1] Une courbe ne saurait donc admettre un faisceau continu de transformations birationnelles sans admettre un groupe continu fini de telles transformations. Il en est tout autrement pour une surface $S(x, y, z) = 0$. Si m désigne le degré en z du polynôme S, les variables X, Y, Z qu'on substitue à x, y, z, vérifient des relations $K(X, x, y) = 0$, ... où K est un polynôme en X, x, y de degré m en X, mais dont le degré en x, y peut dépasser toute limite, au moins pour certaines surfaces, comme le montre l'exemple du plan et des substitutions de Cremona.

Nous supposerons donc essentiellement dans ce qui qui va suivre: 1° que le faisceau de substitutions considérées dépend de paramètres arbitraires; 2° qu'il forme un groupe fini.

Écrivons une des substitutions du faisceau ainsi:

$$(2)\quad \begin{cases} X = z^{m-1} r_{m-1}(x,y) + z^{m-2} r_{m-2}(x,y) + \dots + r_0(x,y) \equiv \varphi(x,y,z), \\ Y = z^{m-1} r'_{m-1}(x,y) + z^{m-2} r'_{m-2}(x,y) + \dots + r'_0(x,y) \equiv \psi(x,y,z) \\ Z = z^{m-1} r''_{m-1}(x,y) + z^{m-2} r''_{m-2}(x,y) + \dots + r''_0(x,y) \equiv \chi(x,y,z), \end{cases}$$

et joignons à ces formules les formules inverses:

---

(1) Nous savons que le groupe dépend exactement ou de trois ou d'un paramètres.

$$(3)\quad \begin{cases} x = Z^{m-1} R_{m-1}(X,Y) + \dots\dots + R_0(X,Y) \equiv \Phi(X,Y,Z), \\ y = Z^{m-1} R'_{m-1}(X,Y) + \dots\dots + R'_0(X,Y) \equiv \Psi(X,Y,Z), \\ z = Z^{m-1} R''_{m-1}(X,Y) + \dots\dots + R''_0(X,Y) \equiv \mathrm{X}(X,Y,Z), \end{cases}$$

les r, r', r'' désignent des fractions d'un certain degré μ en x, y; les R, R', R'' des fractions de même degré en X, Y. Les φ, ψ, χ dépendent de paramètres arbitraires; nous n'avons besoin, en vue du problème d'intégration posé dans la 14e Leçon, que d'étudier le cas où ces paramètres figurent dans φ, ψ, χ algébriquement; mais il est facile de montrer qu'on peut toujours supposer que le groupe (2) dépend algébriquement des paramètres.

Écrivons en effet les fractions r, r', r'' de degré μ en x, y en laissant leurs coefficients $\alpha, \beta \dots \lambda$, indéterminés, et exprimons d'abord que quand on remplace X, Y, Z par leurs valeurs tirées de (2) dans l'équation $S(X, Y, Z) = 0$, la condition ainsi obtenue est une conséquence de l'équation $S(x, y, z) = 0$. On forme de cette manière certaines relations algébriques entre les coefficients $\alpha, \beta, \dots \lambda$, relations qui par hypothèse sont compatibles (1) et permettent de se donner arbitrairement plusieurs de ces coefficients, par exemple les coefficients $\alpha, \beta \dots K$ en fonction desquels les autres s'expriment algébriquement. Les égalités :

$$(4)\qquad X = \varphi(x, y, z, \alpha, \beta, \dots K), \quad Y = \psi(x, y, z, \alpha, \beta, \dots K) \quad Z = \chi(x, y, z, \alpha, \beta \dots K),$$

où φ, ψ, χ, renferment algébriquement les paramètres $\alpha, \beta \dots K$, définissent une transformation rationnelle continue de la surface (1) en elle même. Pour que ces transformations (4) forment un groupe, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées.

1° Il faut que toute transformation inverse d'une transformation (4), où $\alpha \dots K$ ont des valeurs quelconques, soit encore

---

(1) Si ces relations se décomposent en plusieurs systèmes de relations distincts, on étudie successivement chacun de ces systèmes. La même remarque peut être répétée dans la suite du raisonnement.

une transformation (4) correspondant à d'autres valeurs $\alpha_1 \ldots K_1$ des paramètres; autrement dit, si on remplace dans les équations (4), x, y, z, par $\varphi(X, Y, Z, \alpha_1, \ldots K_1)$, $\psi(\ldots\ldots)$, $\chi(\ldots\ldots)$, les conditions ainsi obtenues doivent être des conséquences de $S(X, Y, Z) = 0$, et cela quels que soient $\alpha, \beta, \ldots K$ pour des valeurs convenables $\alpha_1 = A(\alpha\beta\ldots K)$ $\ldots K_1 = K(\alpha, \ldots K)$. Cette première condition se traduit par des relations algébriques (σ) entre les $\alpha, \beta, \ldots K$.

2° — Il faut que si on combine deux transformations (4) correspondant à des valeurs quelconques $(\alpha, \beta \ldots K)$ et $(\alpha', \beta', \ldots K')$ des paramètres, la transformation résultante soit encore une transformation (4); autrement dit, quand on remplace, dans (4), x, y, z, par $\varphi(x, y, z, \alpha' \ldots K')$, $\psi(\ldots\ldots)$, $\chi(\ldots\ldots)$; la transformation ainsi obtenue doit coïncider (si on tient compte de $S(x, y, z) = 0$) avec une transformation (4) où les paramètres ont certaines valeurs $\alpha_1 = A_1(\alpha, \ldots K, \alpha', \ldots K')$, $\ldots K_1 = K_1(\alpha, \ldots \alpha', \ldots K')$. Cette seconde condition se traduit par des relations algébriques (τ) entre les $\alpha, \ldots K, \alpha' \ldots K'$.

Si les conditions (σ), (τ) sont vérifiées quels que soient $\alpha, \ldots K$, $\alpha', \ldots K'$, les transformations (4) forment un groupe. Dans le cas contraire, si les transformations (4) renferment un groupe, les valeurs $\alpha, \beta, \ldots K$ et $\alpha', \beta', \ldots K'$, qui définissent deux substitutions quelconques de ce groupe, doivent vérifier les relations (σ), (τ). Soit $G(\alpha, \ldots K, \alpha', \ldots K') = 0$ une de ces relations où G est un polynôme en $\alpha, \ldots K$ dont les coëfficients sont des polynômes P en $\alpha', \beta', \ldots K'$. Deux hypothèses sont possibles: ou bien les valeurs $\alpha', \beta' \ldots K'$ annulent tous les polynômes P; on connait alors au moins une relation $P(\alpha, \ldots K) = 0$ qui assujettit les paramètres $\alpha, \ldots K$ du groupe; ou bien une au moins des quantités $P(\alpha', \ldots K')$ n'est pas nulle; $(\alpha, \beta, \ldots K)$ vérifient alors une relation algébrique d'un certain degré $G(\alpha, \ldots K, \alpha'_0, \ldots K'_0) = 0$, où $\alpha'_0, \ldots K'_0$ définissent une substitution déterminée du groupe; nous écrivons alors la relation $G(\alpha, \beta, \ldots K) = 0$ en laissant indéterminés

ceux des coëfficients numériques qui dépendent de $\alpha_0, \ldots K_0$. En définitive, nous formons de cette manière au moins une relation algébrique entre $\alpha, \beta \ldots K$, à coëfficients numériques (dont certains peuvent être indéterminés). En nous servant de cette relation, nous diminuons le nombre des paramètres $\alpha, \ldots K$ d'au moins une unité, et nous raisonnons sur le faisceau des transformations (4') à $(r-1)$ paramètres comme sur les transformations (4); autrement dit, nous exprimons que les deux conditions 1° et 2° sont vérifiées (au moins pour certaines valeurs fixes des coëfficients numériques indéterminés qui se sont introduits).

En poursuivant la méthode – ou bien on élimine tous les paramètres: dans ce cas, il n'existe pas de groupe fini continu de transformations (4); – ou bien on tombe sur un faisceau de transformations (4) a ρ paramètres $(\rho < r)$ pour lesquels les conditions 1° et 2° sont identiquement remplies; le dit faisceau constitue alors un groupe continu fini à ρ paramètres qui dépend algébriquement de ses paramètres.

Observons qu'on peut aboutir ainsi à plusieurs groupes distincts, et même à une infinité dans le cas où les conditions sont remplies pour des valeurs fixes arbitraires données à certains des coëfficients numériques indéterminés (qui peuvent figurer dans les conditions). Le groupe renferme alors, en outre de ses paramètres, certains coëfficients indéterminés qui y entrent algébriquement; pour des valeurs fixes quelconques données à ces coëfficients, les transformations forment un groupe à ρ paramètres; mais l'ensemble des transformations où on fait varier à la fois les paramètres et les coëfficients, ne forme pas un groupe.(1)

---

(1) Exemple la transformation $\frac{1}{X+h} = \frac{1}{x+h} + \alpha$, forme un groupe à un paramètre α pour h, fixe mais quelconque, mais les transformations où α et h sont arbitraires, ne forment pas un groupe.

La méthode que nous venons de suivre permet de reconnaître à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, si une surface (1) donnée admet un groupe continu de transformations birationnelles (2), où le degré μ des r est donné, et de calculer tous ces groupes quand il en existe.

Si une surface (1) admet un certain groupe continu fini, on peut toujours prendre comme paramètres du groupe certains des coëfficients $\alpha, \ldots K$ des fractions r qui définissent la transformation mise sous la forme (2). Deux cas sont alors possibles: ou bien le groupe renferme algébriquement ses paramètres ou bien c'est un sous-groupe d'un groupe à un plus grand nombre de paramètres, lesquels figurent algébriquement.[2]

Nous pouvons donc nous borner à considérer les groupes qui dépendent algébriquement de leurs paramètres. Si la surface admet plusieurs de ces groupes, il nous suffit d'en étudier un seul que nous choisissons arbitrairement.

Enfin, il est possible que le groupe G que l'on a à étudier soit défini, non point par un seul, mais par plusieurs systèmes d'équations distinctes. C'est ce que montre l'exemple du groupe formé par l'ensemble des transformations:

$$X = x + \alpha\ , \quad Y = y\ ; \quad \text{et} \quad X = x + \alpha\ , \quad Y = -y.$$

D'une façon générale, le groupe G peut être composé de toutes les transformations définies par q systèmes:

$$(5)\ \begin{cases} X = \varphi_i\,(x, y, z, \alpha_1, \ldots \alpha_{\rho+1})\ , \ Y = \psi_i\,(x, y, z, \alpha_1, \ldots \alpha_{\rho+1}),\ (i = 1, 2 \ldots q) \\ H_i\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\rho, \alpha_{\rho+1}) = 0, \end{cases}$$

les φ_i, ψ_i étant des fonctions rationnelles de (x, y, z) et des paramètres $\alpha_1, \ldots \alpha_{\rho+1}$ liés par la relation algébrique irréductible $H_i = 0$.

---

(2) Exemple: Le groupe $X = x + \alpha$, $Y = e^\alpha y$, renferme son paramètre α de façon transcendante, mais c'est un sous-groupe du groupe $X = x + \alpha$, $Y = \beta y$, où α, β sont arbitraires.

Comme tout groupe continu (défini comme nous l'avons fait) renferme la substitution identique $X = x$. $Y = y$, un au moins des systèmes $\varphi_i \cdot \psi_i$ (soit φ_1, ψ_1) se réduit identiquement à x, y pour certaines valeurs des α, soit $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ... $\alpha_{\rho+1} = 0$. Je dis que, dans ce cas, les transformations :

$$(5)' \qquad X = \varphi_1(x, y, z, \alpha_1, \ldots \alpha_{\rho+1}), \quad Y = \psi_1(x, y, z, \alpha_1, \ldots \alpha_{\rho+1}), \quad H_1(\alpha_1, \ldots \alpha_\rho, \alpha_{\rho+1}) = 0$$

définissent un groupe. En effet, combinons deux transformations (5)' correspondant aux valeurs $(\alpha_1, \ldots \alpha_{\rho+1})$ et $(\alpha'_1 \ldots \alpha'_{\rho+1})$ des paramètres : la transformation résultante est une certaine transformation (5) correspondant à une certaine valeur fixe de i, valeur qui par suite est l'unité, car quand $\alpha'_1 \ldots \alpha'_{\rho+1}$ tendent tous vers zéro, la transformation tend vers la transformation (5') qui appartient au seul système $i = 1$. D'après cela, on peut obtenir toute transformation (5)', soit la transformation $(\alpha''_1, \ldots \alpha''_{\rho+1})$, en combinant la transformation $(\alpha_1, \ldots \alpha_{\rho+1})$ avec la transformation variable $(\alpha'_1 \ldots \alpha'_{\rho+1})$; en particulier on peut obtenir ainsi la transformation identique ; donc à toute substitution $(\alpha_1, \ldots \alpha_{\rho+1})$ de l'ensemble (5)' correspond une substitution $(\alpha'_1 \ldots \alpha'_{\rho+1})$, inverse de la première, c'est à dire que l'inverse de toute transformation (5)' est encore une transformation (5)'. Les transformations (5)' forment donc un groupe G'.

Il nous est loisible par suite de nous borner à considérer ce groupe G'. Nous supposerons dorénavant que le groupe considéré est défini par un système unique d'équations irréductibles (5)'

Rappel de quelques définitions relatives aux groupes continus.

Considérons un groupe de substitutions algébriques à deux variables indépendantes, groupe fini, continu, qui renferme algébriquement ses ρ paramètres $\alpha_1, \ldots \alpha_\rho$.

Soit: (5) $X = \varphi(x, y, \alpha, \dots \alpha_\rho)$. $Y = \psi(x, y, \alpha, \dots \alpha_\rho)$.

ce groupe G. Le groupe sera dit permutable si deux quelconques de ses substitutions sont permutables ou échangeables. D'une façon précise, si on effectue successivement deux substitutions du groupe, soit les substitutions S_1 ou $(\alpha_1, \dots \alpha_\rho)$ et S_2 ou $(\alpha'_1, \dots \alpha'_\rho)$, la substitution résultante S_3 ou $(\alpha''_1 \dots \alpha''_\rho)$ change en général quand on permute S_1, et S_2; dans le cas particulier où S_3 n'est pas altérée par cette permutation, autrement dit dans le cas ou les fonctions: $\alpha'' = A_1(\alpha_1, \dots \alpha_\rho, \alpha'_1 \dots \alpha'_\rho)$, ... $\alpha''_\rho = A_\rho(\alpha_1, \dots \alpha_\rho, \alpha'_1, \dots \alpha'_\rho)$ sont symétriques par rapport aux deux groupes de variables α et α', les deux substitutions S_1, S_2 (choisies quelconques) sont dites permutables ou échangeables, et le groupe G lui-même est dit permutable.

Si le groupe G ne dépend que d'un paramètre, soit:

$$X = \varphi(x, y, \alpha), \qquad Y = \psi(x, y, \alpha),$$

les fonctions φ et ψ (ou du moins les branches considérées φ, ψ de ces fonctions) se réduisant identiquement à x et y pour $\alpha = 0$, les expressions $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(x, y, 0) \equiv \xi(x, y)$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(x, y, 0) \equiv \eta(x, y)$ définissent la transformation infinitésimale du groupe. Si on pose:

$$(6) \qquad \frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \eta(x, y),$$

et si on représente par $x = \Phi(x_0, y_0, t)$, $y = \Psi(x_0, y_0, t)$, l'intégrale de (6); [x_0, y_0 désignant les valeurs de x, y pour $t = 0$], l'ensemble des transformations à un paramètre ainsi définies entre x_0, y_0 et x, y ne diffère pas du groupe G; autrement dit, moyennant un changement de paramètre, il coïncide avec G à la notation prés.

J'ajoute que par un changement analytique des variables x, y, on peut toujours ramener le groupe à un paramètre à la forme:

$$X = x + \alpha, \qquad Y = y$$

qui montre aussitôt que tout groupe à un paramètre est permutable.

Supposons maintenant que le nombre des paramètres

soit quelconque, et que pour les valeurs $\alpha_1 = 0, \dots \alpha_\rho = 0$ de ces paramètres $\alpha_1, \dots \alpha_\rho$, la transformation se réduise à la substitution identique. Soit $h_1, \dots h_\rho$ des coëfficients arbitraires, et posons:

$$\xi(x,y) = h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} + \dots + h_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_\rho}, \quad \eta(x,y) = h_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} + \dots + h_\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_\rho},$$

en faisant dans les seconds membres $\alpha_1 = 0, \dots \alpha_\rho = 0$: les expressions ξ, η définissent la transformation infinitésimale la plus générale du groupe G, et si on écrit encore les équations (6), les égalités $x = \Phi(x_0, y_0, t)$ $y = \Psi(x_0, y_0, t)$ définissent un groupe Γ à un paramètre t qui est contenu dans le groupe G ; ce sous groupe Γ dépend de $h_1, \dots h_\rho$ et quand on fait varier ces constantes, on obtient toutes les substitutions de G.

En particulier, si le groupe G est permutable, on peut choisir les paramètres de façon que le groupe soit défini par les égalités suivantes:

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_1} = \xi_1(x,y), \quad \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_2} = \xi_2(x,y), \dots \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_\rho} = \xi_\rho(x,y), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha_1} = \eta_1(x,y), \quad \dfrac{\partial y}{\partial \alpha_2} = \eta_2(x,y), \dots \dfrac{\partial y}{\partial \alpha_\rho} = \eta_\rho(x,y), \end{cases}$$

les ξ, η étant indépendants de toute constante. Si on appelle alors $x_0\, y_0$ les valeurs de x, y pour $\alpha_1 = 0, \dots \alpha_\rho = 0$, le groupe G est défini par les égalités

$$x = \Phi(x_0, y_0, \alpha_1, \dots \alpha_\rho), \quad y = \Psi(x_0, y_0, \alpha_1, \dots \alpha_\rho)$$

qui représentent l'intégrale générale de (7).

Groupes transitifs. — Quand dans les équations (5), ayant donné à x, y des valeurs fixes quelconques, on fait varier toutes les constantes $\alpha_1, \dots \alpha_\rho$, le point X, Y ou bien parcourt tout le plan des X, Y, ou bien décrit une certaine courbe algébrique : dans le premier cas, le groupe (5) est dit transitif; dans le second cas, intransitif. Dans le second cas, quand on élimine un des paramètres α entre les deux équations (5), tous les autres sont éliminés du même coup.

Tout groupe à un paramètre est <u>intransitif</u>. Quant aux groupes à plusieurs paramètres, pour qu'ils soient transitifs, il faut et il suffit que le rapport $\dfrac{\xi(x,y)}{\eta(x,y)} \equiv \dfrac{h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \dots + h_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_\rho}}{h_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} \dots + h_\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_\rho}}$ (où $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_\rho = 0$) ne soit pas (pour x, y quelconques) indépendant de $h_1, \dots h_\rho$. En particulier pour qu'un groupe permutable soit transitif, il faut et il suffit que dans

les équations (7) tous les rapports $\frac{\xi_i(x,y)}{\eta_i(x,y)}$ $[i=1,2,\dots \rho]$ ne coïncident pas.

Remarque sur les courbes algébriques gauches.

Étant donnée une courbe algébrique gauche, si on la projette sur un plan quelconque, le genre p de la projection aura toujours la même valeur (sauf pour des positions particulières du plan) et ce nombre p sera dit le genre de la courbe gauche.

On peut toujours supposer que la parallèle à Oz menée par un point M_0 de la courbe gauche Γ, ne rencontre Γ qu'en un point; autrement, on changerait les axes. Dans ces conditions, les équations de la courbe Γ peuvent s'écrire:

$$f(x,y)=0 \qquad z=R(x,y),$$

f étant un polynôme en x,y et R une fraction rationnelle. A toute transformation birationnelle de la courbe Γ en elle-même correspond alors une transformation birationnelle de la courbe $f=0$. Si donc Γ admet une transformation birationnelle continue, le genre de la courbe $f=0$ est au plus égal à 1. Si ce genre est nul, on peut écrire:

$$x=g(t), \qquad y=h(t), \qquad z=k(t),$$

g, h, k étant des fonctions rationnelles de t, et une seule valeur de t correspondant à un point de Γ: la courbe est alors de genre zéro et admet une infinité de transformations birationnelles en elle-même, qui s'obtiennent en changeant t en $\frac{at+b}{ct+d}$. Si le genre de $f=0$ est égal à 1, on a:

$$x=g(t,\theta), \qquad y=h(t,\theta), \qquad z=k(t,\theta), \text{ avec } \theta^2=(1-t^2)(1-k^2t^2),$$

g, h, k étant rationnels en t,θ et inversement un seul couple t,θ correspondant à un point de Γ. Si on pose $t=\operatorname{sn}_{k^2} u$, x,y et z sont des fonctions doublement périodiques de u, et en changeant u en $u+\alpha$, on obtient une transformation birationnelle continue de la courbe Γ en elle même. La constante k^2 est dite module de la courbe gauche Γ.

Observons enfin que si la courbe Γ de genre 1, dépendant de paramètres arbitraires, se laisse transformer rationnellement en une courbe plane fixe, son module est indépendant des paramètres. En effet par hypothèse, on a:

$$x = g(\xi, \eta), \quad y = h(\xi, \eta), \quad \text{avec } \varphi(\xi, \eta) = 0,$$

g et h étant rationnels en ξ, η et dépendant de paramètres, mais φ n'en dépendant pas. L'intégrale de première espèce attachée à Γ se transforme en une intégrale de première espèce J attachée à $\varphi = 0$; or cette dernière courbe ne peut admettre deux intégrales de première espèce distinctes, dont les périodes se réduisent à deux périodes relatives aux mêmes lacets[1]; il suit de là qu'on a:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \lambda J(\xi \eta),$$

λ pouvant dépendre des paramètres, mais J n'en dépendant pas; le rapport des deux périodes, et par suite k^2 sont donc indépendants des paramètres. C.Q.F.D.

Ces remarques faites, revenons aux transformations birationnelles des surfaces.

Application aux groupes de transformations birationnelles, d'une surface algébrique.

Soit :

$$(1) \qquad S(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique qui admet le groupe continu fini (à ρ paramètres algébriques) de transformations birationnelles

$$(G) \begin{cases} X = \varphi(x, y, z, \alpha_1, \dots \alpha_\rho) \equiv z^{m-1} r_{m-1}(x, y, \alpha_1 \dots \alpha_\rho) + \dots + r_0(x, y, \alpha_1 \dots \alpha_\rho), \\ Y = \psi(x, y, z, \alpha_1 \dots \alpha_\rho) \equiv z^{m-1} r'_{m-1}(x, y, \alpha_1 \dots \alpha_\rho) + \dots + r'_0(x, y, \alpha_1 \dots \alpha_\rho), \\ Z = \chi(x, y, z, \alpha_1 \dots \alpha_\rho) \equiv z^{m-1} r''_{m-1}(x, y, \alpha_1 \dots \alpha_\rho) + \dots + r''_0(x, y, \alpha_1 \dots \alpha_\rho). \end{cases}$$

---

[1] Autrement une intégrale de première espèce aurait moins de 2 périodes.

Ce groupe, si ρ est égal à 1, est permutable; si ρ est plus grand que 1, il admet des sous groupes permutables (et même une infinité puisque tous ses sous-groupes à un paramètre sont permutables). Je dis qu'on peut toujours calculer algébriquement le plus grand (ou les plus grands) de ces sous-groupes.

En effet, on sait calculer algébriquement la transformation (G), soit $(\alpha_1'', \ldots \alpha_\rho'')$, qui résulte de la combinaison des deux substitutions $(\alpha_1 \ldots \alpha_\rho)$ et $(\alpha_1' \ldots \alpha_\rho')$ de (G). Si on exprime que les fonctions algébriques $\alpha_1'' = A_1(\alpha_1 \ldots \alpha_\rho, \alpha_1' \ldots \alpha_\rho') \ldots \alpha_\rho'' = A_\rho(\alpha_1 \ldots \alpha_\rho, \alpha_1' \ldots \alpha_\rho')$, sont symétriques par rapport aux deux groupes de variables α et α', on obtient un certain nombre de conditions algébriques entre les α, α': quand ces conditions sont remplies identiquement, le groupe G est permutable. Si non (voir page 258), on connaît au moins une relation algébrique (à coëfficients numériques déterminés ou indéterminés) qui assujettit les $\alpha_1, \ldots \alpha_\rho$. En exprimant alors que le faisceau de transformations G_1 à $(\rho-1)$ paramètres ainsi obtenu forme un groupe permutable, on arrive à des conditions algébriques assujettissant les $(\rho-1)$ paramètres α et les $(\rho-1)$ paramètres α'; quand ces conditions sont vérifiées identiquement, le faisceau G_1 forme un groupe permutable; si non, on a diminué encore le nombre des paramètres, et ainsi de suite. On arrive de cette manière à un faisceau de transformations qui dépend au moins d'un paramètre et qui constitue un groupe permutable. Il peut se faire qu'on obtienne ainsi plusieurs groupes de cette nature, et même une infinité (si certains des coëfficients numériques indéterminés qui s'introduisent peuvent être choisis arbitrairement). Il suffit, dans ce qui va suivre, de considérer un seul de ces groupes, qu'on choisit une fois pour toutes.

En définitive, quand une surface (1) admet un groupe continu fini de transformations birationnelles, elle admet nécessairement un groupe continu fini <u>permutable</u> de telles transformations, groupe où

les paramètres figurent algébriquement

Nous sommes donc en droit de supposer, dans ce qui va suivre, que le groupe G est permutable. Il est clair que ($\alpha_1 \ldots \alpha_\rho$ figurant algébriquement dans G) on peut mettre les transformations de G sous la forme:

$$(2) \quad X = \varphi(x, y, z, \alpha_1 \ldots \alpha_{\rho+1}), \quad Y = \psi(x, y, z; \alpha_1 \ldots \alpha_{\rho+1}), \quad Z = \chi(x, y, z, \alpha_1 \ldots \alpha_{\rho+1})$$

$\varphi, \psi; \chi$ étant des fonctions rationnelles en $x, y, z, \alpha_1 \ldots \alpha_{\rho+1}$, et les paramètres α vérifiant la condition algébrique irréductible[1]:

$$H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\rho, \alpha_{\rho+1}) = 0.$$

Ceci posé, deux cas généraux sont à distinguer suivant que le groupe permutable G est transitif ou intransitif.

Premier Cas: Le groupe permutable G est intransitif

Si nous donnons alors, dans les équations (2), des valeurs fixes x_0, y_0, z_0 à x, y, z, le point X, Y, Z parcourt une courbe algébrique de la surface S quand $\alpha_1 \ldots \alpha_\rho$ varie arbitrairement. Cette courbe Γ est transformée en elle-même par le groupe G, car soit M (ou x, y, z) un point de Γ; toute transformation G appliquée au point M peut être regardée comme la résultante de deux transformations: la première changeant M en M_0 (ou x_0, y_0, z_0), la seconde étant une certaine transformation G appliquée au point M_0, transformation dans laquelle par conséquent le point transformé parcourt Γ. Il suit de là que la courbe Γ est de genre zéro ou de genre 1; si elle est de genre 1, son module k^2 est indépendant du point M_0 considéré sur S; en effet, donnons à tous les paramètres $\alpha_1, \ldots \alpha_\rho$ des valeurs fixes, sauf à α_ρ par exemple, la courbe Γ' se laisse transformer rationnellement en la courbe

---

(1) Si les transformations de G sont définies par plusieurs systèmes (2) distincts, G renferme toujours un groupe G' donné par un seul système (2) (voir page 261) et le groupe G' sera évidemment permutable. (D'ailleurs rien ne serait changé dans ce qui va suivre si le groupe G était défini par plusieurs systèmes (2)).

fixe $\qquad H(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \ldots \bar{\alpha}_{\rho-1}, \alpha_\rho, \alpha_{\rho+1}) = 0$;

k^2 est donc une constante absolue.

Par chaque point de S, il passe au moins une courbe Γ. Je dis que par un point quelconque de S il n'en passe qu'une seule. Soit en effet M un point quelconque de Γ (qui sera par conséquent un point simple), et soit M_1 un point non situé sur Γ; supposons que la courbe Γ_1 (engendrée par la transformation G appliquée à M_1) passe par M : toutes les transformations G changent le point M en un point de Γ, mais elles doivent changer aussi M en un point de Γ_1, ce qui est absurde. Par un point arbitraire M de S il passe donc une courbe Γ et une seule.

Soit γ la projection sur le plan des x, y de la courbe Γ qui passe par le point (x_0, y_0, z_0) de S. Si nous mettons l'équation de γ sous forme entière et irréductible.

$$F(x, y, x_0, y_0, z_0) = 0,$$

les coëfficients $g, h \ldots l$ du polynôme P sont des fonctions algébriques de x_0, y_0, z_0 qui sont rationnelles puisque le point (x_0, y_0, z_0) détermine γ sans ambiguité. Deux quelconques de ces coëfficients sont liés algébriquement, car les courbes Γ ne dépendent que d'un paramètre[1]; si on appelle C un de ces coëfficients et c une combinaison linéaire $mg + \ldots\ldots ql$ (où $m, \ldots q$ sont des nombres quelconques), C et c sont liés par une relation algébrique:

$$(3) \qquad K(C, c) = 0,$$

et l'équation de γ est de la forme:

$$(4) \qquad \varphi(x, y, C, c) = 0$$

φ étant un polynôme en x, y, C, c. De plus C et c sont rationnels en x_0, y_0, z_0 et comme leur valeur ne change pas le long de la même courbe irréductible Γ, on a:

---

[1] Autrement, il passerait par M_0 une infinité de courbes.

(5) $\quad C = R(x, y, z), \qquad c = R_1(x, y, z)$

R et R_1 étant rationnels en x, y, z.

Le faisceau des courbes Γ est donc donné par l'intersection de la surface $S = 0$ avec la surface mobile $C = R(x, y, z)$, mais cette intersection sera en général décomposable en plusieurs courbes irréductibles.

Soit Γ' une de ces intersections, l'intersection de $S = 0$ avec $C_0 = R$ par exemple; nous pouvons toujours admettre qu'une parallèle à oz menée par un point quelconque de la courbe Γ' ne rencontre pas la courbe en un autre point.[1] Dans ces conditions, si on élimine z entre les relations $S = 0$, $C = R(x, y, z)$, on obtient l'équation de la projection de Γ' sur le plan des x, y, soit:

(1)' $$\Sigma(x, y, C) = 0,$$

et à tout système x, y, C correspond une seule valeur de z définissant un point de l'intersection de $S = 0$ et de $C = R$, soit:

(6) $$z = R'(x, y, C),$$

R' étant rationnel en x, y, C. Il suit de là, d'après (5) et (6) que les surfaces (1) et (1)' se correspondent birationnellement. En substituant à la surface S la surface Σ, nous arrivons à la conclusion suivante:

« Moyennant une transformation birationnelle, la surface S considérée jouit de la propriété d'être coupée par un plan $z = C$ quelconque, suivant des courbes unicursales (ou suivant des courbes de genre 1 et de module constant). On peut mettre l'équation de la section sous la forme irréductible:

(7) $$\Gamma(x, y, \xi, \Xi) = 0.$$

---

[1] Il suffit de prendre au hasard un point fixe sur l'intersection Γ', de joindre ce point à tous les points de Γ' et de choisir comme axe des z une droite non parallèle aux génératrices du cône ainsi formé.

où $\bar{z}$ et $\bar{Z}$ sont liés algébriquement par une relation :

$$(8) \qquad K(z, Z) = 0 ;$$

Z est une fonction rationnelle du point x, y, z de la surface S,

$$(9) \qquad Z = \rho(x, y, z).$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour que la surface S admette un groupe continu G de transformations birationnelles. Mais nous allons les compléter en examinant successivement les deux hypothèses : 1° les courbes Γ sont unicursales ; 2° les courbes Γ sont de genre 1.

1° Les courbes Γ sont unicursales. –

Nous pouvons alors exprimer les coordonnées x, y de la courbe :

$$(7) \qquad \Gamma(x, y, \bar{z}, \bar{Z}) = 0$$

en fonction rationnelle d'un paramètre θ et cela de façon qu'une seule valeur de θ corresponde à un point x, y de (7) ; soit :

$$x = \lambda(\theta, z Z), \quad y = \mu(\theta, z, Z),$$

avec

$$\theta = \varpi(x, y, z, Z).$$

Mais les fonctions λ, μ, ϖ sont-elles des fonctions rationnelles du point analytique (z, Z) ? D'après un théorème de Nœther, la chose est certaine si la courbe unicursale (7) est de degré impair ; au contraire λ, μ, ϖ renferment en général une irrationnelle $\sqrt[2]{H(z, Z)}$, si le degré de (7) est pair. Nous allons voir que si la surface S admet réellement un groupe continu G, cette irrationnelle peut être évitée. Nous ne nous servirons pas d'ailleurs, dans la démonstration de la proposition de Nœther qui n'apporte qu'une simplification peu importante.

Observons, en premier lieu, que si les fonctions λ, μ de (z, Z) sont à i branches, la fonction $\varpi(x, y, z, Z)$, ou simplement $\varpi(x, y, z)$ [puisque $Z = \rho(x, y, z)$], est aussi une fonction à i branches distinctes. En effet, soit λ, μ, et λ_1, μ_1 deux déterminations

distinctes des fonctions λ, μ; à ces deux déterminations correspondent, pour un point x, y de (7), deux déterminations distinctes de θ, soit θ et θ_1; autrement on aurait $\lambda(\theta, z, Z) \equiv \lambda_1(\theta, z, Z)$, et de même $\mu(\theta,z,Z) \equiv \mu(\theta,z,Z)$. Il suffit donc de montrer que θ est une fonction rationnelle $\varpi(x, y, z)$ d'un point de S, du moins si on choisit convenablement le paramètre θ

Le groupe G, conservant chaque courbe $z = C$, est nécessairement de la forme:

$$X = \varphi(x, y, z, \alpha_1 \ldots \alpha_e), \quad Y = \psi(x, y, z, \alpha_1 \ldots \alpha_e), \quad Z = z.$$

Soit $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$, $\zeta \equiv 0$ une quelconque de ses transformations infinitésimales[1] Écrivons les équations différentielles:

$$(10) \qquad \frac{dx}{dt} = \xi(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = 0;$$

si x_0, y_0, z_0 est un point M_0 de S, l'intégrale $x(t), y(t), z(t)$ de (10) qui pour $t = 0$ définit le point M_0, est de la forme:

$$x = \Phi(x_0, y_0, z_0, t), \qquad y = \Psi(x_0, y_0, z_0, t) \qquad z = z_0,$$

où Φ, Ψ sont rationnels en x_0, y_0, z_0 et définissent une transformation birationnelle continue de la surface S en elle même. Les singularités critiques et transcendantes des fonctions $x(t), y(t)$ sont donc fixes, et comme t ne figure pas explicitement dans (10), $t = \infty$ est la seule valeur qui puisse être une singularité non polaire de ces fonctions. Si on veut encore, les coefficients des fonctions rationnelles Φ, Ψ en x_0, y_0, z_0 sont des fonctions

---

[1] Les variables x, y, z sont liées par la relation $S = 0$, et G est un groupe algébrique à deux variables indépendantes. Si on prend x et z comme variables indépendantes et si on représente par $\bar{\xi}(x, z)$ ce que devient $\bar{\xi}(x, y, z)$ quand on y remplace y en x, z, les fonctions $\bar{\xi}(x, z)$, $\zeta \equiv 0$ définissent une transformation infinitésimale du groupe. Les quantités $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$ vérifient la condition $\frac{\partial S}{\partial x}\xi + \frac{\partial S}{\partial y}\eta \equiv 0$, quand on tient compte de (1).

holomorphes de t. Je dis que ce sont ou des polynômes en t, ou des polynômes en e^{gt}, g désignant une constante absolue. En effet, la première équation (10) peut s'écrire, en posant $x' = \frac{dx}{dt}$,

(11) $$f(x', x, z_0, Z_0) = 0,$$

la courbe $f = 0$ étant une courbe de genre nul dont les coëfficients dépendent rationnellement de (z, Z); cela est évident, puisque la transformation $x' = \xi(x, y, z_0)$ fait correspondre rationnellement à la courbe unicursale (7) une courbe unique irréductible et de genre au plus égal. D'autre part, l'intégrale $x(t)$ de (11), étant uniforme, est une fonction rationnelle soit de t, soit de e^{gt}, g pouvant (1) à priori dépendre de (z_0, Z_0); les coëfficients de Φ, ψ sont donc des polynômes soit en t, soit en e^{gt}, et, comme ils sont indépendants de z_0, g est une constante numérique. Le même raisonnement s'applique à $y(t)$, et comme $x(t), y(t)$ vérifient la relation algébrique:

$$\Gamma(x, y, z_0, Z_0) = 0,$$

si $x(t)$ est rationnel en t, il en est de même de $y(t)$; si $x(t)$ est rationnel en e^{gt}, $y(t)$ est rationnel en e^{kt}, et pour que y soit fonction algébrique de x, $\frac{g}{k}$ doit être un nombre commensurable $\frac{m}{n}$ (m et n étant premiers entre eux); x et y sont alors rationnels en $e^{\gamma t}$, $\left[\gamma = \frac{g}{m} = \frac{h}{n}\right]$. Si on a effectué (comme nous le supposerons) un changement arbitraire sur les axes xoy, g et h sont égaux à γ. Nous arrivons donc à cette conclusion: l'intégrale abélienne $\int \frac{dx}{\xi(x, y, z_0)}$, attachée à la courbe

(7) $$\Gamma(x, y, z_0, Z_0) = 0,$$

ou bien n'a pas de périodes, ou bien n'a qu'une période (laquelle a une valeur ω indépendante de z_0); si $t(x, z_0)$ désigne une quelconque des fonctions primitives de la fonction $\frac{1}{\xi(x, z_0)} \equiv \frac{1}{\xi(x, y, z_0)}$,

---

(1) g représente $\frac{2i\pi}{\omega}$, si ω désigne la plus petite période de l'intégrale $\int \frac{dx}{\xi(x, y, z_0)}$.

dans le premier cas t est une fonction rationnelle du point analytique (x,y) de (7), et x, y sont rationnels en t ; dans le second cas, la même conclusion s'applique au paramètre $\theta = e^{\frac{2i\pi t}{\omega}}$. Je dis maintenant qu'on peut choisir la constante d'addition $C(z_0)$ dont dépend $t\,(x, z_0)$ de façon que t ou $\theta = e^{\frac{2i\pi t}{\omega}}$ soit rationnel en x, y, z_0.

Dans le premier cas, en effet, on a :

$$t = \int \frac{dx}{\xi\,(x, y, z_0)} = y^{q-1} \rho_{q-1}\,(x, z_0, Z_0) + \cdots + \rho_0(x, z_0, Z_0) + h\,(z_0, Z_0),$$

q désignant le degré de P en y et les ρ des fonctions rationnelles de x qui dépendent algébriquement de (z_0, Z_0), h est une fonction arbitraire de (z_0, Z_0).. Nous pouvons toujours admettre qu'on a disposé de cette fonction arbitraire de façon que pour une valeur numérique de x, ($x = 0$ par exemple), ρ_0 soit identiquement nul. Je dis qu'alors la fonction :

$$T = y^{q-1} \rho_{q-1}\,(x, z_0, Z_0) + \cdots + \rho_0\,(x, z_0, Z_0)$$

est une fonction rationnelle de (z_0, Z_0). En effet, soit T et T_1 deux déterminations de T correspondant au même système de valeurs (x, y, z_0, Z_0) :

$$T = y^{q-1} \rho_{q-1}\,(x, z_0, Z_0) + \cdots + \rho_0\,(x, z_0, Z_0)$$

$$T_1 = y^{q-1} \rho^1_{q-1}\,(x, z_0, Z_0) + \cdots + \rho^1_0\,(x, z_0, Z_0).$$

Comme deux fonctions t quelconques ne diffèrent que par une fonction de z_0, on a nécessairement : $T_1 = T + h\,(z_0, Z_0)$. Mais l'égalité :

$$y^{q-1}\left[\rho_{q-1} - \rho^1_{q-1}\right] + \cdots + y\left[\rho_1 - \rho^1_1\right] + \left[\rho_0 - \rho^1_0 - h\right] = 0$$

ne peut être une conséquence de (7) que si tous les coëfficients de y^{q-1}, y^{q-2}, ... sont nuls : d'où les conditions :

$$\rho_{q-1} = \rho^1_{q-1}, \cdots\cdots \quad \rho_1 = \rho^1_1, \quad \rho_0 = \rho^1_0 + h\,(z_0, Z_0).$$

Mais, pour $x = 0$, ρ_0 et ρ^1_0 sont nuls quel que soit (z_0, Z_0) ; donc h est identiquement nul. On a donc $T_1 = T$; T est une fonction rationnelle de (x, y, z_0, Z_0), liés par (7) et (8), par suite une fonction rationnelle du point (x, y, z_0) de S.

Dans le second cas nous avons :

$$\theta = e^{\frac{2i\pi}{\omega}t} = e^{\frac{2i\pi}{\omega}\int\frac{dx}{\xi(x,y,z_0)}} = h(z_0,Z_0)\left[y^{q-1}\frac{P_{q-1}(x,z_0,Z_0)}{R_{q-1}(x,z_0,Z_0)} + \cdots + \frac{P_0(x,z_0,Z_0)}{R_0(x,z_0,Z_0)}\right];$$

les P, R désignent des polynômes en x qui dependent algébriquement de (z_0, Z_0), et h une fonction arbitraire de z_0; chaque fraction $\frac{P_i}{R_i}$ est irréductible; enfin, dans chaque polynôme $R(x)$ le coëfficient du terme de degré le plus élevé est l'unité. Nous pouvons toujours admettre qu'on a disposé de la fonction $h(z_0, Z_0)$, de façon que pour un des polynômes P (soit P_K) le coëfficient du terme de degré le plus élevé soit l'unité: je dis qu'alors la fonction

$$\Theta = y^{q-1}\frac{P_{q-1}(x,z_0,Z_0)}{R_{q-1}(x,z_0,Z_0)} + \cdots + \frac{P_0(x,z_0,Z_0)}{R_0(x,z_0,Z_0)}$$

est une fonction rationnelle du point analytique $(z_0\ Z_0)$. En effet, soit Θ et Θ_1 deux déterminations de Θ correspondant à un même système de valeurs (x, y, z_0, Z_0) ; comme le quotient de deux fonctions θ quelconques ne peut dépendre que de z_0, on a nécessairement : $\Theta = h(z_0, Z_0)$. Mais la relation:

$$\Theta_1 - h\,\Theta \equiv y^{q-1}\left[\frac{P'_{q-1}}{R^1_{q-1}} - h\frac{P_{q-1}}{R_{q-1}}\right] + \cdots\cdots + \left(\frac{P'_0}{R^1_0} - h\frac{P_0}{R_0}\right) = 0$$

ne peut être une conséquence de (7) que si les coëfficients de $y^{q-1}, y^{q-2}, \ldots$ sont nuls, ce qui exige $\frac{P'_i}{R'_i} \equiv h\frac{P_i}{R_i}$, d'où $R^1_i \equiv R_i$, $P^1_i \equiv h P_i$, et comme, pour $i = K$, h doit être égal à l'unité, on voit que les fractions $\frac{P_i}{Q_i}$ sont rationnelles en (z_0, Z_0): d'où il suit que Θ est une fonction rationnelle du point (x, y, z) de S'.

Conclusion Les coordonnées de la surface considérée s'expriment donc ainsi:

$$x = \lambda(\theta, z, Z)\ ,\ y = \mu(\theta, z, Z),\ \text{avec}$$
$$K(z, Z) = 0$$

λ et μ étant rationnels en θ, z, Z et inversement θ et Z s'exprimant rationnellement en x, y, z.

Si maintenant on revient à la surface primitive S, telle qu'elle existe avant la transformation qui a changé les

courbes Γ en courbes planes $z = C$), on voit que toutes les surfaces S pour lesquelles les courbes Γ sont unicursales peuvent se représenter ainsi:

$$x = \lambda(\theta, u, U), \qquad y = \mu(\theta, u, U), \qquad z = \nu(\theta, u, U),$$

avec

$$K(u, U) = 0$$

λ, μ, ν étant rationnels en θ, u, U et inversement θ, u, U, s'exprimant rationnellement en x, y, z.

Il est clair d'ailleurs que toutes ces surfaces admettent un groupe continu fini de transformations birationnelles en elles-mêmes, groupe dépendant au moins de 3 paramètres arbitraires, car la transformation: $u = u_1$, $\theta = \frac{a\theta_1 + b}{c\theta_1 + d}$, où a, b, c, d sont des constantes quelconques, définit un tel groupe.

On peut dire encore en remplaçant θ par X, u par Y, U par Z, que les surfaces en question correspondent birationnellement à un cylindre $K(Y, Z)$, de l'espace $OXYZ$.

Digression sur les différentielles totales de première espèce ———— Soit $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ une différentielle totale exacte, où P et Q sont algébriques en x, y; on dit que cette différentielle est attachée à la surface algébrique S si P et Q s'expriment rationnellement en fonction du point (x, y, z) de S. Si nous posons:

$$J(x,y) \equiv J(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy,$$

deux déterminations J_1, J_2 de J, qui correspondent au même point (x, y, z), ne peuvent différer que par une constante d'addition ω, puisqu'on a: $\frac{\partial J_2}{\partial x} = \frac{\partial J_1}{\partial x} = P$, $\frac{\partial J_2}{\partial y} = \frac{\partial J_1}{\partial y} = Q$, ($x$ et y étant les deux variables indépendantes). La constante ω est une période de J.

Considérons sur l'une courbe algébrique quelconque C, qu'on peut toujours définir (en changeant s'il est nécessaire l'axe des z) par une relation:

$$z = \rho\,(x\,,y)$$

où ρ est rationnel en x, y ; J devient alors une intégrale abélienne $j = \int R\,(x,y)$ attachée à la courbe $S\,[x, y\,, \rho\,(x,y)] = 0$. Toutes les périodes de j sont des périodes de J. Ceci suppose seulement que la courbe C ne coïncide pas avec une des courbes D le long desquelles P ou Q devient infini.

L'intégrale J est dite de première espèce si l'intégrale abélienne j est de première espèce quelle que soit la courbe algébrique C (distincte des courbes D)[1]. En particulier, P et Q peuvent s'annuler identiquement le long d'une certaine courbe C ; j est alors une constante. D'après cette définition, quand J est de première espèce, les intégrales abéliennes $\int P(x, y_0, z)\,dx$, $\int Q\,(x_0\,, y, z)\,dy$ attachées respectivement aux courbes $S\,(x, y_0, z) = 0$, $S(x_0\,, y\,, z) = 0$, sont de première espèce. Le nombre des intégrales de première espèce distinctes, c'est-à-dire entre lesquelles il n'existe pas

---

[1] Ceci revient à dire (comme on le voit aisément) que $J(x,y,z)$ reste finie quand on tend vers un point quelconque de S (à distance finie ou non) sur un chemin algébrique quelconque : j'entends par là un chemin obtenu en exprimant x, y, z algébriquement en fonction d'un paramètre réel t. Il faut se garder de définir une intégrale de première espèce par la condition que J reste finie quand le point (x, y, z) de S tend vers un point (x_0, y_0, z_0) sur un chemin quelconque : par exemple, l'intégrale :

$$J = \int \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{(x^2-y^2)(x^2-k^2y^2)}} \quad \left(\equiv \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \text{ si on pose } u = \frac{y}{x}\right)$$ est de

première espèce ; elle tend pourtant vers l'infini quand x et y tendent vers zéro, x par valeurs réelles, y d'après la loi $y = mx\left(\cos\frac{1}{x} + i\,\sin\frac{1}{x}\right)$ où m est une constante positive comprise entre 1 et $\frac{1}{|k|}$.

de relation linéaire à coëfficients constants est donc limité : toutes ces intégrales s'écrivent :

$$J = \lambda_1 J_1 + \dots + \lambda_k J_k$$

$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ désignant des coëfficients arbitraires. — On peut toujours mettre J, sous la forme :

$$J = \int \frac{A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy}{S'_z}$$

A et B étant deux polynômes de degré $(m-3)$ au plus ; m désigne le degré de S.

Quand une intégrale J n'est pas de première espèce, il existe au moins une courbe C (distincte de D) pour laquelle l'intégrale abélienne j, n'est pas de première espèce : je dis que, dans ce cas, il existe toujours une infinité de telles courbes C. En effet, soit (x_0, y_0, z_0) un point de la courbe C où j devient infinie, et soit :

$$(\alpha) \qquad y - y_0 = \alpha (x - x_0) + \beta (x - x_0)^{1+\frac{1}{\nu}} + \gamma (x - x_0)^{1+\frac{2}{\nu}} + \dots, \quad z = \varrho(x, y)$$

une branche de C passant par ce point et sur laquelle j devient infinie au point x_0, y_0, z_0. L'intégrale J peut se mettre sous la forme :

$$J = \int \frac{L(x,y,z)\,dx + M(x,y,z)\,dy}{N(x,y,z)}$$

L, M, N étant trois polynômes en x, y, z, et N ne s'annulant pas tout le long de C. Si je remplace, dans N, y et z par leurs développements (α), N devient une fonction de x, soit $N_1(x)$, qui s'écrit :

$$N_1(x) = g (x - x_0)^{\frac{\mu}{\nu}} + h (x - x_0)^{\frac{\mu+1}{\nu}} + \dots, \quad g \neq 0 ;$$

l'expression $L + M \frac{dy}{dx}$, s'écrit de même :

$$k (x - x_0)^{\frac{\lambda}{\nu}} + l (x - x_0)^{\frac{\lambda+1}{\nu}} + \dots \dots (k \neq 0, \ \lambda \geqslant 0) ;$$

puisque $j(x)$ devient infinie pour $x = x_0$ sur la branche considérée, on a nécessairement $\mu \geqslant \lambda + \nu \geqslant \nu$. Cela étant je puis poser

$$y - y_0 = \sigma(x) + (x - x_0)^{\frac{\mu}{\nu}} \tau(x),$$

$\sigma(x)$ désignant la somme des termes du développement de $\sigma(x)$ qui correspondent à des puissances de $(x-x_0)$ moindres que $\frac{\mu}{\nu}$ et $\tau(x)$ une fonction algébrique de x qui reste finie pour $x=x_0$. Substituons maintenant à la courbe C la courbe C' :

(b) $$y-y_0=\sigma(x)+m(x-x_0)^{\frac{\mu}{\nu}}\tau(x), \qquad z=f_1(x,y),$$

m désignant une constante arbitraire, et la courbe C' tendant vers C quand m tend vers 1. Il est clair que les expressions N et $L+M\frac{dy}{dx}$ [où on remplace y et z en x d'après (b)] renfermeront encore un facteur $(x-x_0)$ la première à la puissance $\frac{\mu}{\nu}$ au moins, la seconde à la puissance $\frac{\lambda}{\nu}$ au moins; comme pour $m=1$, $x-x_0$ ne figure pas dans les deux expressions à des puissances supérieures à $\frac{\mu}{\nu}$ ou $\frac{\lambda}{\nu}$, il en est de même pour m quelconque (exception faite de certaines valeurs particulières). Il suit de là que l'intégrale abélienne j attachée à la courbe C' deviendra infinie pour $x=x_0$.

On peut aller plus loin : si on pose

$$y=y_0+\sigma(x)+(x-x_0)^{\frac{\mu}{\nu}}Y,$$

et si on remplace y et z en fonction de x, Y, l'intégrale J s'exprime algébriquement en x, Y, sous la forme :

$$J=\int P'(x,Y)\,dx+Q'(x\,Y)\,dY,$$

et pour $x=x_0$, quel que soit Y, la fonction P' devient infinie d'ordre $k=\frac{\mu-\lambda}{\nu}\geq 1$ par rapport à $x-x_0$. L'égalité $\frac{\partial P'}{\partial Y}=\frac{\partial Q'}{\partial x}$ montre que Q', pour $x=x_0$, ou reste fini, ou devient infini au plus d'ordre $(k-1)$; on a donc :

$$J=\int\frac{M'(x,Y)\,dx+N'(x,Y)\,(x-x_0)\,dY}{(x-x_0)^k}, \quad (k\geq 1),$$

$M'(x_0\ Y)$ n'étant pas nul identiquement, et $N'(x_0,Y)$ ayant une valeur finie pour Y quelconque. Si on introduit entre x et Y une relation algébrique quelconque :

$$Y-Y_0=\alpha(x-x_0)^{\frac{1}{\nu}}+\beta(x-x_0)^{\frac{2}{\nu}}+\dots$$

l'intégrale abélienne $j(x)$ définie par J tend vers l'infini

quand x tend vers x_0. L'intégrale $J(x,Y)$ devient donc infinie quand le point (x,Y) du plan xoY tend vers un point quelconque de la droite $x = x_0$ sur un chemin algébrique: en un mot, $J(x,Y)$ devient infinie le long de la droite $x = x_0$

Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante: Quand une intégrale J n'est pas de première espèce, il existe toujours sur S une infinité de courbes algébriques pour lesquelles J n'est pas une intégrale abélienne de première espèce. De plus, moyennant une transformation algébrique effectuée sur S on peut faire en sorte que J devienne infinie le long d'une courbe.[1]

---

[1] J'insiste ici une difficulté qui se présente dans l'étude des intégrales de première espèce: J ne peut devenir infinie quand (x,y,z) tend sur une courbe algébrique vers un point (x_0, y_0, z_0), que si (x_0, y_0, z_0) annule le dénominateur N de l'expression de $J \equiv \int \frac{L\,dx + M\,dy}{N}$. (D)'après cela, soit $y = g(x)$ la projection sur le plan xoy d'une branche de la courbe D ou $S = 0, N = 0$. Chaque détermination de la fonction $\alpha P(x,y) + \beta Q(x,y)$, [$\alpha, \beta$ étant des constantes arbitraires], qui devient infinie pour $y = g(x)$, est infinie d'un certain ordre $\frac{\mu}{\nu}$ par rapport à $[y - g(x)]$; et cela quel que soit x (abstraction faite de certaines valeurs exceptionnelles). Si on pose $y - g(x) = Y$, on voit aussitôt que J peut s'écrire

$$\int \frac{Y M'(x,Y)\,dx + N'(x,Y)\,dY}{Y^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

$M'(x,0)$ étant fini et $N'(x,0)$ étant fini et différent de zéro. Sous cette forme, il est clair que, suivant qu'on a $\frac{\mu}{\nu} < 1$ ou $\frac{\mu}{\nu} \geq 1$, J tend vers une valeur finie ou vers l'infini, quand le point (x,Y) du plan xoY tend vers un point de la droite $Y = 0$. Si donc $\frac{\mu}{\nu}$ est au moins égal

Une conséquence fondamentale de ces remarques est qu'une intégrale de première espèce se change en une intégrale de première espèce dans toute transformation algébrique effectuée sur les variables indépendantes.

Soit $J(x,y) = \int P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, une intégrale de première espèce, c'est à dire telle que, pour toute relation algébrique $y = g(x)$, l'intégrale $j(x) = \int [P(x,g) + Q(x,g)g']\,dx$ soit de première espèce. Soit maintenant $J(X,Y)$ ce que devient $J(x,y)$ quand on exprime x et y en fonction algébrique de deux nouvelles variables X, Y. A une courbe algébrique Γ quelconque tracée dans le plan XOY correspondent des courbes algébriques C tracées dans le plan xoy, exception faite d'un nombre fini de courbes Γ le long desquelles x et y restent constants. Ceci posé, si $J(X,Y)$ n'est pas de première espèce, il existe une infinité de relations algébriques $Y = G(X)$ telles que les intégrales abéliennes $j(X)$ correspondantes ne soient pas de première espèce. A ces courbes $Y = G(X)$ correspondent

---

à 1, J devient infinie le long de la courbe D considérée qui est dite une courbe polaire de J. Si tous les exposants $\frac{\mu}{\nu}$ relatifs à chaque courbe D sont moindres que 1, J ne peut devenir infinie quand (x,y,z) tend vers (x_0, y_0, z_0) sur une courbe algébrique, que pour des points (x_0, y_0, z_0), isolés. Pour qu'une intégrale J soit de première espèce, il faut d'abord qu'elle ne présente pas de courbe polaire; mais il n'est pas prouvé que cette condition soit suffisante. A priori, J peut encore devenir infinie quand (x,y,z) tend, sur une courbe <u>algébrique</u>, vers un certain point remarquable (x_0, y_0, z_0) de S. Toutefois on ne connaît aucun exemple de cette nature, et il est vraisemblable qu'il n'en existe pas; on arriverait sans doute à le voir en poursuivant la discussion du paragraphe précédent. Dans la suite de ces leçons nous n'aurons pas d'ailleurs à nous préoccuper de cette singularité.

des courbes $y = g(x)$ pour lesquelles $j(x)$ n'est pas de première espèce, ce qui est contre l'hypothèse. — C. Q. F. D.

En particulier, toute intégrale abélienne de première espèce $j(x) = \int P(x)$ se transforme en une intégrale de première espèce $\int P_1(X,Y)\,dX + P_1(X,Y)\,dY$, quand on remplace x en fonction algébrique de X, Y.

S'il existe entre deux surfaces S et S' une correspondance birationnelle, la correspondance transforme toute intégrale J de première espèce attachée à S en une intégrale analogue attachée à S' et réciproquement.

Si la surface S possède un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même, le groupe conserve chaque intégrale J de première espèce; en effet, soit $J_1, \dots J_k$ les k intégrales J de première espèce attachées à S. On a, en représentant par (x, y, z) et (X, Y, Z) deux points correspondants dans une transformation du groupe:

$$J(x, y, z) = \lambda_1 J_1(X, Y, Z) + \dots\dots + \lambda_k J_k(X, Y, Z),$$

et les coefficients $\lambda_1, \dots \lambda_k$ ne peuvent dépendre des paramètres du groupe (voir page 95). Comme pour une certaine valeur de ces paramètres, (x, y, z) et (X, Y, Z) coïncident identiquement, on voit qu'on a l'égalité:

$$J(x, y, z) \equiv J(X, Y, Z),$$

c'est-à-dire que les transformations du groupe conservent J.

Ceci posé, revenons aux surfaces S qui correspondent birationnellement au cylindre $K(Y,Z) = 0$. Si le genre ϖ de la courbe $K = 0$ n'est pas nul, la surface S possède exactement ϖ différentielles totales de première espèce. En effet, soit: $j = \int R(Y,Z)\,dY$ une des ϖ intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe $K = 0$: si on remplace Y, Z en fonction rationnelle de (x, y, z), j se transforme en une intégrale de première espèce attachée à S, soit $J = \int P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy$

Comme le cylindre $K=0$ de l'espace O,X,Y,Z ne saurait d'ailleurs admettre d'autres intégrales[1] de première espèce que les intégrales j, on voit que les surfaces S considérées possèdent exactement ϖ intégrales de première espèce J, qui sont fonctions l'une de l'autre.

2°. – Les courbes Γ sont de genre 1. –

Le raisonnement de la page 272 montre alors que les équations:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x,y,z), \qquad \frac{dy}{dt} = \eta(x,y,z), \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

définissent x et y en fonction rationnelle de $\theta = \operatorname{sn} gt$, et $\theta' = \sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)} = \operatorname{cn} gt . \operatorname{dn} gt$, où g est une constante numérique, θ et θ' s'exprimant eux-mêmes rationnellement en fonction du point x, y de la courbe:

$$(7) \qquad P(x, y, z_0, Z_0) = 0.$$

Les deux intégrales $j = \int \frac{dx}{\xi(x,y,z_0)}$, $j_1 = \int \frac{dy}{\eta(x,y,z_0)}$ attachées à la courbe (7) de genre 1 sont de première espèce et ont les mêmes périodes ω_1, ω_2, lesquelles sont indépendantes de z_0; cela suppose toutefois qu'on a effectué sur les axes xoy le changement d'axes le plus général. Il est clair que j et j_1 coïncident, à un facteur numérique près.

Inversement, si les courbes Γ possèdent une intégrale abélienne de première espèce $\int P(x,y,z_0)\,dx \equiv \int Q(x,y,z_0)\,dy$,

---

[1] Le cylindre $K=0$ ne peut admettre de différentielle totale de première espèce $p(X,Y,Z)\,dX + q(X,Y,Z)\,dY$, où p ne soit pas identiquement nul, car l'intégrale $\int p(X, Y_0, Z_0)\,dX$, où p est rationnel en X ne saurait être de première espèce. Si p est identiquement nul, q est indépendant de X, et l'intégrale $\int q(Y,Z)\,dY$ est une intégrale abélienne de première espèce. C. Q. F. D.

qui soit rationnelle en x, y, z_0 et dont les périodes soient indépendantes de z_0, la surface S admet un groupe continu de transformations birationnelles. Posons en effet :

$$(10)' \qquad dt = P(x, y, z_0)\,dx = Q(x, y, z_0)\,dy, \qquad z = z_0\,;$$

comme les courbes Γ sont de genre 1, ce système définit x, y en fonction rationnelle de $\theta = sn_{k^2} gt$, $\theta' = cn_{k^2} gt . dn_{k^2} gt$, ($g$ et k^2 étant numériques). Si on remplace dt par $\dfrac{d\theta}{g\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}}$, et si on exprime que des fractions rationnelles $x(\theta)$, $y(\theta)$ d'un certain degré vérifient le système (10)', on voit que x, y dépendent algébriquement de z_0, x_0 (valeur initiale de x) ; par suite x et y sont rationnels[1] en x_0, y_0, z_0, et l'intégrale de (10)' définit une transformation birationnelle (à un paramètre) de la surface S en elle-même.

Mais on peut pousser plus loin l'étude des surfaces S — Montrons d'abord que la surface S possède au moins une intégrale de différentielle totale de première espèce n'ayant que deux périodes.

Nous savons exprimer x, y en fonction rationnelle de θ, $\theta' = \sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}$, les coëfficients dépendant algébriquement de z : inversement, θ, θ' s'expriment algébriquement en (x, y, z). Si dans l'intégrale abélienne :

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}},$$

nous remplaçons θ en fonction de x, y, z, elle se transforme, (x et z étant les deux variables indépendantes), en une intégrale de première espèce $J = \int P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dz$, où P et Q sont algébriques en x, y, z, intégrale qui n'a que deux périodes ω, ω', lesquelles sont de la forme $\dfrac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{\nu}$, $\dfrac{\lambda'\omega_1 + \mu'\omega_2}{\nu'}$, $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ désignant des entiers. D'autre part, pour $z = z_0$, on a :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}} = \frac{dx}{\xi(x, y, z_0)}$$

[1] En effet l'intégrale $x(t)$, $y(t)$ de (10)' renferme d'une façon uniforme les constantes (x_0, y_0, z_0).

Donc $P(x,y,z)$, qui coïncide avec $\frac{1}{\xi}$, est rationnel en (x,y,z). Soit maintenant r le nombre de déterminations $Q_1, \ldots Q_r$ de Q qui correspondent à un point (x,y,z) de S; les différentielles exactes $Pdx + Q_1 dz, \ldots Pdx + Q_r dz$ étant de première espèce, leur somme $rPdx + (Q_1 + \ldots Q_r) dz$ sera aussi de première espèce et n'aura que deux périodes. La surface S possède donc une différentielle totale de première espèce, $\frac{dx}{\xi(x,y,z)} + R(x,y,z)dz$, qui n'a que deux périodes.

Deux cas sont maintenant à distinguer suivant que les périodes ω, ω' de l'intégrale $J = \int \frac{dx}{\xi} + Rdz$ coïncident avec les périodes ω_1, ω_2 de l'intégrale $\int \frac{dx}{\xi(x,y,z_0)}$ ou sont des sous-multiples de ces dernières:

$$\omega = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{\nu}, \quad \omega' = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{\nu}$$

Dans le premier cas, x, y s'expriment rationnellement en fonction de θ, $\theta' = \sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}$, et de z, Z, liés par la relation (8); inversement, θ et θ' sont rationnels en (x,y,z).

Dans le second cas, x, y s'expriment rationnellement en fonction de θ, θ', les coëfficients dépendant algébriquement de z : inversement, θ n'est pas rationnel en x, y, z; mais si nous posons $\theta = sn_{k^2} t$, $\theta_1 = sn_{k^2} \nu t$, $\theta_1' = cn_{k^2} \nu t . dn_{k^2} \nu t$, θ_1 est lié à θ par une relation de la forme $A(\theta) = \theta_1$, où A est une fraction rationnelle en θ; les variables θ_1, θ_1' s'expriment rationnellement en x, y, z, d'après les égalités $\theta_1 = sn\nu J$, $\theta_1' = cn\nu J . dn\nu J$.

Réciproquement, soit S une surface telle que les coordonnées x, y s'expriment rationnellement en fonction de θ, $\theta' = \sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}$, les coëfficients dépendant algébriquement de z; si de plus quand on pose $\theta = sn_{k^2} t$, $\theta_1 = sn_{k^2} \nu t$, θ_1 et $\theta_1' = \sqrt{(1-\theta_1^2)(1-k^2\theta_1^2)}$ sont rationnels en x, y, z, la surface S admet un groupe continu de transformations birationnelles; on a en effet:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\theta_1^2)(1-k^2\theta_1^2)}} = P(x,y,z)dx + Q(x+y,z)dz,$$

P et Q étant rationnels. L'intégrale abélienne $\int P(x,y,z_0)dx$ attachée aux courbes $z = z_0$ (de genre 1), a donc ses périodes indépendantes de z_0, ce qui démontre la proposition.

L'équation des courbes Γ ou $z = z_0$ étant mise sous la forme (7), si ϖ désigne le genre de la relation (8) entre z et Z, les intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe (8) sont autant d'intégrales de première espèce attachées à S, soit $J_1, \dots J_\varpi$. Ces ϖ intégrales sont fonctions d'une d'entre elles, puisqu'elles ne dépendent que de z. Elles sont d'ailleurs distinctes de l'intégrale $J = \int Pdx + Qdz$ qui, pour $z = z_0$, définit l'intégrale de première espèce attachée aux courbes Γ et par suite dépend de x. On montre aisément que S n'admet pas d'intégrale de première espèce distinctes des $(\varpi + 1)$ précédentes; mais nous n'aurons pas besoin de cette remarque.

Conclusion – Si maintenant on considère la surface S avant la transformation birationnelle qui a ramené les courbes Γ aux courbes $z = z_0$, on voit que les coordonnées (x, y, z) de S sont des fonctions méromorphes doublement périodiques d'un paramètre t (les périodes ω_1, ω_2 étant numériques), qui dépendent algébriquement d'un paramètre u, et cela de telle façon que u s'exprime rationnellement en (x, y, z) et que deux valeurs quelconques t_1, t_2 de t qui correspondent à un point (x, y, z) de S ne diffèrent que par la partie aliquote ν^e d'une période : $\nu(t_2 - t_1) = m\omega_1 + n\omega_2$.

Inversement, une telle surface S admet un groupe continu de transformations birationnelles, défini par les égalités : $u = u_0$, $t = t_0 + h$, h étant une constante arbitraire.

Toutes ces surfaces S possèdent au moins une différentielle totale de première espèce, n'ayant que deux

périodes.

L'hypothèse où le groupe G est intransitif est ainsi complètement épuisée.

Deuxième Cas — Le groupe permutable G est transitif.

Les transformations du groupe se laissent définir par les équations différentielles:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} = \xi_1(x,y,z), \dots\dots\dots \frac{\partial x}{\partial \alpha_\varrho} = \xi_\varrho(x,y,z)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} = \eta_1(x,y,z), \dots\dots\dots \frac{\partial y}{\partial \alpha_\varrho} = \eta_\varrho(x,y,z),$$

les rapports $\frac{\xi_i}{\eta_i}$ n'étant pas tous identiques, par exemple l'expression $\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2$ n'étant pas nulle. Posons alors: $\alpha_1 = u$, $\alpha_2 = v$, et considérons le système d'équations aux différentielles totales

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} dx = \xi_1(x,y,z)\,du + \xi_2(x,y,z)\,dv, \\ dy = \eta_1(x,y,z)\,du + \eta_2(x,y,z)\,dv, \end{array} \right.$$

auquel on peut adjoindre l'équation

$$(b) \qquad dz = \zeta_1(x,y,z)\,du + \zeta_2(x,y,z)\,dv,$$

$\zeta_1 \dots\dots \zeta_2$ vérifiant les conditions:

$$\frac{\partial S}{\partial x}\xi_1 + \frac{\partial S}{\partial y}\eta_1 + \frac{\partial S}{\partial z}\zeta_1 \equiv 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial x}\xi_2 + \frac{\partial S}{\partial y}\eta_2 + \frac{\partial S}{\partial z}\zeta_2 \equiv 0.$$

Si (x_0, y_0, z_0) est un point M_0 de S, ces équations (a) et (b) admettent une intégrale et une seule $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ qui pour $u=0$, $v=0$ définit le point M_0, soit

$$(c) \qquad x = \varphi(u,v, x_0,y_0,z_0), \quad y = \psi(u,v,x_0,y_0,z_0), \quad z = \chi(u,v,x_0,y_0,z_0),$$

et les égalités (c) déterminent une transformation birationnelle de la surface S en elle-même. Il suit de là que les singularités critiques ou transcendantes des fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, sont fixes (indépendantes de x_0, y_0, z_0), et comme u, v ne figurent pas explicitement dans le système (a), (b), ces singu-

larités ne peuvent être que $u=\infty$, $v=\infty$..[1]. Les fonctions $x(u,v), y(u,v)\ z(u,v)$ sont donc des fonctions uniformes et méromorphes de u,v, (c'est-à-dire ne présentent à distance finie, dans le champ de chaque variable u,v, d'autres singularités que des pôles).

Les coordonnées x, y, z de la surface S se trouvent exprimées ainsi en fonction uniforme et méromorphe de deux paramètres u,v. Mais nous savons quelque chose de plus sur les fonctions x, y, z de u,v. Résolvons les égalités (α) par rapport à du, dv (ce qui est possible, puisque $\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2$ n'est pas identiquement nul). Il vient ainsi:

$$(A)\qquad \begin{cases} du = P\ (x,y,z)\ dx + Q\ (x,y,z)\ dy, \\ dv = P_1\ (x,y,z)\ dx + Q_1\ (x,y,z)\ dy. \end{cases}$$

les seconds membres étant nécessairement des différentielles totales exactes. Il existe donc deux intégrales de différentielles totales attachées à S, soit:

$$u = \int P\,dx + Q\,dy \equiv J\,(x,y,z)\,,\quad v = \int P_1\,dx + Q_1\,dy \equiv K\,(x,y,z),$$

dont l'inversion définit x, y, z, comme fonctions uniformes de u,v. Nous sommes donc amenés à étudier les surfaces S dont les coordonnées s'expriment uniformément en fonction de deux paramètres u,v par l'inversion de deux différentielles-totales (A) attachées à S, les fonctions $x,(u,v), y(u,v), z(u,v)$ définies par (A) dépendant de plus rationnellement des constantes (x_0, y_0, z_0) valeurs de (x,y,z) pour $u=0, v=0$. Nous verrons dans la leçon prochaine, que les coordonnées $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sont des fonctions abéliennes de u,v, ou des dégénérescences de telles fonctions).

---

[1] Si une intégrale particulière $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ admettait la singularité critique ou transcendante $u=u_0$ $v=v_0$ l'intégrale générale, qui se deduit de l'intégrale précédente en changeant u en $u+g$, v en $v+h$ admettrait la singularité mobile $u=u_0-g$, $v=v_0-h$.

Seizième Leçon

Des fonctions uniformes définies par l'inversion de deux différentielles totales.

Le problème que nous traiterons dans cette leçon consiste à étudier les fonctions uniformes définies par l'inversion de deux différentielles totales :

(1) $u = \int P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \quad v = \int P_1(x,y)\,dx + Q_1(x,y)\,dy,$

où P, Q, P_1, Q_1 sont algébriques en x, y. Si nous posons : $z = \alpha P + \beta Q + \alpha_1 P + \beta_1 P$, ($\alpha$; β, α_1, β_1, étant des nombres pris au hasard), la variable z vérifie une certaine relation algébrique irréductible :

(2) $$S(x, y, z) = 0 ;$$

à un point x, y, z de S correspond un seul système P, Q, P_1, Q_1 ; autrement dit, P, Q, P_1, Q_1 sont rationnels en x, y, z. De plus, si x et y sont uniformes en u, v, et par suite $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$, comme on a :

$$P = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

etc. les expressions P, P_1, Q, Q_1 et par suite z sont uniformes en u, v. Nous pouvons donc toujours écrire le système (1) ainsi :

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= \int P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy \equiv J(x,y,z) \\ v &= \int P_1(x,y,z)\,dx + Q_1(x,y,z)\,dy \equiv K(x,y,z), \quad \text{avec } S(x,y,z) = 0, \end{aligned}$$

où J et K sont deux différentielles totales attachées à S, et le problème revient à étudier les cas où les fonctions x, y, z

de u, v définies par (1) sont uniformes.

Tout d'abord, si une solution particulière $x(u,v)$, $y(u,v)$ du système (1) est uniforme, la solution générale est aussi uniforme, puisqu'elle s'obtient en changeant u en $u+a$, v en $v+b$, dans une intégrale particulière, (a, b, désignant des constantes).

Soit maintenant (J, K) et (J_1, K_1) deux déterminations des intégrales $J.K$ qui correspondent au même point (x, y, z) de S ; ces deux déterminations ne peuvent différer respectivement que par une constante d'addition[1]: $J_1 = J + \alpha$, $K_1 = K + \alpha'$. Si partant de (x, y, z) avec les valeurs (u, v) de (J, K), on revient au même point (après avoir décrit un contour sur la surface) avec les valeurs $(u+\alpha, v+\alpha')$ on dit que α, α' constituent un couple de périodes des intégrales J, K. (Appelons valeurs congruentes de (u, v) deux couples de valeurs (u, v), (u_1, v_1) qui ne diffèrent que par l'addition d'un couple de périodes: $u_1 = u + \alpha$, $v_1 = v + \alpha'$. (A un point (x, y, z) de S, les égalités :

$$(2) \qquad x = \varphi(u, v) \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v),$$

font correspondre un couple (u, v) et tous ses congruents, inversement, si (u, v) et (u_1, v_1) donnent à x, y, z les mêmes valeurs, (u, v) et (u_1, v_1) sont congruents. [abstraction faite de certaines valeurs exceptionnelles de u, v.

Lors donc que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ définies par (1) sont uniformes, elles admettent comme couples de périodes tous les couples de périodes des intégrales J, K, et à un point (x, y, z) de S ne correspond qu'un seul système (u, v), abstraction faite des systèmes congruents.

---

[1] Pour certains points exceptionnels, les valeurs de J, K peuvent être indéterminées ; c'est ce qui arrive au point $x = 0$, $y = 0$ pour l'intégrale : $J = \int \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{(x^2 - y^2)(x^2 - k^2 y^2)}}$ $\left(\equiv \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \text{ si on pose } t = \frac{y}{x} \right)$

Pour pousser plus loin l'étude de ces fonctions je pose :

$$u = \xi_1 + i\,\xi_2, \qquad v = \xi_3 + i\,\xi_4.$$

et je regarde (u, v) comme définissant un point réel de l'espace E_4 à quatre dimensions $o\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4$. Si (α, α') est un couple de périodes, je pose de même :

$$\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2, \qquad \alpha' = \alpha_3 + i\,\alpha_4.$$

Un raisonnement tout élémentaire (déjà employé dans la théorie des fonctions elliptiques) montre alors qu'il ne saurait exister plus de quatre couples de périodes distinctes, (les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$ étant uniformes) ; de plus, si le nombre des couples de périodes distincts est bien égal à quatre, les points congruents à l'origine décomposent l'espace E_4 en véritables parallélipipèdes à quatre dimensions, tous congruents entre eux.[1]

Ces propositions admises, qui supposent seulement l'uniformité des fonctions x, y, z de u, v, nous allons restreindre le problème qui nous occupe.

Soit (x_0, y_0, z_0) les valeurs pour $u = u_0$, $v = v_0$ d'une solution $x(u,v)$, $y(u,v)$ $z(u,v)$ de (1) : la solution est parfaitement déterminée par ces conditions initiales, et comme elle est uniforme en u, v, à un système (x_0, y_0, z_0), (u_0, v_0), (u, v) ne correspond qu'un point (x, y, z) de S ; réciproquement, à un système (x, y, z), (u, v), (u_0, v_0), ne correspond qu'un point $(x_0\, y_0\, z_0)$ de S. Mais il faut bien se garder d'en conclure que

---

[1] Les deux propositions analogues de la théorie des fonctions elliptiques sont les suivantes : 1° une fonction uniforme $x(u)$ ne peut avoir plus de deux périodes distinctes ; 2° si elle admet deux périodes distinctes, le rapport de ces périodes est imaginaire (autrement dit, elles donnent naissance à un véritable parallélogramme).

x, y, z sont rationnels en x_0, y_0, z_0. La relation entre (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0), [pour u, v, u_0, v_0, fixes] peut être biuniforme sans être birationnelle, comme vont le montrer quelques exemples.

En premier lieu, si (x, y, z) dépendent rationnellement de (x_0, y_0, z_0), les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sont sûrement méromorphes (voir page 287). Mais la réciproque n'est pas vraie; considérons par exemple le système (1) bien simple:

$$dx = du, \quad \frac{dy}{y} - \frac{x}{2}\, dx = dv;$$

si x_0, y_0 sont les valeurs de x, y pour $u=0, v=0$, l'intégrale de ce système est donnée par les relations:

$$x = u + x_0, \qquad y = y_0 e^{u^2 + 2ux_0 + v}$$

elle est méromorphe et renferme les constantes x_0, y_0 sous forme transcendante; la correspondance entre (x,y) et (x_0, y_0) est biuniforme, puisqu'on a $x_0 = x - u$, $\quad y_0 = y e^{u^2 - 2ux - v}$,

mais non birationnelle

Il peut se faire aussi que l'intégrale $x(u,v)$,... d'un système (1) soit uniforme sans être méromorphe; mais présente des singularités essentielles pour des valeurs finies de u, v (variables avec les constantes d'intégration). Par exemple, le système (1)

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - j(x+1)}} = du, \quad \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - k(y+1)}} - dx = v,$$

définit les fonctions:

$$x = \wp_j(u + \alpha), \qquad y = \wp_k\left[v + b + \wp_j(u+\alpha)\right]$$

où α, b sont deux constantes arbitraires. Ces fonctions x, y sont uniformes et admettent les quatre couples de périodes:

u	$2\omega_1$,	$2\omega_2$	0	0
v	0	0	$2\Omega_1$	$2\Omega_2$

$(2\omega_1, 2\omega_2)$ et $(2\Omega_1, 2\Omega_2)$ désignant les périodes respectives de $\wp_j$ et de $\wp_k$. La fonction y admet (pour v quelconque) les points

singuliers essentiels $u = -\alpha + 2m\omega_1 + 2m\omega_2$, points donnés encore par la relation $x_0 = p(\alpha)$, si x_0, y_0 sont les valeurs de x, y pour $u = 0, v = 0$. Les fonctions x, y dépendent nécessairement de x_0, y_0 d'une manière transcendante.

Dans ce qui va suivre, nous étudierons exclusivement le cas où (x, y, z) dépendent rationnellement de (x_0, y_0, z_0). Nous savons que les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sont alors méromorphes. Nous allons voir que ce sont des fonctions abéliennes ou des dégénérescences.

Deux hypothèses générales se présentent suivant que le nombre des couples distincts de périodes de J, K est égal ou inférieur à 4.

Première hypothèse.

Le nombre des couples de périodes est égal à 4.

Montrons que, dans cette hypothèse, les deux intégrales J, K sont de première espèce.

Supposons en effet que J ne soit pas de première espèce. On peut alors (voir page 278) par un changement algébrique effectué sur x, y :

$$x - x_0 = X^\mu, \quad y - y_0 = g_1 X + \dots + g_{\lambda-1} X^{\lambda-1} + Y X^\lambda,$$

faire en sorte qu'une des branches de l'intégrale:

$J = \int P'(X,Y)\, dX + Q'(X,Y)\, dY$, soit de la forme:

$$(\alpha) \qquad \int \frac{M(X,Y)\, dX + XN(X,Y)\, dY}{X^i} \qquad i \geq 1$$

M et N étant holomorphes pour $X = 0$, $Y = Y_0$, et $M(0, Y_0)$ n'étant pas nul (abstraction faite de certaines valeurs exceptionnelles de Y_0.) Lorsque X tend vers zéro, Y vers Y_0 suivant une loi quelconque de la forme:

$$(\beta) \qquad Y - Y_0 = l\, X^{\frac{j}{k}} + m\, X^{\frac{j+1}{k}} + \dots\dots$$

la branche (α) de J tend vers l'infini, car cette branche, si on tient compte de (b) peut s'écrire :

$$\int \left[\frac{M(o, Y_o) + \varepsilon}{X^2} \right] dX$$

ε tendant vers zéro avec X.

Si nous posons : $Z = \frac{\alpha P' + \beta Q'}{X^2}$ (α, β désignant des constantes quelconques), X, Y, Z vérifient une relation algébrique :

$$\Sigma(X, Y, Z) = o,$$

et $P'(X, Y)$, $Q'(X, Y)$ s'expriment rationnellement en X, Y, Z. Pour $X = o$, $Y = Y_o$ une des valeurs de Z est égale à $Z_o \equiv \alpha M(o, Y_o)$. Si (pour $X = o$, quelque soit Y_o) plusieurs déterminations de Z coïncident avec Z_o, les différentes branches de J qui correspondent à ces déterminations de Z deviennent infinies quand X, Y tendent vers o, Y_o d'après une loi (b).

Ces remarques faites, considérons les fonctions X, Y, Z de u, v. Comme X, Y, Z, s'expriment algébriquement en x, y, z, la fonction $X(u, v)$ vérifie une relation algébrique :

$$X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \quad + A_1 X + A_o = o,$$

dont les coefficients A sont des fonctions méromorphes de u, v admettant le parallélipipède de périodes P_4. Les points u_o, v_o ou M_o de E_4 pour lesquels X est de la forme $\frac{o}{o}$ sont des points isolés, qui donnent à une au moins des fonctions $A(u, v)$ la forme $\frac{o}{o}$: ces points M_o sont en nombre fini dans un parallélipipède P_4. Les mêmes remarques s'appliquent à $Y(u, v)$, $Z(u, v)$. De chacun de ces points M_o (pour lesquels une au moins des fonctions X, Y, Z est de la forme $\frac{o}{o}$), décrivons dans l'espace E_4 une sphère S_4 de rayon fixe assez petit pour que deux quelconques de ces sphères n'aient pas de point commun. Soit P_4' la portion d'un parallélipipède P_4 extérieure aux sphères S_4 ; à chaque point (u, v) de P_4' correspondent plusieurs points (X, Y, Z) de la surface Σ. Je dis qu'aucun de ces points ne saurait coïncider avec le point $X = o$, $Y = Y_o$, $Z = Z_o \equiv \alpha M(o, Y_o)$. En

effet, supposons que pour $u = u_0$, $v = v_0$ une des déterminations de (X, Y, Z) soit (o, Y_0, Z_0), et faisons tendre u vers u_0, v vers v_0, suivant une loi quelconque qui n'annule pas identiquement X [c'est-à-dire le coëfficient $A_0(u,v)$], soit la loi

$$v - v_0 = g(u-u_0) + h(u-u_0)^2 + \dots\dots;$$

on aurait alors:

$$X = c\,(u-u_0)^{\frac{\varpi}{\nu}} + c_1\,(u-u_0)^{\frac{\varpi+1}{\nu}} + \dots, Y - Y_0 = c'(u-u_0)^{\frac{\varpi'}{\nu}} + \dots, Z - Z_0 = c''(u-u_0)^{\frac{\varpi''}{\nu}} + \dots;$$

et par suite:

$$(b)\qquad Y - Y_0 = l\,X^{\frac{j}{k}} + m\,X^{\frac{j+1}{k}} + \dots.$$

Une au moins des branches de J correspondant (pour $X = o$, $Y = Y_0$) à la valeur Z_0 de Z, tendrait donc vers u_0, quand X tend vers o, Y vers Y_0 suivant la loi (b), ce qui est absurde — Il suit de là que, dans le domaine P_4', la quantité $\varrho \equiv |X| + |Y - Y_0| + |Z - Z_0|$ admet une limite inférieure δ plus grande que zéro.

Ce point établi, faisons tendre (X, Y, Z) vers le point (o, Y_0, Z_0), d'après une loi (b) quelconque, et suivons les variations correspondantes de $u = J(X, Y, Z)$, $v = K(X, Y, Z)$, le point (u, v) de E_4, s'éloigne à l'infini sur un chemin continu, puisque J tend vers l'infini. D'autre part dès que $\varrho \equiv |X| + |Y - Y_0| + |Z - Z_0|$ devient moindre que δ, le point (u, v) doit être intérieur à une des sphères s_4. Il y a donc contradiction. L'intégrale J doit être de première espèce. C. Q. F. D.

Indiquons ensuite brièvement quelques propriétés des fonctions x, y, z de u, v. Tout d'abord, si une fonction méromorphe $t(u,v)$ admet le parallélipipède de périodes P_4, c'est une fonction rationnelle de (x, y, z). Comme à un point (x, y, z) de S ne correspond qu'un point (u, v) de E_4, abstraction faite des points congruents, il est clair que t est une fonction uniforme du point (x, y, z). Si maintenant je donne à y une valeur constante quelconque $\bar{y}$, je dis que la fonction $t(x, \bar{y}, z) \equiv t_1(x)$ est une fonction algébrique de x. Soit en effet x_0 une valeur

quelconque de x (qui peut être $x_0 = \infty$,): pour $x = x_0$ les fonctions $u(x,\bar{y})$, $v(x,\bar{y})$ sont finies et algébroïdes en x, par suite $t_1(x) \equiv t[u(x), v(x)]$ est algébroide pour $x = x_0$. La fonction $t_1(x)$ qui ne présente que des points singuliers algébriques et qui n'admet qu'un nombre fini de valeurs, est algébrique. Le même raisonnement s'appliquant à y pour x constant, t est une fonction algébrique de x, y, donc une fonction rationnelle de (x, y, z).

Ce théorème est vrai en particulier pour les fonctions $x(u+u_0, v+v_0)$, $y(u+u_0, v+v_0)$, $z(u+u_0, v+v_0)$.

On a donc, si (X,Y,Z), (x,y,z), (x_0, y_0, z_0) sont les valeurs des fonctions (x,y,z), pour $(u+u_0, v+v_0)$, (u,v), (u_0,v_0):

$$X = R(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$$
$$Y = R_1(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$$
$$Z = R_2(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$$

(R, R_1, R_2 étant des fonctions rationnelles en x, y, z, x_0, y_0, z_0)

Étant données deux fonctions analytiques $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, convenons de dire qu'elles admettent un théorème d'addition si les conditions suivantes sont réalisées: quand on pose:

$$X = \varphi(u+u_0, v+v_0), \quad Y = \psi(u+u_0, v+v_0), \quad x_0 = \varphi(u_0 v_0) \quad y_0 = \psi(u_0 v_0)$$
$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v),$$

X et Y sont des fonctions algébriques de x, y, x_0, y_0. Cette définition admise, on voit que les fonctions périodiques $x(u,v)$, $y(u,v)$ que nous venons d'introduire, admettent un théorème d'addition

Si de même on considère les fonctions $x(u,v)$, $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)$, il existe, d'après ce qui précède, une relation algébrique entre ces trois fonctions. On établit aisément que $x(u,v)$ étant une fonction méromorphe qui admet le parallélipipède de périodes P_4, à un système de valeurs $(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v})$ ne correspond qu'un seul point (u,v) de E_4, abstraction faite des points congruents. Toutes les fonctions méromorphes $t(u,v)$ aux mêmes périodes, sont donc des fonctions

rationnelles de $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$. Mais je me borne à signaler cette proposition.

D'autre part, quelle est l'expression analytique la plus simple de ces fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$? Observons d'abord qu'on peut toujours, moyennant une transformation linéaire effectuée sur $u\ v$, donner au tableau des périodes la forme:

$$(c)\qquad \begin{array}{c|cccc} u & 2i\pi & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ v & 0 & 2i\pi & \omega_1' & \omega_2' \end{array}.$$

Il est clair alors que les fonctions (x, y, z) de u, v sont représentables par un quotient $\frac{A}{B}$ dont les termes sont de la forme: $(m,n) \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{m,n} e^{mu+nv}$. On a en effet:

$$x(u,v) = R\,[x(u,o), y(u,o), z(u,o), x(o,v), y(o,v), z(o,v)]$$

R étant une fraction rationnelle. Les fonctions méromorphes $x(u,o)$, $x(o,v)$ qui admettent la période $2i\pi$ sont respectivement de la forme:

$$\frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m e^{mu}}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_m e^{mu}} \quad \text{et} \quad \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n' e^{nv}}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n' e^{nv}};$$

il en est de même de $y(u,o), \ldots z(o,v)$. D'où il suit que $x(u,v)$ est de la forme:

$$\frac{\sum \alpha_{m,n} e^{(mu+nv)}}{\sum b_{m,n} e^{(mu+nv)}}.$$

Mais on peut préciser beaucoup ce résultat en montrant que $x(u,v)$ est le quotient de deux fonctions θ de deux variables u,v. Ceci revient à dire encore qu'on peut toujours ramener le tableau des périodes à une forme (c) où ω_1' et ω_2 coïncident. Pour la démonstration de ce théorème fondamental, je renverrai aux travaux de MM. Weierstrass, Appell, Picard et Poincaré.

Une conséquence de ce théorème est que dans le tableau (c), trois des périodes seulement peuvent être choisies arbitrairement. Considérons d'après cela les deux fonctions

$X(U,V)$, $Y(UV)$ définies par les égalités :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}&=U\\ \int_0^{x_1}\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}+\int_0^{x_2}\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}&=V\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&R(x)=x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c),\\ &(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0.\end{aligned}$$

avec $X=x_1+x_2$, $Y=x_1x_2$. Ces fonctions X, Y de U, V sont des fonctions méromorphes quadruplement périodiques, et on peut (moyennant un changement linéaire effectué sur U, V) donner au tableau des périodes la forme

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & \omega_1 & \omega_2, \\ 0 & 2i\pi & \omega_2 & \omega_2'. \end{matrix}$$

les trois quantités $\omega_1, \omega_2, \omega_2'$ étant trois fonctions indépendantes de a, b, c. On déduit de là que toute fonction méromorphe quadruplement périodique $x(u,v)$ est une fonction rationnelle de $X(U,V)$, $\frac{\partial X}{\partial U}$, $\frac{\partial X}{\partial V}$, la fonction $X(U,V)$ correspondant à des valeurs convenables de a, b, c et U, V représentant des fonctions linéaires convenables de u, v, soit $U=\alpha u+\beta v$, $V=\alpha' u+\beta' v$: C'est ce qu'on exprime brièvement en disant que toute fonction méromorphe quadruplement périodique $x(u,v)$ est une fonction abélienne [1] proprement dite (ici hyperelliptique). Mais là encore je me borne à signaler ce théorème sans insister sur sa démonstration.

Revenons maintenant à la surface S dont nous sommes partis. Les coordonnées x, y, z d'un point de S sont en définitive des fonctions abéliennes proprement dites (aux mêmes périodes) de deux paramètres u, v, fonctions telles qu'à un point (x,y,z) de S ne corresponde qu'un couple de valeurs (u,v), abstraction faite des couples congruents.

Inversement, si les coordonnées d'une surface

(1) Un théorème analogue s'applique aux fonctions périodiques de trois variables, mais il n'en est plus de même dès que le nombre des variables dépasse 3.

algébrique sont exprimables de cette manière, on a:

$$du = P\ (x,y,z)\ dx + Q\ (x,y,z)\ dy\ ,$$
$$dv = P_1\ (x,y,z)\ dx + Q_1\ (x,y,z)\ dy\ ,$$

P, P_1, Q, Q_1 sont des fonctions uniformes du point (x,y,z) de S, dont toutes les singularités sont algébriques, ce sont donc des fonctions rationnelles de (x,y,z). Les intégrales $u = \int P dx + Q dy$, $v = \int P_1 dx + Q_1 dy$, sont de première espèce, puisque les fonctions méromorphes x, y, z de u, v sont quadruplement périodiques. La surface possède donc deux intégrales de première espèce dont l'inversion définit x, y, z en fonctions abéliennes de u, v — Enfin, si on change u en $u+a$ v en $v+b$ et si on appelle (X,Y,Z) le point de S défini par $(u+a), (v+b)$ il existe entre $(X\,Y\,Z)$ et (x,y,z), d'après le théorème d'addition, une correspondance birationnelle, qui définit un groupe de transformations birationnelles de la surface S en elle-même, groupe permutable à deux paramètres a, b.

Deuxième hypothèse

Le nombre des couples de périodes est inférieur à 4.

Je dis que, dans ce cas une au moins des intégrales J, K devient infinie le long d'une ligne (à distance finie ou infinie) de S.

Supposons en effet qu'il n'existe de courbe polaire ni pour J ni pour K. Dans ce cas les deux intégrales $J(x,y_0) = \int P(x,y_0)\,dx$ et $J(x_0,y) = \int Q(x_0,y)\,dy$ sont, pour x_0 (ou y_0) arbitraire (1) des intégrales abéliennes de première

---

(1) Abstraction faite, peut-être, de certaines valeurs singulières de x_0 (ou de y_0).

espèce; elles ont au moins deux périodes dont le rapport est imaginaire; et les mêmes remarques s'appliquent à $K(x, y_0)$, $K(x_0, y)$. D'autre part, soit :

$$\begin{array}{c|ccc} J & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ K & \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 \end{array}$$

le tableau des trois couples de périodes (ω_1, ω'_1.... pouvant être nuls); il nous est loisible d'admettre (moyennant une substitution linéaire effectuée sur J, K) que ω_1 est nul; ω_2, ω_3 sont alors différents de zéro et leur rapport est imaginaire. On peut admettre ensuite que ω'_2 est nul : ω'_1, ω'_3 sont alors différents de zéro et leur rapport est imaginaire.

Soit maintenant $X = \wp(u)$ la fonction $\wp$ de Weierstrass qui admet comme periodes ω_2 et ω_3; on a $\wp'^2(u) = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$. L'égalité :

$$du = \frac{dX}{\sqrt{4X^3 - g_2 X - g_3}} = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy$$

définit X en fonction uniforme de (x, y, z); comme, pour $y = y_0$, $\int P\,dx$ est une intégrale abélienne de première espèce, $X(x, y_0, z)$ est une fonction algébrique de x; et de même $X(x_0, y, z)$ est une fonction algébrique de y; X est donc une fraction rationnelle R en x, y, z. - Si on appelle $\wp_1(v) = Y$, la fonction $\wp$ de M. Weierstrass qui a comme périodes ω'_1, ω'_3 on voit de même que l'égalité :

$$dv = \frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - g'_2 Y - g'_3}} = P_1(x, y, z)\,dx + Q_1(x, y, z)\,dy$$

définit Y en fonction rationnelle de x, y, z, soit $Y = R_1(x, y, z)$. D'ailleurs les égalités :

$$X = R(x, y, z)\ . \qquad Y = R_1(x, y, z)$$

déterminent x, y, z algébriquement en $X\,Y$; autrement X et Y seraient fonctions l'une de l'autre, par suite les deux intégrales J, K, ce qui est contre l'hypothèse.

Si μ désigne le nombre de points (x, y, z); qui correspondent à (X, Y) il est clair que les fonctions (x, y, z) de (u, v) algébriques en $p(u)$, $p_1(v)$ admettent un système de périodes de la forme :

$$\begin{array}{c|cccc} u & 0 & 0 & m_2\,\omega_2 & m_3\,\omega_3 \\ v & m'_1\,\omega'_1 & m'_3\,\omega'_3 & 0 & 0 \end{array},$$

(Les m, m' désignant des entiers positifs au plus égaux à μ)

système de quatre couples de périodes distinctes. Le nombre des couples de périodes ne serait pas inférieur à 4. C.Q.F.D.

Il existe donc sur S au moins une courbe polaire (qu'on peut toujours supposer à distance finie)[1]. Soit $x = g(y)$ la projection sur le plan xoy d'une de ces courbes polaires C. Le long de cette courbe, une branche au moins d'une des intégrales J, K, soit la branche J_1 de J, devient infinie, et si on pose $x - g(y) = X^\nu$, (ν désignant un certain entier), cette branche et la branche K_1 de K qui correspond à la même détermination de $z(x, y)$, se laissent écrire :

$$(\alpha)\quad \begin{cases} J_1 = \dfrac{\alpha_j(y)}{X^j} + \dfrac{\alpha_{j-1}(y)}{X^{j-1}} + \dots + \dfrac{\alpha_1(y)}{X} + \alpha_0(y)\log X + \beta_0(y) + \beta_1(y)X + \dots \\[2ex] K_1 = \dfrac{\gamma_k(y)}{X^k} + \dfrac{\gamma_{k-1}(y)}{X^{k-1}} + \dots + \dfrac{\gamma_1(y)}{X} + \gamma_0(y)\log X + \delta_0(y) + \delta_1(y)X + \dots, \end{cases}$$

les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des fonctions de y holomorphes pour $y = y_0$ (abstraction faite de valeurs exceptionnelles de y_0), et j, k des entiers positifs ou nuls.

Si, dans les développements (α) un au moins des coëfficients $\alpha_0\, \gamma_0$ de $\log X$, soit α_0, est différent de zéro. on dit que la courbe C est une courbe polaire logarithmique

---

[1] Moyennant une transformation homographique effectuée sur S, on peut toujours admettre (et c'est ce que nous ferons) que la courbe à l'infini de S ne comprend pas de courbe polaire.

de la branche J_1, K_1 de J, K. Observons que α_0, γ_0 sont nécessairement des constantes, puisque les périodes, $2i\pi\alpha_0, 2i\pi\gamma_0$ de J_1, K_1 ne sauraient dépendre de y. Nous dirons que α_0, γ_0 sont les résidus de J_1, K_1 relatifs à la courbe polaire $x = g(y)$. En remplaçant K par $\alpha_0 K - \gamma_0 J$, il est loisible de faire en sorte que $\log X$ figure seulement dans J_1, c'est-à-dire que le résidu de K_1 soit nul.

Quand les deux coëfficients α_0, γ_0 sont nuls, on dit que la courbe C est une courbe polaire non logarithmique de la branche J_1, K_1 de J, K.

Ceci posé, deux cas principaux sont à distinguer suivant qu'il existe ou non une courbe C qui soit polaire sans être logarithmique pour une branche au moins J_1, K_1 des intégrales J, K.

Lemme - Nous commencerons par établir que dans l'un et l'autre cas, il existe sur S une famille d'unicursales

Premier Cas.

Il existe une courbe polaire non logarithmique.

La branche J_1, K_1 de J, K qui admet cette courbe C comme courbe polaire non logarithmique, est définie par les égalités :

$$(\alpha)\quad \begin{cases} u = J_1(x,y,z) = \dfrac{\alpha_j(y)}{X^j} + \dfrac{\alpha_{j-1}(y)}{X^{j-1}} + \dots + \dfrac{\alpha_1(y)}{X} + \beta_0(y) + \beta_1(y)X + \dots \\ v = K_1(x,y,z) = \dfrac{\gamma_k(y)}{X^k} + \dfrac{\gamma_{k-1}(y)}{X^{k-1}} + \dots + \dfrac{\gamma_1(y)}{X} + \delta_0(y) + \delta_1(y)X + \dots \end{cases}$$

$$(k \leq j) .$$

Si on élimine X entre les deux relations (α), il vient :

$$(b)\qquad v = A_k\, u^{\frac{k}{j}} + A_{k-1}\, u^{\frac{k-1}{j}} + \dots + A_1 u^{\frac{1}{j}} + A_0 + \frac{B_1}{u^{\frac{1}{j}}} + \frac{B_2}{u^{\frac{2}{j}}} + \dots ;$$

le nouveau développement converge dans le domaine de $u=\infty, y=y_0$, c'est-à-dire pour

$$|u| > R, \qquad |y-y_0| < \rho,$$

R et ρ étant deux certaines quantités positives variables avec y_0. Il n'y a d'exception que pour des valeurs particulières de y_0.

1° Admettons d'abord que tous les coëfficients $A_j \ldots A_0$ ne soient pas des constantes, et soit A_ℓ le premier de ces coëfficients qui dépende effectivement de y, $[k \geqslant \ell \geqslant 0]$ Posons :

$$(c) \quad u = U^j, \qquad v = A_k U^k + \ldots\ldots + A_{\ell+1} U^{\ell+1} + U^\ell V, \quad [k \geqslant \ell \geqslant 0];$$

les quantités $A_k, \ldots\ldots A_{\ell+1}$ étant ici des constantes absolues. La fonction méromorphe $y(u,v)$ devient une fonction méromorphe $\mathcal{Y}(U,V)$. D'autre part, on a d'après (b), et (c).

$$(d) \qquad V = A_\ell(y) + \frac{A_{\ell+1}}{U} + \ldots + \frac{A_0}{U^\ell} + \frac{B_1}{U^{\ell+1}} + \ldots\ldots;$$

V, pour $U=\infty$ et $y=y_0$, est donc égal à $A_\ell(y_0) = V_0$, valeur variable avec y_0 ; inversement, la fonction $y(U,V)$, définie par (d), qui pour $U=\infty$, $V=V_0$ est égale à y_0, est une fonction holomorphe de U pour $U=\infty$. La fonction méromorphe $y(U,V_0)$ est donc, pour V_0 quelconque, une fonction rationnelle de U. D'autre part, l'égalité (α) peut s'écrire :

$$(e) \qquad U_1 = \frac{1}{U} = \frac{X}{\sqrt{\alpha_j + X\alpha_{j-1} + \cdots}} \equiv X\,[\alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots\ldots],$$

les $\alpha_j, \alpha_{j-1}\ldots$ étant holomorphes et α_0 différent de zéro pour $y=y_0$.[1] Donc, pour $U=\infty$, $V=V_0$, la fonction $X(U,V)$ définie par (e) (où on remplace y en U,V) et qui s'annule avec U_1, est une fonction holomorphe (V_0 ayant une valeur quelconque). Comme on a : $x = g(y) + X^\nu$, g étant algébrique en y

---

[1] Il n'y a d'exception que pour des valeurs particulières de y_0.

et par suite en U, une branche au moins de la fonction $x(U,V)$ est algébroïde pour $U=\infty$, et puisque $x(U,V)$ est une fonction méromorphe, c'est une fonction rationnelle de U; enfin, z s'exprimant algébriquement en x, y, la fonction méromorphe $z(U,V)$ est aussi rationnelle en U. Il existe donc sur la surface S, un faisceau de courbes unicursales, à savoir les courbes $V=V_0$ définies par les relations:

$$x=\varphi(U,V_0),\quad y=\psi(U,V_0),\quad z=\chi(U,V_0)$$

où φ, ψ, χ sont rationnels en U.

2° Admettons maintenant que tous les coëfficients $A_j \ldots\ldots A_1, A_0$, soient constants. Nous pouvons, dans ce cas supposer que dans les développements (a), k est inférieur à j. Car si $j=k$, on a:

$$v = A_k u + A_{k-1} u^{\frac{j-1}{j}} + \ldots\ldots,$$

et il suffit de remplacer v par $v_1 = v - A_k u$, pour que dans (a), k soit moindre que j. En particulier, k peut être nul.

Soit donc $k<j$, et posons:

$$u=U^j,\qquad v=A_k U^k + A_{k-1} U^{k-1}+\ldots+A_1 U + A_0 + V \equiv P(U)+V.$$

Les deux égalités;

$$(\alpha')\quad \begin{cases} u = U^j = \dfrac{\alpha_j(y)}{X^j} + \dfrac{\alpha_{j-1}(y)}{X^{j-1}} + \ldots \\[2ex] V = \dfrac{B_1(y)}{U} + \dfrac{B_2(y)}{U^2} + \ldots\ldots \end{cases}$$

montrent que pour $y=y_0$, X tendant vers zéro suivant une loi entièrement arbitraire, u tend vers l'infini arbitrairement et V tend vers zéro suivant une loi correspondante. Autrement dit, U tendant vers l'infini suivant une loi quelconque, on peut faire tendre V vers zéro suivant une loi telle que X tende vers zéro et que y coïncide avec y_0; ou encore (si l'on veut), telle que le point $x(U,V)$, $y(U,V)$, $z(U,V)$ de S tende vers un point (a,b,c) arbitrairement choisi sur la coube polaire C.

D'autre part si nous posons:

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v), & y=\psi(u,v), & z=\chi(u,v), \text{ avec } u=u_0+u_1,\ v=v_0+v_1, \\ x_0=\varphi(u_0,v_0) & y_0=\psi(u_0,v_0), & z_0=\chi(u_0,v_0) \\ x_1=\varphi(u_1,v_1) & y_1=\psi(u_1,v_1), & z_1=\chi(u_1,v_1) \end{cases},$$

x, y et z s'expriment rationnellement en fonction de (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), puisque par hypothèse (voir page 292), la fonction $x = \varphi(u+u_0, v+v_0)$, par exemple, peut s'écrire : $\varphi_1(u, v, x_0, y_0, z_0)$, φ_1 étant rationnel en $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$ $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, $z_0 = \psi_0(u_0, v_0)$. Nous avons donc :

(f) $x = L(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1)$, $y = M(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1)$ $z = N(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1)$,

L, M, N étant des fonctions rationnelles de toutes les variables. Pour une position arbitraire du point (x_1, y_1, z_1) sur S, les fonctions L, M, N, de x_0, y_0, z_0 ne sont indéterminées qu'en des points isolés (x_0, y_0, z_0) de S.

Quand on remplace u, v en fonction de U, V, les fonctions x, y, z deviennent des fonctions méromorphes de U, V, soit :

$$x = \Phi(U, V), \quad y = \Psi(U, V), \quad z = X(U, V).$$

Si (U, V), (U_0, V_0) et (U_1, V_1) sont les valeurs de (U, V) correspondant respectivement à (u, v), (u_0, v_0) et (u_1, v_1), on a entre $U \ldots V_1$ les relations

(m) $$U^j = U_0^j + U_1^j, \quad V = -P(U) + P(U_0) + P(U_1) + V_0 + V_1.$$

Les valeurs (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) des trois fonctions Φ, Ψ, X qui correspondent à trois couples de valeurs (U, V), (U_0, V_0) et (U_1, V_1) liées par (m), vérifient les relations (f).

Ceci posé, nous allons montrer que les fonctions $\Phi(U, V)$, $\Psi(U, V)$, $X(U, V)$ sont des fonctions rationnelles de U. Il suffit pour cela de voir que, V ayant reçu une valeur arbitraire h, le point $x(U, h)$, $y(U, h)$, $z(U, h)$ tend vers un point limite quand U tend vers l'infini d'une façon quelconque.

Donnons à U_1 une valeur fixe quelconque ; à V_1 la valeur $h - P(U_1)$, et soit a_1, b_1, c_1 les valeurs correspondantes de $x(U, V)$, $y(U, V)$, $z(U, V)$. Soit d'autre part (a_0, b_0, c_0) un point quelconque pris sur la courbe polaire C. Pour $x_0 = a_0$, $y_0 = b_0$, $z_0 = c_0$ et $x_1 = a_1$ $y_1 = b_1$ $z_1 = c_1$ les fonctions L, M, N, ont une valeur bien

déterminée, qui peut être infinie ; soit $L=a$, $M=b$, $N=c$.

Je dis que, si (V ayant la valeur h) U tend vers l'infini d'une façon quelconque, le point $x(U,V)$, $y(U,V)$, $z(U,V)$, tend vers le point (a,b,c).

En effet, considérons un système de valeurs (U,V), (U_0,V_0), (U_1,V_1) vérifiant les conditions (m) : laissons U_1 et V fixes ($V=h$), faisons tendre U vers l'infini suivant une loi quelconque : $U_0=\sqrt[j]{U^j-U_1^j}$ tend vers l'infini suivant une certaine loi, et on peut faire tendre alors V_0 vers zéro de façon que (x_0,y_0,z_0) tende vers le point (a_0,b_0,c_0) de C. Dans ces conditions, V_1 qui d'après (m) est égal à $V-P(U_1)-V_0+P(U)-P(U_0)$ tend vers $h-P(U_1)$, car $P(U)-P(U_0)$ tend vers zéro, parce que k est plus petit que j.[1] On voit donc que (x_1,y_1,z_1) tend vers (a_1,b_1,c_1) ; les fonctions L, M, N, tendent vers a,b,c. Quand $|U|$ croît indéfiniment d'une façon quelconque, le point $x(U,h)$. $y(U,h)$, $z(U,h)$ tend vers le point (a,b,c).. C. Q. F. D.

Les fonctions $x(U,V)$, $y(U,V)$, $z(U,V)$ étant rationnelles en U, les courbes $V=V_0$, forment sur S un faisceau d'unicursales.

Deuxième Cas — Toutes les courbes polaires sont logarithmiques

Soit α_0, γ_0 $[\alpha_0\neq 0]$ les résidus des branches J_1, K_1 de J, K, relatifs à la courbe logarithmique $x-g(y)=0$. Nous établirons d'abord cette proposition intermédiaire.

Il existe sur S une famille d'unicursales ou bien, si on pose $w=v-\frac{\gamma_0}{\alpha_0}u$, $t=e^{\frac{u}{\alpha_0}}$, les fonctions $x(t,w)$, $y(t,w)$, $z(t,w)$ sont des fonctions méromorphes de t.

---

(1) On a : $P(U)-P(U_0)=\sum A_l\left[U^l-(U^j-U_1^j)^{\frac{l}{j}}\right]$, $l\leqslant k\leqslant j$.

Or $U^l-\left[U^j-U_1^j\right]^{\frac{l}{j}}=U^l\left[1-\left(1-\frac{U_1^j}{U^j}\right)\right]^{\frac{l}{j}}=\frac{U_1^j}{U^{(j-l)}}\frac{l}{j}(1+\varepsilon)$, ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{U}$; $P(U)-P(U_0)$ tend donc vers zéro quand $|U|$ croît indéfiniment.

Nous distinguerons deux cas principaux, suivant que J_1, K_1, deviennent infinis pour $X=0$ comme $\operatorname{Log} X$ ou comme $\frac{1}{X^m}$.

1° – J_1, K_1 deviennent infinis, pour $X=0$, comme $\operatorname{Log} X$.

Écrivons les développements de $\frac{u}{\alpha_0}=\frac{J_1}{\alpha_0}$ et de $\varpi = K_1 - \frac{J_1 \gamma_0}{\alpha_0}$

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \frac{u}{\alpha_0} = \log X + \beta_0(y) + \beta_1(y) X + \beta_2(y) X^2 + \dots \\ \varpi = v - \frac{u\gamma_0}{\alpha_0} = \delta_0(y) + \delta_1(y) X + \delta_2(y) X^2 + \dots \end{cases}$$

Les fonctions méromorphes x, y, z de u, ϖ, ne changent pas quand, ϖ restant constant, on change u en $u + 2i\pi\alpha_0$. Si nous posons $e^{\frac{u}{\alpha_0}} = t$, x, y et z deviennent des fonctions uniformes de t, ϖ, dont les seules singularités essentielles possibles sont $t=0$, $t=\infty$, $\varpi=\infty$. Nous allons voir que $t=0$ est un point ordinaire des fonctions (x, y, z) de $[t, \varpi]$. Il suffit de montrer pour cela, que (ϖ restant fixe) le point (x, y, z) tend vers un point limite quand t tend vers zéro arbitrairement.

Nous avons :

$$(b) \quad \begin{cases} t = X \left[B_0(y) + B_1(y) X + \dots \right] \\ \varpi = \delta_0(y) + \delta_1(y) X + \dots \end{cases}$$

les fonctions B, δ étant holomorphes pour $y=y_0$, et B_0 n'étant pas nul, (abstraction faite de certaines valeurs exceptionnelles de y_0). Si nous tirons X de la première équation (b) pour porter dans la seconde, il vient :

$$(c) \quad \varpi = \delta_0(y) + t D_1(y) + t^2 D_1(y) + \dots$$

$D_1, D_2, \dots$ étant holomorphes pour $y=y_0$

Admettons d'abord que $\delta_0(y)$ dépende effectivement de y, et soit y_0 une valeur de y qui n'annule pas $\delta_0'(y)$. L'équation (c) définit une fonction $y(t, \varpi)$ qui, pour $t=0$, $\varpi = \varpi_0 = \delta_0(y_0)$, est holomorphe et égale à y_0. De même X est holomorphe et nulle pour $t=0$, $\varpi=\varpi_0$; il suit de là [voir page 303] que les fonctions uniformes x, y, z de

(t, ϖ), qui ont une branche au moins holomorphe pour $t = 0$, $\varpi = \varpi_0$, sont holomorphes pour $t = 0$; ce sont donc des fonctions méromorphes de t, ϖ. C.Q.F.D.

Admettons maintenant que $d_0(y)$ se réduise à une constante (qu'on peut supposer nulle, en augmentant ϖ, d'une constante convenable). Les égalités (b) où $d_0 = 0$, nous montrent que pour $y = y_0$, X tendant vers zéro arbitrairement, t tend vers zéro arbitrairement, et ϖ suivant une loi correspondante; autrement dit, t tendant vers zéro suivant une loi quelconque, on peut faire tendre ϖ vers zéro d'après une loi telle que le point (x, y, z) tende vers le point (a, b, c) ou $(X = 0, y_0)$ de la courbe polaire C.

D'autre part, les fonctions x, y, z de (u, ϖ) admettent un théorème d'addition; d'après cela, si on désigne par (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1), les valeurs de $x(t, \varpi)$, $y(t, \varpi)$, $z(t, \varpi)$, qui correspondent à trois couples de valeurs (t, ϖ), (t_0, ϖ_0), (t_1, ϖ_1) liées par les conditions:

$$(d) \qquad t = t_0 t_1 \quad , \quad \varpi = \varpi_0 + \varpi_1 \; ;$$

les valeurs x, y, z s'expriment rationnellement en (x_0, y_0, z_0), et (x_1, y_1, z_1):

$$x = L(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1), \quad y = M(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1), \quad z = N(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1).$$

Cela étant, montrons, en raisonnant comme à la page 304, que pour $\varpi = h$, le point (x, y, z) tend vers un point limite, lorsque t tend vers zéro arbitrairement.

Donnons à t_1 une valeur fixe, à ϖ_1 la valeur h, et soit (a_1, b_1, c_1) le point (x, y, z) correspondant à ces valeurs t_1, h de t, ϖ. Soit maintenant (a_0, b_0, c_0) un point arbitrairement choisi sur la courbe polaire C; et soit enfin a, b, c les valeurs de L, M, N pour:

$$x_0 = a_0 \,, \quad y_0 = b_0 \,, \quad z_0 = c_0 \,, \quad x_1 = a_1 \,, \quad y_1 = b_1 \,, \quad z_1 = c_1 \,.$$

Je dis que le point $[x(t, h), y(t, h), z(t, h)]$, tend vers le point (a, b, c)

quand t tend vers zéro.

Considérons en effet trois systèmes de valeurs (t, w), (t_0, w_0) (t_1, w_1), vérifiant les relations (d), où w, t_1 ont des valeurs numériques $[w = h]$. Si on fait tendre t vers zéro, suivant une certaine loi, $t_0 = \frac{t}{t_1}$ tend vers zéro suivant une loi correspondante, et on peut faire tendre w vers zéro de telle façon que (x_0, y_0, z_0) tende vers (a_0, b_0, c_0); d'après (d), w tend alors vers h, et le point (x_1, y_1, z_1), tend vers (a_1, b_1, c_1); Par suite, le point (x, y, z) tend vers (a, b, c). C.Q.F.D.

Nous avons donc bien montré dans cette première hypothèse que les fonctions x, y, z de t, w sont méromorphes.

2°. — Une au moins des intégrales J_1, K_1 devient infinie, pour $X = 0$, comme $\frac{1}{X^m}$.

Les développements de $\frac{u}{\alpha_0}$ et de $w = v - \frac{u\gamma_0}{\alpha_0}$, sont alors de la forme:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \dfrac{u}{\alpha_0} = \dfrac{\alpha_j(y)}{X^j} + \dfrac{\alpha_{j-1}(y)}{X^{j-1}} + \cdots\cdots + \dfrac{\alpha_1(y)}{X} + \log X + \beta_0(y) + \beta_1(y) X + \cdots, \\ w = \dfrac{\gamma_k(y)}{X^k} + \dfrac{\gamma_{k-1}(y)}{X^{k-1}} + \cdots\cdots + \dfrac{\gamma_1(y)}{X} + \delta_0(y) + \delta_1(y) X + \cdots, \end{cases}$$

un au moins des entiers positifs j, k, n'étant pas nul.

Deux cas sont à distinguer suivant que k est moindre que j, ou au moins égal à j.

Premier cas: $k < j$ — Posons $\frac{u}{\alpha_0} = U^j$, et étudions, pour y constant, la fonction:

$$(b) \qquad U = \frac{1}{X} \sqrt[j]{\alpha_j(y) + \alpha_{j-1}(y) X + \cdots + \alpha_1(y) X^{j-1} + X^j \log X + \beta_0 X^j + \cdots}$$

Posons $X = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, avec $(0 \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{2})$, et soit $\operatorname{Log} X = \log r + i\varphi$. Quand r tend vers zéro, on a d'après (b), [en posant $\frac{U}{\sqrt[j]{\alpha_j(y)}} = U_1 = R(\cos\Phi + i \sin\Phi)$]:

$$R = \frac{1+\varepsilon}{r}, \quad \Phi = \varphi + \eta,$$

ε et η étant réels et tendant vers zéro avec r. Quand, r restant constant, φ croît de 0 à $\frac{5\pi}{2}$, le point U_1 décrit une courbe L dont l'argument Φ varie de η_0 à $5\pi + \eta_1$, (η_0 et η_1 étant très petits

avec r) ; quand r tend vers zéro, cette courbe L s'éloigne à l'infini en balayant tout le domaine du point $U_1 = \infty$. Donc à tout point U_1 voisin de $U_1 = \infty$ correspondent au moins une valeur de X voisine de l'origine et une détermination de $\log X = \log r + i\varphi_1 \left(0 < \varphi < \frac{5\pi}{2}\right)$, telles que l'égalité (b) soit vérifiée. Si U_1 (et par suite U) s'éloigne à l'infini sans tourner autour de l'origine, par exemple si U tend vers l'infini sans franchir la demi-droite λ, Φ varie entre 0 et 2π, φ varie entre des limites peu différentes ; le point X tend vers zéro, son argument variant entre 0 et $\frac{5\pi}{2}$.

D'autre part, quand X tend vers zéro sans que $|\varphi|$ croisse indéfiniment ; U devient infini comme $\frac{1}{X}$ et par suite $\frac{\log X}{U^m}$ tend vers zéro (m étant un entier positif quelconque) Si donc U tend vers l'infini suivant un chemin qui ne traverse pas λ [ou qui coïncide avec λ], une branche $X(U, y)$ définie par (b) tend vers zéro de telle façon que $\frac{\log X}{U^m}$ tende vers zéro

Ce point admis, si dans ϖ on remplace X par cette fonction $X(U, y)$, je dis que la branche correspondante de la fonction $\varpi(U, y)$ est dans le domaine de $U = \infty$ de la forme :

$$(c) \qquad \varpi = A_k U^k + A_{k-1} U^{k-1} + \dots + A_1 U + A_0 + \varepsilon,$$

les A étant des fonctions de y holomorphes pour $y = y_0$, et ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{U}$.

En effet, si nous posons : $\frac{u}{\alpha_0} - \log X = \theta^\delta$, les développements ($\alpha$) donnent aussitôt :

$$\varpi = A_k(y)\,\theta^k + A_{k-1}(y)\,\theta^{k-1} + \dots + A_1(y)\theta + A_0(y) + \frac{B_1(y)}{\theta} + \dots$$

Or on a :

$$\theta^l = \left[\frac{u}{\alpha_0} - \log X\right]^{\frac{l}{\delta}} = \left(\frac{u}{\alpha_0}\right)^{\frac{l}{\delta}} \left[1 - \frac{\alpha_0}{u} \log X\right]^{\frac{l}{\delta}} = U^l \left[1 - \frac{\log X}{U^\delta}\right]^{\frac{l}{\delta}}$$

$$= U^l \left[1 - \frac{\log X}{U^\delta}\left(\frac{l}{\delta} + \eta\right)\right].$$

η tendant vers zéro avec $\frac{\log X}{U^\delta}$ et par suite tendant vers zéro quand U s'éloigne à l'infini (sans traverser le chemin λ).

En particulier pour $l \leq k < j$, ceci peut s'écrire

$$A^l = U^l - \frac{\log X}{U^l(j-l)}\left[\frac{l}{j} + \eta\right] = U^l + \eta_1 ,$$

η_1 tendant vers zéro quand U s'éloigne à l'infini (sans franchir λ); il suit de là que ϖ est bien de la forme :

$$(c) \qquad \varpi = A_k U^k + \dots\dots + A_1 U + A_0 + \varepsilon ,$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{U}$ et le développement (c) valant pour le domaine de $U = \infty$ (traversé par la coupure λ).

Deux hypothèses sont alors possibles suivant que, dans (c), tous les coëfficients A sont des constantes ou non.

1° — Supposons d'abord que tous les coëfficients A soient des constantes.

Nous posons :

$$\varpi = A_k U^k + \dots + A_1 U + A_0 + V = P[U] + V,$$

Quand, pour $y = y_0$, U tend vers l'infini sur un chemin quelconque (qui ne franchit pas λ), x et V tendent vers zéro. Autrement dit, U tendant vers l'infini sur un chemin quelconque (qui ne franchit pas λ), on peut faire tendre V vers zéro suivant une loi telle que le point $[x(U,V),\ y(U,V),\ z(U,V)]$ tende vers le point (a, b, c) arbitrairement choisi sur la courbe polaire C.

Il suffit dès lors de raisonner identiquement comme à la page 304. Les fonctions x, y, z de u, ϖ admettant un théorème d'addition, si on appelle $(x, y, z), (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)$ les valeurs des fonctions x, y, z de (U, V) qui correspondent à trois couples de valeurs (U,V) (U_0, V_0), (U_1, V_1) liées par les conditions :

$$U^j = U_0^j + U_1^j, \qquad V = -P(U) + P(U_0) + P(U_1) + V_0 + V_1 .$$

les valeurs (x, y, z) s'expriment rationnellement en fonction de (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1). Il suit de là que les fonctions

méromorphes (x, y, z) de (U, V) sont rationnelles en U. La surface possède une famille d'unicursales $V = V_0$. C.Q.F.D.

2° — Admettons maintenant que tous les A_i ne soient pas des constantes et soit A_l le premier des coëfficients $A_j, \ldots A_0$ qui dépend effectivement de y, $[l \leqslant k]$. Je pose alors:

$$\varpi = A_k U^k + \ldots A_{l+1} U^{l+1} + U^l V.$$

L'égalité (c) devient:

$$(d) \qquad V = A_l(y) + \frac{A_{l-1}(y)}{U} + \ldots \ldots$$

Donnons à U une valeur $\bar{U}$ de grand module, $[|\bar{U}| > R]$; la fonction $V(y, \bar{U})$ définie par (d) est holomorphe pour $y = y_0$, si l'on veut holomorphe dans un cercle Γ de centre y_0 et de rayon fixe suffisamment petit. Soit $V_0 = A_l(y_0)$: il est aisé de voir que pour $U = \bar{U}$, $V = V_0$ l'équation (d) en y admet une racine voisine de y_0.

En effet, quand y varie à l'intérieur de Γ, le point $V(y, \bar{U})$ varie dans un certain domaine fermé D dont le contour C correspond à la circonférence Γ du plan des y; quand $\frac{1}{U}$ tend vers zéro, C varie d'une façon continue avec $\frac{1}{U}$ et tend vers C_0, contour que parcourt le point $A_l(y)$ quand y parcourt la circonférence Γ. Comme C_0 renferme à son intérieur V_0, il en est de même des contours C voisins de C_0. Autrement dit, on peut décrire du point V_0, comme centre un cercle Δ de rayon assez petit pour que le point $V(y, \bar{U})$ coïncide avec tout point intérieur à Δ pour des valeurs de y intérieures à Γ - et cela quelle que soit la valeur fixe $\bar{U}$, pourvu seulement que $|\bar{U}|$ soit supérieur à une certaine limite ρ — Il suit de là que pour $U = \bar{U}$, $V = V_0$, $[|\bar{U}| > \rho]$ l'égalité (d) en y admet une racine voisine de y_0, $[|y - y_0| < r]$.

D'autre part, la fonction $y(U, V)$ qui est méromorphe, doit coïncider avec cette racine ; si donc U tend vers l'infini d'une façon quelconque, $y(U, V_0)$ tend vers y_0. La fonction $y(U, V)$ est donc rationnelle en U.

De plus, l'égalité (b) où on remplace y en U, V, donne :

$$U^j = \frac{\alpha_j(y)}{X^j} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_1(y)}{X} + \log X + \beta_0(y) + \beta_1(y) X + \ldots\ldots$$

$$= \frac{C_j(U,V)}{X^j} + \ldots + \frac{C_1(U,V)}{X} + \log X + D_0(U,V) + D_1(U,V) + \ldots\ldots$$

les C_i, D_i étant holomorphes pour $U = \infty$, $V = V_0$ et égaux respectivement pour ces valeurs à $\alpha_i(y_0)$, $\beta_i(y_0)$. Si nous posons $U = \frac{1}{U'}$, $X^j \log X = \xi$, cette égalité peut s'écrire :

$$(e) \qquad U' = X\left[\lambda(U', V) + \mu(U', V) X + \nu(U', V)\xi + \ldots\ldots\right] ;$$

quand on regarde X et ξ comme deux variables indépendantes, le second membre de (e) est une fonction holomorphe de X, ξ, U' pour $X = 0$, $\xi = 0$, $U' = 0$, [V ayant reçu une valeur arbitraire V_0], et $\lambda(U', V_0)$ n'est pas nul. Si nous résolvons l'équation (e) par rapport à U', il vient :

$$(f) \qquad U = \frac{1}{U'} = \frac{1}{X}\left[G(V) + H(V) X + I(V)\xi + \ldots\ldots\right],$$

et quand on remplace, dans (f), ξ par $X^j \log X$, on voit que U se laisse mettre sous la forme :

$$U = \frac{1}{X}\left[G(V) + \varepsilon\right],$$

ε tendant vers zéro quand X tend vers zéro (sans tourner indéfiniment autour de l'origine) Il suit de là que quand X tend vers zéro, les valeurs de $U(X, V_0)$ épuisent tous les points[1] du domaine à l'infini du plan des U. Pour

[1] Posons en effet : $\frac{U}{G(V_0)} = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$, $X = r(\cos\theta + i\sin\theta)$;

toute valeur de U suffisamment grande $[|U| > R]$, l'égalité (f)(où V a reçu une valeur numérique V_0) admet au moins une racine X voisine de zéro. La détermination unique de la fonction méromorphe $x(U,V) = g(y) - X^{\nu}$ reste donc, pour $V = V_0$ et $|U| > R$, voisine de la valeur $g(y_0)$; le point $U = \infty$ n'est pas un point essentiel de $x(U,V)$, qui par suite est rationnelle en U. La même conclusion s'applique à la fonction méromorphe $z(U,V)$ qui s'exprime algébriquement en $x; y$. Les lignes $V = V_0$ de S sont donc des unicursales

Deuxième cas : $k \geq j$. – Si je pose $\varpi = V^k$ et si je tire X de la seconde équation (α) pour porter dans la première, j'ai :

$$X = \frac{1}{V}\left[\lambda(y) + V\mu(y) + \cdots\right],$$

et
$$\frac{u}{\alpha_0} = A_j(y)\,V^j + \cdots + A_1(y)\,V - \log V + B_0(y) + \frac{B_1(y)}{V} + \cdots$$

les $A(y)$, $B(y)$ étant holomorphes pour $y = y_0$.

1° – Admettons d'abord que $A_j, \ldots A_1$ ne soient pas tous constants, et soit A_l le premier de ces coëfficients qui dépende de y. Je pose :

$$\frac{u}{\alpha_0} = A_j V^j + \cdots + A_{l+1} V^{l+1} + U V^l, \quad (j \geq l \geq 1),$$

d'où
$$UV^l = -\log V + A_l V^l + \cdots + A_1 V + A_0 + \frac{B_1}{V} + \cdots\cdots ;$$

soit :
$$V = \frac{1}{V_1}, \quad \frac{\log V}{V^l} = \xi \quad ; \text{ on a :}$$

$$U = A_l(y) - \xi + C(y)V_1 + \cdots \quad ;$$

---

on a : $R = \frac{1+\eta}{r}$, $\Theta = \theta + \alpha$, η et α étant des quantités réelles qui tendent vers zéro avec r. Faisons varier θ de 0 à $\frac{5\pi}{2}$, r ayant reçu une valeur très petite; R est très grand, et Θ varie entre une quantité très petite et une quantité voisine de $\frac{5\pi}{2}$, donc entre β et $2\pi + \beta$. Soit L le chemin ainsi parcouru par le point $U_1 = \frac{U}{G(V_0)}$ Quand r tend vers zéro, L s'éloigne à l'infini balayant tout le domaine à l'infini du plan des U_1. Les positions correspondantes de U épuisent tous les points du domaine $U = \infty$. C. Q. F. D.

le second membre de l'équation précédente où on regarde ξ et V_1 comme deux variables indépendantes est une fonction de y, ξ, V_1, holomorphe pour $y = y_0$, $\xi = 0$, $V_1 = 0$, et si U_0 représente la valeur $A_l(y_0)$, $[A'_l(y_0) \neq 0]$; cette équation (pour $U = U_0$) définit une fonction $y(\xi, V_1, U_0)$ qui pour $\xi = 0$, $V_1 = 0$ est holomorphe et égale à y_0. Si on remplace ξ par $-V_1^l \log V_1$, on voit que la fonction uniforme $y(U_0, V_1)$ tend vers y_0 quand V_1 tend vers zéro (sans tourner indéfiniment autour de l'origine). La fonction méromorphe $y(U_0, V)$ tend donc vers y_0 quand V tend vers l'infini; c'est une fonction rationnelle de V.

D'autre part, la fonction $X = \frac{1}{V}[\lambda(y) + V\mu(y) + \cdots]$ est holomorphe pour $V = \infty$, $y = y_0$; il en est de même de la fonction $x(V,y) = g(y) - X^\nu$; si dans $x(V,y)$ on remplace y en U,V, la branche $x(U,V)$ correspondante est holomorphe pour $U = U_0$, $V = \infty$, et comme la fonction $x(U,V)$ est méromorphe, c'est une fonction rationnelle de V. Il en est de même par suite de $z(U,V)$. Les courbes $U = U_0$, sont unicursales.

2°— Admettons maintenant que tous les coëfficients $A_j \ldots A_1$ soient des constantes, et montrons que, t désignant la variable $e^{\frac{u}{\alpha_0}}$, les fonctions uniformes x, y, z, de (t, V) sont rationnelles dans le domaine de $t = 0$. [V désigne ϖ^k].

On peut toujours supposer $j < k$. En effet, si $j = k$, on a : $\frac{u}{\alpha_0} = A_j \cdot V^j + \ldots\ldots = A_j \varpi + \ldots$, A_j étant une constante. Si on remplace u par $u_1 = u - \alpha_0 A_j \varpi$, u_1 sera infini au plus d'ordre $(j-1)$ pour $X = 0$. D'ailleurs, soit $t_1 = e^{\frac{u_1}{\alpha_0}} = t\, e^{-A_j \varpi}$; il est clair que la proposition en question sera démontrée si la proposition analogue est démontrée pour les fonctions x, y, z de (t_1, V). Il est donc loisible de supposer u remplacé par u_1, c'est à dire :

$$j < k.$$

Posons alors :

$$\frac{u}{\alpha_0} = A_j V^j + \dots\dots + A_1 V + U \equiv P(V) + U,$$

$$\text{et} \quad T = e^U \equiv e^{\frac{u}{\alpha} - P(V)} = t e^{-P(V)}.$$

Il me suffit de démontrer que les fonctions uniformes x, y, z de (T, V) sont rationnelles pour $T = 0$

Nous avons :

$$T = \frac{1}{V} e^{B_0(y) + \frac{B_1(y)}{V} + \dots} = \frac{1}{V} \left[C_0(y) + \frac{C_1(y)}{V} + \dots \right],$$

$C_0(y)$ n'étant pas nul pour $y = y_0$, et

$$T = X \left[D_0(y) + D_1(y) X + \dots\dots \right];$$

soit $W = VT$; on a :

$$W = C_0(y) + E_1(y) X + \dots\dots;$$

quand, pour $y = y_0$, X tend vers zéro arbitrairement, T tend vers zéro arbitrairement et W tend vers $W_0 = C_0(y_0)$ d'après une loi correspondante ; inversement, si on fait tendre T vers zéro suivant une loi quelconque, on peut faire tendre W vers $W_0 = C_0(y_0)$ d'après une loi telle que le point $x(T, W)$, $y(T, W)$, $z(T, W)$ tende vers le point (x_0, y_0, z_0) arbitrairement choisi sur la courbe polaire.

D'autre part, les fonctions uniformes x, y, z de T, W, ne peuvent évidemment avoir d'autres singularités essentielles que $T = 0$, $T = \infty$, $W = \infty$. Si je montre que ce sont des fonctions méromorphes de T, W, les fonctions x, y, z de (T, V), obtenues en remplaçant W par VT, seront aussi méromorphes, la proposition sera démontrée.[1]

---

[1] Quand $C_0(y)$ dépend effectivement de y, l'égalité :

$$W = C_0(y) + E_1(y) X + \dots\dots = C_0(y) + F_1(y) T + \dots\dots$$

montre aussitôt que $y(T, W)$ est rationnelle pour $T = 0$, par suite aussi $X(T, W)$. Le raisonnement qui suit est nécessaire dans le cas où $C_0(y)$ est une constante.

Soit (x, y, z), (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) les valeurs des fonctions (x, y, z) de (u, w) qui correspondent à trois couples de valeurs (u, w), (u_0, w_0), (u_1, w_1) liées par les conditions :

$$u = u_0 + u_1\,, \qquad w = w_0 + w_1 .$$

Les valeurs (x, y, z) sont des fonctions rationnelles L, M, N de (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1). Soit $[T, W]$, $[T_0, W_0]$ les valeurs de $[T, W]$ correspondant à (u, w), (u_0, w_0) ; les valeurs (T, W), (T_0, W_0), (u_1, w_1) sont liées par les relations :

$$(m) \quad \begin{cases} \log T + P\left(\dfrac{W}{T}\right) = \log T_0 + P\left(\dfrac{W_0}{T_0}\right) + u_1\,, \\[2ex] \dfrac{W^K}{T^K} = \dfrac{W_0^{\,K}}{T_0^{\,K}} + w_1 \end{cases}$$

Donnons à W une valeur fixe h ; soit (a_0, b_0, c_0) un point arbitrairement choisi sur la courbe polaire, soit w_1 une valeur numérique, u_1 la valeur $\log \dfrac{h}{C_0(b_0)}$, et (a_1, b_1, c_1) le point (x, y, z) qui correspond à ces valeurs (u_1, w_1) de (u, w). Soit enfin a, b, c, les valeurs de L, M, N pour $x_0 = a_0$, $y_0 = b_0$, $z_0 = c_0$, $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$. — Je dis que quand T tend vers zéro arbitrairement (W étant égal à h), le point $x(T,W)$, $y(T,W)$, $z(T,W)$ tend vers le point (a, b, c).

Soit donc (T, W), (T_0, W_0), (u_1, w_1) trois couples vérifiant les conditions (m) ; donnons à W et à w_1 des valeurs numériques $[W = h]$, et faisons tendre T_0 vers zéro suivant une loi arbitraire, et W_0 vers $C_0(b_0)$ suivant une loi correspondante telle que le point (x_0, y_0, z_0) tende vers (a_0, b_0, c_0). La variable T vérifie la condition :

$$(n) \qquad \frac{h^K}{T^K} = \frac{W_0^K}{T_0^K} + w_1\,,$$

c'est-à-dire :

$$T = \frac{h}{W_0}\, T_0\,(1 + \varepsilon) = \frac{h}{C_0(b_0)}\, T_0\,(1 + \varepsilon')\,;$$

ε et ε' tendant vers zéro avec T_o. Si nous posons :

$$T_o = r_o\,(\cos\theta_o + i\sin\theta_o)\,; \quad T\,\frac{C_o(b_o)}{h} = T' = r\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$

on a :

$$r = r_o\,(1+\eta)\;, \qquad \theta = \theta_o + \alpha\,,$$

η, α étant des quantités réelles, qui tendent vers zéro avec r_o. Quand (pour une petite valeur de r_o) θ_o varie de 0 à $5\frac{\pi}{2}$, le point T' parcourt un chemin l, le long duquel r est très petit (mais différent de zéro) et θ varie de plus de 2π ; [θ prend toutes les valeurs entre β et $2\pi+\beta$]. Si on fait tendre r_o vers zéro, le chemin l tend vers l'origine en balayant tout le domaine du point $T=0$. Il suit de là qu'à toute valeur de T voisine de l'origine, correspondent des valeurs T_o, W_o, vérifiant (n) et pour lesquelles le point (x_o, y_o, z_o) est voisin de (a_o, b_o, c_o).

D'autre part, donnons à u_1 la valeur :

$$u_1 = \log\frac{T}{T_o} + P\left(\frac{h}{T}\right) - P\left(\frac{W_o}{T_o}\right)\;;$$

$$\frac{T}{T_o}\text{ tend vers }\frac{h}{C_o(b_o)}\;;\; P\left(\frac{h}{T}\right) - P\left(\frac{W_o}{T_o}\right) = \sum_{l=1}^{l=j} A_l\left[\frac{h^l}{T^l} - \frac{W_o^l}{T_o^l}\right]$$

tend vers zéro (1) parceque j est moindre que k ; u_1 tend donc vers $\log\frac{h}{C_o(b_o)}$.

En définitive, W et W_1 ayant reçu des valeurs numériques, [$W=h$], et T tendant vers zéro arbitrairement, il existe des valeurs (T_o, W_o), (u_1, ϖ_1) vérifiant (m), telles que (x_o, y_o, z_o) tende vers (a_o, b_o, c_o), et que u_1 tende vers $\log\frac{h}{C_o(b_o)}$

Le point x, y, z tend donc vers le point (a, b, c)

Les fonctions $x\,(T,W)$, $y\,(T,W)$, $z\,(T,W)$, sont méromorphes, et par suite, les fonctions $x\,(t,V)$, $y\,(t,V)$, $z\,(t,V)$. Si on remplace V par $\varpi^{\frac{1}{k}}$, les fonctions x, y, z de (t, ϖ), n'ont d'autres singularités essentielles que $t=\infty$, $\varpi=\infty$, et comme elles sont uniformes elles sont aussi méromorphes

---

(1) On a : $\left(\frac{h}{T}\right)^l = \left(\frac{W_o}{T_o}\right)^l\left[1+\frac{l}{k}\,\varpi_1\,\frac{T_o^k}{W_o^k}\,(1+\varepsilon)\right]$, ε tendant vers zéro avec T_o d'où $\left(\frac{h}{T}\right)^l - \left(\frac{W_o}{T_o}\right)^l = \frac{l}{k}\,\varpi_1\left(\frac{T_o}{W_o}\right)^{k-l}(1+\varepsilon) = \eta$, η tendant vers 0 avec T_o si $l<k$.

Il est facile de compléter ce résultat en montrant que ce dernier cas 2° ne peut se présenter que si K n'a pas de périodes.

Soit en effet $\omega'=1$ une période de K, et soit ω la période correspondante de J. Les fonctions x, y, z de T, V ne changent pas de valeurs quand on remplace T_0, V_0 par des valeurs T, V satisfaisant aux conditions

$$\log T + P(V) = \log T_0 + P(V_0) + n\omega,$$
$$V^K = V_0^K + n\omega',$$

n désignant un entier quelconque positif ou négatif.

Si la partie réelle de ω est positive (ou négative), la partie réelle de $\log T$ tend vers $-\infty$ comme n (ou comme $-n$) quand l'entier n décroît (ou croît) indéfiniment. Si la partie réelle de ω est nulle, mais si j est différent de zéro, la partie réelle de $\log T$ tend vers $-\infty$ comme $\sqrt[\frac{k}{j}]{|n|}$, quand n croît indéfiniment en valeur absolue avec un signe convenable. Considérons en effet, dans le plan complexe, le polygone régulier formé par les points $A_j\, e^{2il\pi\frac{j}{k}}$, $\left[\frac{j}{k} < 1\right]$; un au moins de ces points a une abcisse négative, à moins qu'ils ne réduisent aux points $+i, -i$: dans le premier cas, quand n tend vers $+\infty$ dans le second cas quand n tend vers $-\infty$, la partie réelle de $\log T$ tend vers $-\infty$ comme $\sqrt[\frac{k}{j}]{|n|}$. Dans ces conditions, T tend donc vers zéro comme $e^{-\mu |n|^{\frac{j}{k}}}$, μ désignant une certaine quantité positive, et comme V tend vers l'infini comme $n^{\frac{1}{k}}$, si on pose $W=TV$, W tend vers zéro quand n tend vers ∞ (avec un certain signe.)

Soit (x_0, y_0, z_0) un point arbitrairement choisi sur S et (T_0, W_0) les valeurs de (T, W) correspondantes : il existe d'après ce qui précède une infinité de valeurs (T, W) qui tendent vers zéro et pour lesquelles le point (x, y, z) coïncide avec (x_0, y_0, z_0),

ce qui est absurde, puisque les fonctions x, y, z de (T, W) sont méromorphes [1].

Le raisonnement précédent est en défaut si j est nul. Dans ce cas posons $\theta = e^{2i\pi v}$; x, y, z sont des fonctions uniformes de t, θ (dont les seules singularités essentielles possibles sont $t = \infty$, $\theta = \infty$, $\theta = 0$). Nous avons:

$$t = X\left[1 + \alpha(y)X + \beta(y)X + \ldots\right],$$
$$\theta = e^{\frac{2i\pi\gamma_k(y)}{X^k}}\left[1 + \Gamma(y)X + \ldots\right];$$

pour $y = y_0$, on peut donner à X des valeurs $X_1, \ldots X_n, \ldots$ tendant vers zéro et telles que θ tende vers une valeur arbitraire θ_0; t tendra vers zéro; or soit b la valeur $y(0, \theta_0)$ de la fonction $y(t, \theta)$; il existe des valeurs de t, θ qui tendent vers $(0, \theta_0)$ et pour lesquelles y garde la valeur y_0 arbitrairement choisie ($y_0 \neq b$); ce qui est absurde.

Le cas 2° de la page 316 ne peut donc se présenter que si l'intégrale K est sans périodes, c'est-à-dire est une fonction algébrique de x, y.

Dans cette dernière hypothèse il est bien

---

[1] La chose est évidemment absurde si pour $T = 0$, $W = 0$, une au moins des trois fonctions méromorphes x, y, z prend une valeur déterminée (qui peut être infinie). Sinon, les trois fonctions sont, pour $T = 0$, $W = 0$, de la forme $\frac{0}{0}$, soit:

$$x = \frac{aT + a_1 W + \ldots}{a'T + a'W + \ldots}, \qquad y = \frac{bT + b_1 W + \ldots}{b'T + b'_1 W + \ldots};$$

si on tire de la première égalité la valeur de W (nulle pour $T = 0$) en fonction de T, pour porter dans la seconde, y devient une fonction $G(T, x)$ algébroïde pour $T = 0$, $x = x_0$, et quand (T, W) tendent vers zéro de façon que x tende vers x_0, y tend vers certaines valeurs particulières b (en nombre fini).

aisé de voir directement que les fonctions x, y, z de (t, w) sont rationnelles en t.

Si en effet, dans l'égalité $u = J$, on remplace y en fonction algébrique de x, w, il vient :

$$u = \int P_1(x, w)\, dx + Q_1(x, w)\, dw ;$$

pour $w = w_0$, la fonction $x(u, w_0)$ vérifie donc l'équation différentielle : $\frac{dx}{du} = P_1(x, w_0)$, et c'est par suite une fonction rationnelle ou de u ou de $e^{\lambda u}$, ou de $[\wp(u), \wp'(u)]$; mais nous savons que c'est une fonction méromorphe de $t = e^u$; c'est donc une fonction rationnelle de t. Les courbes $w = w_0$ sont ici des unicursales de S.

En définitive, les résultats de toute la discussion précédente (pages 306 - 320) se résument ainsi :

Ou bien il existe sur S une famille d'unicursales ; ou bien les intégrales J, K ne peuvent devenir infinies le long des courbes polaires que logarithmiquement et si α_0, γ_0 sont les résidus d'une branche J_1, K_1 pour une courbe polaire $C_1 [\alpha_0 \neq 0]$, les fonctions x, y, z de $\left(t = e^{\frac{u}{\alpha_0}}, w = v - \frac{\gamma_0 u}{\alpha_0}\right)$ sont méromorphes.

Il est facile maintenant de montrer que dans la seconde hypothèse, S possède encore une famille d'unicursales.

Soit C une courbe logarithmique ; il nous est loisible d'admettre que ses résidus sont $\alpha_0 = 1$, $\gamma_0 = 0$. Les fonctions x, y, z de $(t = e^u, v)$ sont méromorphes. Deux cas sont à distinguer suivant que K est ou non dépourvue de courbes logarithmiques.

Supposons d'abord que K ne présente pas de courbes logarithmiques. Considérons (pour une valeur quelconque $\bar{y}$ donnée à y) tous les résidus de l'intégrale $J(x, \bar{y})$. Puisque la somme de ces résidus est nulle, il en existe un au moins dont la partie réelle est négative ; soit $\alpha = \frac{1}{-\alpha' + i\alpha''}$, $[\alpha' > 0]$. Si on pose $t_1 = e^{\frac{u}{\alpha}} = t^{-\alpha' + i\alpha''}$, les fonctions x, y, z de (t_1, v) sont méromorphes ; donc, pour $v = v_0$, le point $x(t_1, v_0), y(t_1, v_0)\, z(t_1, v_0)$ tend vers un point

déterminé (x_0, y_0, z_0) quand t tend vers zéro arbitrairement. Mais d'autre part, soit $t = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; l'égalité:

$$t_1 = t^{-\alpha' + i\alpha''} = e^{-\alpha'\log r - \alpha''\varphi + i[\alpha''\log\varphi - \alpha'\varphi]}$$

montre que, t tendant vers l'infini dans une direction quelconque, t_1 tend vers zéro; donc le point $x(t, v_0)$, $y(t, v_0)$, $z(t, v_0)$ tend vers (x_0, y_0, z_0) quand t tend vers l'infini; les fonctions (x, y, z) de (t, v) sont rationnelles en t: les courbes $v = v_0$ sont unicursales.

Si K présente des courbes logarithmiques, nous pouvons toujours admettre qu'un résidu de K est égal à 1, et que le résidu correspondant de J est nul. Nous avons alors les deux systèmes de résidus:

J	1	0
K	0	1 .

Si nous posons $t = e^u$, $\theta = e^v$, les fonctions uniformes x, y, z de (t, θ) sont méromorphes: en effet, les fonctions x, y, z, de (t, v) sont méromorphes; les fonctions x, y, z de (t, θ) ne peuvent donc avoir d'autres singularités essentielles que $t = \infty$, $\theta = \infty$, $\theta = 0$: mais (pour $u = u_0$) les fonctions x, y, z de (u, θ) sont méromorphes en θ; donc les fonctions x, y, z de (t, θ) sont (pour $t = e^{u_0}$) méromorphes en θ.

Ce point établi, montrons que toutes les périodes ω, ω' de J, K sont commensurables avec $2i\pi$; par exemple que ω est de la forme $2i\pi\frac{\mu}{\nu}$, (μ, ν étant deux entiers). Quand on change (t, θ) en $\left(te^{\pm n\omega}, \theta e^{\pm n\omega'}\right)$, n étant un entier, les fonctions $x = \varphi(t, \theta)$, $y = \psi(t, \theta)$, $z = \chi(t, \theta)$ ne changent pas de valeur. Faisons en particulier $\theta = 0$; les fonctions $\varphi(t, 0)$, $\psi(t, 0)$, $\chi(t, 0)$ ou bien sont des constantes absolues (qui peuvent être infinies), ou bien sont des fonctions méromorphes qui ne changent pas quand on change t en $C^n t$, $[C = e^{\pm\omega}, |C| \leq 1]$: les égalités

$$\varphi(t,0) = \varphi(t_0,0),\ \psi(t_0,0),\ \chi(t,0) = \chi(t_0,0)$$

admettent donc toutes les racines $t = t_n \equiv C^n t_0$, qui sont distinctes si $\frac{\omega}{2i\pi}$ n'est pas réel et commensurable; quand on fait tendre l'entier n vers $+\infty$, $|t_n|$ est au plus égal à $|t_0|$; les égalités précédentes admettent donc une infinité de racines de module moindre que $|t_0|$ ce qui est absurde, puisque les fonctions $\varphi(t,0)$,... sont méromorphes.

La période ω est donc commensurable avec $2i\pi$, à moins que $\varphi(t,0)$, $\psi(t,0)$, $\chi(t,0)$ ne soient des constantes qu'il est loisible de supposer nulles. On a, dans ce cas,

$$(m)\quad \begin{cases} x = \theta^i\left[a_0(t) + a_1(t)\theta + a_2(t)\theta^2 + \dots\right], \\ y = \theta^l\left[b_0(t) + b_1(t)\theta + b_2(t)\theta^2 + \dots\right], \end{cases}$$

les a, b étant des fonctions méromorphes de t, et les développements (m) convergeant dans le domaine de $t = t_0$, $\theta = 0$. Si, posant $\frac{x}{a_0} = \xi^i$, je tire θ de la première équation (m) en fonction de t, [θ s'annulant avec ξ), la seconde devient:

$$y = \xi^l\left[c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + \dots\right] = \frac{c_0}{a_0^{\frac{l}{i}}}x^{\frac{l}{i}} + \frac{c_1}{a_0^{\frac{l+1}{i}}}x^{\frac{l+1}{i}} + \dots;$$

soit $\frac{l+r}{i}$ la première puissance de x dont le coefficient dépende effectivement de t; je substitue à y la variable Y liée algébriquement à x, y par la relation:

$$y = \frac{c_0}{a_0^{\frac{l}{i}}}x^{\frac{l}{i}} + \dots + \frac{c_{r-1}}{a_0^{\frac{l+r-1}{i}}}x^{\frac{l+r-1}{i}} + Y x^{\frac{l+r}{i}};$$

la fonction $Y(t,\theta)$ est une fonction à i valeurs, dont les i valeurs ne changent pas quand on change (t,θ) en $[te^{\pm\omega}, \theta e^{\pm\omega'}]$. En particulier, pour $\theta = 0$, Y est égal à $\frac{c_r}{a_0^{\frac{l+r}{i}}}$; Y^i (pour $\theta = 0$) est une fonction méromorphe de t, $Y^i = \frac{(c_r)^i}{(a_0)^{l+r}}$, qui ne change pas de valeur, quand on change t en $C^n t$, ce qui exige que $\frac{\omega}{2i\pi}$ soit commensurable, $[C = e^{\pm\omega}, |C| < 1]$.

Toutes les périodes (ω, ω') de J, K sont donc

commensurables avec $2i\pi$; en particulier, tous les résidus de J, K sont réels et commensurables. Il est dès lors bien aisé de montrer que les fonctions x, y, z de (t, θ) sont rationnelles en t, θ.

Soit en effet $2i\pi\frac{\mu}{\nu}$ la plus petite période de J et $2i\pi\frac{\mu'}{\nu'}$ la plus petite période de K. Posons:

$$t_1 = t^{\frac{\nu}{\mu}} = e^{\frac{\nu}{\mu}J},$$
$$\theta_1 = \theta^{\frac{\nu'}{\mu'}} = e^{\frac{\nu'}{\mu'}K};$$

t_1, θ_1 sont des fonctions uniformes du point (x, y, z) de S; je dis que ce sont des fonctions rationnelles de (x, y, z). En effet, soit x_0 une valeur arbitraire de x; les fonctions $t_1(x_0, y)$, $\theta_1(x_0, y)$ ne sauraient présenter de singularité transcendante $y = b$ [b pouvant être infinie] que si J ou K devient infinie pour $x = x_0$, $y = b$; mais dans le voisinage de telles valeurs, on a (dans l'hypothèse qui nous occupe)

$$\frac{\nu}{\mu} J = m \log A(x,y) + B(x,y)$$
$$\frac{\nu'}{\mu'} K = m' \log A(x,y) + C(x,y);$$

A, B, C sont des fonctions algébroïdes de x, y, dans le voisinage de $x = x_0$, $y = b$, qui restent finies pour $x = x_0$, $y = b$, $[A(x_0, b) = 0]$; m et m' sont des entiers positifs ou négatifs. Il suit de là que t_1, θ_1 sont des fonctions algébroïdes de x, y pour $x = x_0, y = b$; ce sont donc des fonctions rationnelles de x, y, z.

Inversement, les fonctions uniformes (x, y, z) de (t_1, θ_1) sont rationnelles. La surface S correspond birationnellement au plan.

Ainsi se trouve établi dans tous les cas notre lemme fondamental:

La surface S possède une famille d'unicursales.

Ce lemme va nous permettre de nous rendre compte bien aisément de la nature des fonctions x, y, z de u, v.

La surface S possède une famille d'unicursales d'un certain degré n, dépendant au moins d'un paramètre. Écrivons les équations;

$$(\Gamma) \qquad x = \frac{M(t)}{N(t)}, \quad y = \frac{M_1(t)}{N(t)}, \quad z = \frac{M_2(t)}{N(t)},$$

où N, M, M_1, M_2, sont des polynômes en t de degré n, à coëfficients indéterminés. Exprimons que la courbe (Γ) appartient à S, c'est-à-dire que si on remplace x, y, z en fonction de t dans $S(x, y, z)$, le résultat est identiquement nul: on forme ainsi un système de conditions algébriques et homogènes assujettissant les coëfficients de N, M, M_1, M_2, et ces conditions permettent de se donner arbitrairement au moins deux de ces coëfficients: on pourra donc prendre arbitrairement les rapports $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_i$ de $(i+1)$ de ces coëfficients, et les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ qui définissent l'unicursale (Γ) dépendront algébriquement de $\lambda_1 \ldots \lambda_i$, $[i \geq 1]$.[1]

Ces remarques faites, distinguons deux cas, suivant qu'il passe par un point arbitraire (x, y, z) de S une seule courbe Γ ou qu'il en passe plus d'une.

Plaçons-nous d'abord dans le second cas: nous pouvons trouver deux fonctions algébriques (mais point nécessairement rationnelles):

$$\alpha = g(x, y, z) \quad , \quad \beta = h(x, y, z)$$

telles que la ligne $g(x, y, z) = g(x_0, y_0, z_0)$ et la ligne $h(x, y, z) = h(x_0, y_0, z_0)$ de S soient deux unicursales distinctes passant par le point (x_0, y_0, z_0) de S. Inversement, x, y, z s'expriment en fonction algébrique de α, β, et les coordonnées

---

[1] Si les conditions algébriques en question se décomposent en plusieurs systèmes distincts, il existe sur S plusieurs familles d'unicursales (Γ) dépendant de $i, i' \ldots\ldots$ paramètres algébriques

curvilignes $\alpha = C^{te}$, $\beta = C^{te}$ sont des unicursales de S. — Si on exprime x, y, z en fonction de α, β dans J, J devient :

$$J = \int \Pi(\alpha, \beta)\, d\alpha + \mathcal{K}(\alpha, \beta)\, d\beta,$$

Π et $\mathcal{K}$ étant algébriques en α, β. D'autre part, pour $\beta = \beta_0$ l'intégrale J est une intégrale abélienne $j = \int P dx + Q dy$ attachée à l'unicursale (Γ) (ou $\beta = \beta_0$) de S ; on peut faire un changement algébrique de variables $\alpha = \lambda(t, \beta_0)$ tel que les coordonnées x, y, z de (Γ) soient rationnelles en t, et on a par suite :

$$j = J(\alpha, \beta_0) = \int R(t, \beta_0)\, dt = A(t, \beta_0) + r_1 \log B_1(t, \beta_0) + \dots + r_k \log B_k(t, \beta_0) + F(\beta_0)$$

A et les B étant rationnels en t, algébriques en β_0 et les r ayant des valeurs numériques ; d'où :

$$J(\alpha, \beta_0) = A(\alpha, \beta_0) + \sum_{j=1}^{j=k} r_j \log B_j(\alpha, \beta_0) + F(\beta_0),$$

A et les B étants algébriques en α, β_0, et comme on peut dans le raisonnement précédent permuter α, β, il vient en définitive

$$J(\alpha, \beta) = A(\alpha, \beta) + \sum r \log B(\alpha, \beta) + F(\beta) \equiv C(\alpha, \beta) + \sum s \log B(\alpha, \beta) + \Phi(\alpha),$$

les A, B, C, D étant algébriques en α, β, les r, s étant numériques, et F, Φ étant des fonctions de β et de α respectivement ; si on donne à α une valeur numérique (soit $\alpha = 0$), on voit que $F(\beta)$ est de la forme : $F = c(\beta) + \sum \rho\, C(\beta)$, c et les C étant algébriques en β et les ρ étant numériques. On a donc :

$$J(\alpha, \beta) = A(\alpha, \beta) + \sum r \log B(\alpha, \beta),$$

A et les B étant algébriques en α, β, les r étant numériques ; et comme α, β sont algébriques en x, y on a aussi :

$$J(x, y, z) = A(x, y) + \sum r \log B(x, y);$$

les r ont des valeurs numériques irréductibles, c'est-à-dire entre lesquelles n'existe aucune relation linéaire et homogène à coëfficients entiers, A et les B sont algébriques en x, y, et rationnels en x, y, z.[1]

[1] Soit en effet $A(x, y, z)$ et $A_1(x, y, z)$. $B(x, y, z)$ et $B_1(x, y, z)$

Ce point établi, supposons d'abord que J, K ne présentent pas de courbes logarithmiques. Les fonction J, K de (x,y,z) sont alors rationnelles en (x, y, z); inversement x, y, z sont rationnels en u, v.

S'il existe des courbes logarithmiques, mettons J sous la forme

$$J = A(x,y,z) + \sum r \log B(x,y,z),$$

les résidus r étant irréductibles. Soit x_0, y_0, z_0 les valeurs pour $u=0, v=0$ des fonctions x, y, z de (u,v): nous savons que x, y, z sont des fractions rationnelles de x_0, y_0, z_0 et vérifient (pour u quelconque) la relation:

---

deux déterminations distinctes des fonctions A, B correspondant au même point (x, y, z) de S. On a nécessairement:

$$(m) \qquad A(x,y,z) - A_1(x,y,z) = \sum r \log \frac{B_1(x,y,z)}{B(x,y,z)} + \omega,$$

ω désignant une période de J. Cette identité n'est possible que si les deux membres de (m) se réduisent à une constante, ce qui exige que tous les rapports $\frac{B}{B_1}$ soient des constantes, car (les r étant irréductibles) si la fonction algébrique $\frac{B}{B_1}$ devient infinie le long d'une certaine courbe C, le résidu total de cette courbe C [qui peut être une courbe singulière pour d'autres termes logarithmiques de (m)] est sûrement différent de zéro. Donc le rapport $\frac{B}{B_1}$ est constant, et égal par suite à une racine ν^e de l'unité puisque, $\frac{B}{B_1}$ est algébrique; en remplaçant B par B^ν on change r en $\frac{r}{\nu}$, et la nouvelle fonction B est rationnelle en x, y, z. D'autre part, $A - A_1$ doit être une constante, et comme A est algébrique, cette constante est nulle, A est donc rationnel en x, y, z, C. Q. F. D.

$$u = J(x,y,z) - J(x_0,y_0,z_0) = A(x,y,z) - A(x_0,y_0,z_0) + \sum r \log \frac{B(x,y,z)}{B(x_0,y_0,z_0)};$$

quand on remplace x, y, z en x_0, y_0, z_0, $A(x,y,z)$ et les $B(x,y,z)$ deviennent des fonctions rationnelles $A_0(x_0,y_0,z_0)$, $B_0(x_0,y_0,z_0)$ (qui dependent de u, v), et on doit avoir:

$$A_0(x_0,y_0,z_0) - A(x_0,y_0,z_0) \equiv -\sum r \log \frac{B_0(x_0,y_0,z_0)}{B(x_0,y_0,z_0)} + u;$$

ceci n'est possible que si les deux membres sont indépendants de (x_0,y_0,z_0) et par suite si $A_0(x_0,y_0,z_0) - A(x_0,y_0,z_0)$ et les $\frac{B_0(x_0,y_0,z_0)}{B(x_0,y_0,z_0)}$ (1) se réduisent à de simples fonctions de u, v. Les fonctions x, y, z) de (u,v) vérifient donc les relations:

$$(a) \quad A(x,y,z) = \varphi(u,v) + A(x_0,y_0,z_0), \quad B_j(x,y,z) = \psi_j(u,v) B_j(x_0,y_0,z_0), \ (j=1,\dots k),$$

les φ, ψ_j désignant certaines fonctions de u, v. — Pour les mêmes raisons, $K(x, y\ z)$ étant de la forme:

$$K(x,y,z) = C(x,y,z) + \sum s \log D(x,y,z), \text{ on a:}$$

$$(b) \quad C(x,y,z) = \chi(u,v) + C(x_0,y_0,z_0), \ D_i(x,y,z) = \varpi_i(u,v) D_i(x_0,y_0,z_0), \quad (i=1,2,\dots l).$$

Parmi les relations (a), (b), il en existe deux au moins qui (jointes à $S=0$) sont résolubles par rapport à x, y, z; autrement les fonctions A, B_j, C, D_i du point (x,y,z) de S seraient fonctions d'une d'entre elles, par suite les deux intégrales J, K, ce qui est contre l'hypothèse. On peut donc exprimer x, y en fonction algébrique de deux variables X, Y (2) telles que les fonctions $X(u+a, v+b)$, $Y(u+a, v+b)$ vérifient un des trois systèmes d'équations suivants

1° $\quad X = X_0 \varphi(u,v), \qquad Y = Y_0 \Psi(u,v)$.

2° $\quad X = X_0 + \varphi(u,v), \qquad Y = Y_0 \Psi(u,v)$,

3° $\quad X = X_0 + \varphi(u,v), \qquad Y = Y_0 + \Psi(u,v)$.

(1°) - Voir la note précédente.

(2°) - X et Y sont deux des fonctions rationnelles A, B_j, C, D_i de (x,y,z).

D'autre part, pour qu'une relation $f(X, Y, u, v) = C^{te}$ soit une intégrale première du système :

$$du = P(X, Y)\, dX + Q(X, Y)\, dY, \qquad dv = P_1(X, Y)\, dX + Q_1(X, Y)\, dY,$$

il faut et il suffit qu'on ait identiquement.

$$(c) \quad \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial u} P + \frac{\partial f}{\partial v} P_1 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial u} Q + \frac{\partial f}{\partial v} Q_1 = 0.$$

Dans le cas 1° il existe une intégrale première de la forme : $\log X - \log \varphi(u, v) = C^{te}$, et les identités (c) donnent, en posant $\varphi_1 = \log \varphi(u, v)$:

$$(d) \qquad \frac{1}{X} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} P + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} P_1, \qquad 0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} Q + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} Q_1 ;$$

le système (d) est résoluble par rapport à $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}$ et donne ces quantités en fonction de X, Y ; mais comme elles ne peuvent dépendre que de u, v, elles se réduisent nécessairement à des constantes a, b, en sorte qu'on a : $\varphi(u, v) = e^{au + bv}$. Pour la même raison, dans le cas 1° on a : $\psi = e^{cu + dv}$, et le déterminant $ad - bc$ est différent de zéro, car autrement X et Y seraient fonctions d'une seule variable $au + bv$. On voit ainsi que, dans le cas 1°, moyennant un changement linéaire effectué sur u, v, X et Y sont égaux respectivement à $X_0 e^u$, $Y_0 e^v$.

Dans le cas 2°, il est clair qu'on a encore : $\psi(u, v) = e^{cu + dv}$; d'autre part, l'intégrale première $X_0 = X - \varphi(u, v)$ vérifie les conditions :

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} P + \frac{\partial \varphi}{\partial v} P_1, \qquad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} Q + \frac{\partial \varphi}{\partial v} Q_1,$$

qui montrent que $\varphi(u, v)$ est égal à $au + bv$, en sorte que (moyennant un changement linéaire effectué sur u, v), X est égal à $u + X_0$, et Y à $e^v Y_0$.

Enfin, dans le cas 3°, X et Y se réduisent à $au + bv + X_0$, $cu + dv + Y_0$; ce cas ne peut se présenter si J, K admettent des courbes logarithmiques.

Il suit de là que les fonctions uniformes x, y, z de (u, v) sont des fonctions algébriques, dans le cas 1° de e^u, e^v dans le cas 2° de u, e^v. Ce sont donc des fonctions rationnelles (1) de $e^{\frac{u}{\lambda}}, e^{\frac{v}{\mu}}$ dans le cas 1°, de $u, e^{\frac{v}{\mu}}$ dans le cas 2°, (λ, μ désignant certains entiers). En définitive, moyennant une transformation linéaire convenable effectuée sur u, v, les fonctions x, y, z sont rationnelles soit en e^u, soit en e^v, soit en u, e^v.

Précisons ce dernier résultat, en montrant que la surface S est uniformément unicursale.

Nous pouvons toujours supposer (moyennant une transformation birationnelle effectuée sur S) que $Y(x, y, z)$ se réduit identiquement à y (voir page 270). Nous avons alors, en posant $\theta = e^v$,

$$x = \varphi(u, \theta), \quad y = \theta^{\mu}, \quad z = \psi(u, \theta),$$

φ et ψ étant rationnels en θ (et en u ou e^u); les courbes $y = y_0$ de S sont unicursales; le groupe de transformations birationnelles qui fait correspondre au point (u, v) de S le point $(u+a, v)$ dépend algébriquement du paramètre a (ou e^a) et conserve chaque courbe $y = y_0$. La surface S (voir page 275) correspond donc birationnellement à un cylindre $H(y, \eta) = 0$ de l'espace $O\xi y\eta$; comme y, η s'expriment rationnellement en θ le genre de la courbe $H = 0$ est nul, et la surface S correspond birationnellement à un plan. Elle est uniformément unicursale.

Exprimons donc x, y, z en fonction rationnelle

---

(1) Si une fonction uniforme $x(u)$ est algébrique en $t = e^u$, c'est une fonction rationnelle de $e^{\frac{u}{\lambda}}$; car la fonction $x(t)$ n'a d'autre point critique (à distance finie) que $t = 0$, et comme elle est algébrique elle est rationnelle en $t^{\frac{1}{\lambda}}$.

de α, β, de telle façon que α, β soient rationnels en (x, y, z), β étant une simple fonction de $\theta = e^v$. Les fonctions α, β de u, v sont uniformes et vérifient deux relations de la forme:[1]

$$u = \log r(\alpha, \beta), \; [\text{ou } u = r(\alpha, \beta)],$$
$$v = \log \rho(\beta),$$

r et ρ étant des fonctions rationnelles. Moyennant une transformation homographique effectuée sur β (et en divisant v, s'il est nécessaire, par un certain entier), il est loisible de réduire la seconde égalité à la suivante:

$$v = \log \beta, \qquad \text{ou } \beta = e^v.$$

Si $u = r(\alpha, \beta)$, r est du premier degré en α, et α est rationnel en u, e^v; les fonctions x, y, z sont alors rationnelles en u, e^v, de telle sorte qu'inversement u, e^v sont rationnels en (x, y, z). Si $u = \log r(\alpha, \beta)$, on peut toujours supposer (en remplaçant u par $\lambda u - \mu v$) que $\beta = 0$ n'est ni un zéro ni un pôle de r; ensuite, en divisant u par un certain entier ν, que tous les résidus de $u = J$ (qui sont entiers) sont premiers entre eux; les intégrales J, K admettent dans ces conditions les couples de périodes $\begin{pmatrix} 2i\pi, & 0 \\ 0, & 2i\pi \end{pmatrix}$, et α, β sont rationnels en e^u, e^v; inversement, $e^u = r(\alpha, \beta)$, $e^v = \beta$.

Les résultats précédents se résument ainsi: Quand il passe par un point quelconque de S plus d'une courbe unicursale Γ, les fonctions x, y, z de u, v (moyennant un changement linéaire convenable effectué sur u, v) sont rationnelles soit en u, v, soit en u, $\theta = e^v$, soit en $t = e^u$, $\theta = e^v$, — et cela de telle façon que u, v, — ou u, θ, — ou t, θ, — soient rationnels en x, y, z.

Supposons maintenant qu'il ne passe par un point de S qu'une seule unicursale Γ et soit $C = \rho(x, y, z)$ l'équation

---

[1] Ceci suppose qu'on a fait sur u, v un changement linéaire convenable

de ce faisceau Γ, ρ désignant une fonction rationnelle de (x, y, z). Il est loisible (moyennant une transformation birationnelle effectuée sur S) de réduire $\rho(x, y, z)$ identiquement à x - Si nous considérons maintenant une quelconque des transformations birationnelles qui conservent S, soit $x = r(X, Y, Z) \equiv \bar{r}(X, Y)$, etc, deux cas sont possibles suivant que $\bar{r}$ dépend effectivement de Y ou non : dans le premier cas, le faisceau d'unicursales $x = c$ se change en un faisceau d'unicursales $\bar{r}(X, Y) = c$, et il passe par un point de S au moins deux unicursales $x = c$, $r(x, y, z) = c'$; on est ramené à la discussion précédente. Le seul cas qui nous intéresse est donc celui où toutes les transformations birationnelles qui conservent S conservent le faisceau $x = c$.

Dans ce cas, si x_0, y_0, z_0 sont les valeurs des fonctions (x, y, z) de (u, v) pour $u = 0, v = 0$, on a :

$$x = r(x_0, u, v),$$

r étant une certaine fonction algébrique de x_0 ; toutes les fonctions $x(u, v) = \varphi(u + a, v + b)$ définies par le système :

$$(1) \qquad du = P dx + Q dy, \qquad dv = P_1 dx + Q_1 dy,$$

coïncident donc avec $r(x_0, u, v)$, où x_0 représente $\varphi(a, b)$:

$$x = r(x_0, u, v) \equiv \varphi(u + a, v + b), \quad [x_0 \equiv \varphi(a, b)].$$

Si on élimine x_0 entre les deux égalités ; $x = r$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial u}$, on forme une certaine relation :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = G(x, u, v)$$

où G est algébrique en x. Mais d'autre part cette relation (a) peut s'obtenir en éliminant a [ou encore b] entre les égalités : $x = \varphi$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial a}$. Comme dans cette élimination u disparaît avec a, G est indépendant de u et comme b ne figure pas dans G, v ne saurait davantage y figurer

G est donc une simple fonction de x.

En raisonnant de la même manière sur $\frac{\partial x}{\partial v}$, on voit qu'on a aussi : $\frac{\partial x}{\partial v} = F(x)$, F étant algébrique en x. D'autre part, les égalités :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = G(x), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = F(x)$$

ne peuvent être compatibles que si on a :

$$\frac{dG}{dx} F - \frac{dF}{dx} G = 0,$$

c'est à dire $\frac{G}{F} = \frac{\lambda}{\mu}$, λ et μ étant deux constantes ; d'où la relation $\mu \frac{\partial x}{\partial u} - \lambda \frac{\partial x}{\partial v} = 0$, qui montre que x est une simple fonction de $\lambda u + \mu v$. Si on substitue à u la combinaison $\lambda u + \mu v$, on voit que x est une simple fonction de u vérifiant l'égalité :

$$du = G(x)\,dx,$$

où G est algébrique en x. Dans la première équation (1) Q doit donc être nul et P coïncider avec $G(x)$. La fonction $x(u)$ est rationnelle en u ou en e^{gu}, ou en $p(u)$, $p'(u)$ et renferme algébriquement x_0. Si on remplace x en fonction de u dans la seconde équation (1), il vient :

$$v + b = \int A(y,u)\,dy + B(y,u)\,du.$$

Pour u constant ($u = \bar{u}$), l'intégrale abélienne $\int A(y,\bar{u})dy$ attachée à une courbe de genre nul $[x = \bar{x}]$ ne peut donner pour y une fonction uniforme de v que si elle possède au plus une période : si elle est sans période, y est rationnel en $v + b$; si elle possède une période, soit $\omega = 2i\pi$, y est rationnel en e^{v+b}. Le groupe de transformations birationnelles de S qui fait correspondre au point (u, v) de S le point $(u, v + b)$ dépend algébriquement de son paramètre b (ou e^b) et conserve chaque unicursale $x = C^{te}$ (ou $u = C^{te}$). D'après le théorème de la page 275, la surface S correspond birationnellement à un cylindre,

soit le cylindre $H(x, \xi)=0$ de l'espace $Ox\xi\xi$. Comme x et ξ sont rationnels soit en u, soit en e^u, soit en $\wp(u), \wp'(u)$, la courbe $H=0$ est de genre zéro ou un. Si elle est de genre nul, S est uniformément unicursale; on rentre dans le cas traité plus haut.- Si elle est de genre 1, S correspond birationnellement au cylindre : $Y^2=4X^3-g_2X-g_3$ de l'espace $OXYZ$ et les fonctions méromorphes X, Y, Z de (u, v) vérifient les égalités :

$$(1)' \qquad du = p(X,Y)\,dX, \qquad dv = p_1(X,Y,Z)\,dX + q_1(X,Y,Z)\,dZ,$$

où p, p_1, q_1 sont rationnels. Mais p doit se réduire à $\frac{\lambda}{Y}$ pour que X soit une fonction elliptique de u; on a donc (en remplaçant u par λu):

$$u = \frac{dX}{\sqrt{4X^3-g_2X-g_3}} \quad , \quad \text{ou} \quad X = \wp(u+\alpha).$$

Si on remplace x par $\wp(u+\alpha)$ dans la seconde équation (1)', il vient

$$v = \int \Pi_1(Z,u)\,dZ + K_1(Z,u)\,du\,,$$

Π et K étant rationnels en Z. Pour que la fonction $Z(u_0,v)$ définie par l'égalité $v=\int \Pi_1(Z,u_0)dZ$ soit uniforme, il faut ou bien que $v(Z,u_0)$ soit une fonction rationnelle (du premier degré) de Z, ou bien que v n'ait qu'une période, soit $2i\pi$, et que e^v soit une fonction homographique de Z. Une fonction primitive de la fonction $\Pi_1(Z,u_0) \equiv q_1(X_0,Y_0,Z)$ est égale dans le premier cas à $\frac{AZ+B}{CZ+D}$, dans le second cas à $\log\frac{AZ+B}{CZ+D}$, A, B, C, D étant rationnels en X_0, Y_0. Si on pose $Z_1=\frac{A(X,Y)Z+B(X,Y)}{C(X,Y)Z+D(X,Y)}$, cette nouvelle substitution birationnelle donne à la seconde équation (1)' la forme:

$$dv = dZ_1 + K\,du \quad , \quad \text{dans le premier cas},$$

$$dv = \frac{dZ_1}{Z_1} + K\,du \quad , \quad \text{dans le second cas},$$

K ne pouvant dépendre de Z_1. En définitive, on peut (moyennant

une transformation birationnelle effectuée sur x, y, z, ramener le système (1) à une des deux formes:

$$(2) \qquad du = \frac{dX}{\sqrt{4X^3 - g_2 X - g_3}}, \quad dv = dZ + \int \rho(X,Y)\,dX \equiv dZ + \int \varphi(u)\,du,$$

$$(3) \qquad du = \frac{dX}{\sqrt{4X^3 - g_2 X - g_3}}, \quad dv = \frac{dZ}{Z} + \int \rho(X,Y)\,dX \equiv \frac{dZ}{Z} + \int \varphi(u)\,du,$$

ρ désignant une fonction rationnelle de X, Y, et $\varphi(u)$ une fonction elliptique de u (d'un certain ordre).

Pour que l'intégrale $X(u,v)$, $Z(u,v)$ de (2) soit méromorphe, il faut que la fonction

$$Z = v + b + \int \varphi(u)\,du$$

soit méromorphe; l'intégrale $\int \varphi(u)\,du$ doit donc être méromorphe, c'est-à-dire que l'intégrale abélienne $\int \rho(X,Y)\,dX$ doit être de seconde espèce. On peut écrire:

$$\int \rho(X,Y)\,dX = R(X,Y) + \int \frac{\lambda X + \mu}{\sqrt{4X^3 - g_2 X - g_3}},$$

R étant rationnel en X, Y. Si on change v en $v - \mu u$ et si on remplace Z par $Z + R(X,Y)$, il vient:

$$Z = v + b + \int \frac{\lambda X\,dX}{\sqrt{4X^3 - g_2 X g_3}} = v + b + \lambda \zeta(u + \alpha),$$

ζ désignant la fonction ζ de M. Weierstrass, $[-\zeta'(u) = \wp(u)]$.

On voit ainsi que les fonctions x, y, z de (u,v) sont alors des fonctions rationnelles de $\wp(u)$, $\wp'(u)$ et de $V = v - \lambda\zeta(u)$[1], [λ désignant une certaine constante numérique], et cela de telle façon qu'à un point x, y, z de S corresponde un seul système de valeurs de $\wp$, $\wp'$, V. – Pour $\lambda = 0$, V coïncide

---

[1] $\wp(u+\alpha)$, $\wp'(u+a)$, $\zeta(u+a)$ s'expriment rationnellement en $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\zeta(u)$.

avec v. [On peut supposer λ égal à 1 ou à zéro]

Inversement si les fonctions x, y, z de (u, v) sont de cette forme, elles dépendent algébriquement (et par suite rationnellement) des constantes x_0, y_0, z_0. Pour le voir il suffit de poser :

$$\begin{cases} X = \wp(u+u_0) \\ Z = v+v_0-\lambda\zeta(u+u_0) \end{cases}, \qquad \begin{cases} X_0 = \wp(u_0) \\ Z_0 = v_0-\lambda\zeta(u_0) \end{cases}$$

et de montrer que X, Y sont algébriques en X_0, Y_0 (quand on exprime u_0, v_0 en X_0, Y_0). Tout d'abord, X est algébrique en X_0 ; on a ensuite :

$$Z = Z_0 + \lambda\zeta(u_0) - \lambda\zeta(u+u_0) \equiv Z_0 + \lambda\Psi(u, u_0),$$

Ψ étant une fonction elliptique de u_0, $\left[-\Psi = \zeta(u) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u_0)-\wp'(u)}{\wp(u_0)-\wp(u)}\right]$, donc une fonction algébrique de $X_0 = \wp(u_0)$. C.Q.F.D.

Passons au système (3) : pour que son intégrale $X(u,v)$, $Z(u,v)$ soit méromorphe, il faut que $Z = e^{v+b+\int\varphi(u)du}$ soit méromorphe, donc que $e^{\int\varphi(u)du}$ soit méromorphe, c'est-à-dire que la fonction elliptique $\varphi(u)$ n'ait que des pôles simples dont les résidus soient des entiers m. On a dans ce cas :

$$\varphi(u) = \Sigma\, m\,\zeta(u-\alpha) + C, \qquad (\Sigma\, m = 0),$$

C étant une constante qu'on peut supposer nulle (en changeant v en $v - Cu$) ; d'où l'égalité :

$$e^{\int\varphi(u)du} = \Pi\,\sigma(u-\alpha)^m \equiv \left[\frac{\sigma(u-\lambda)}{\sigma(u)}\,\Pi\,\sigma(u-\alpha)^m\right]\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-\lambda)}$$

en posant $\lambda + \Sigma\, m\alpha = 0$;[1] σ désigne la fonction σ de M. Weierstrass $\left(\frac{\sigma'}{\sigma} = \zeta\right)$; la parenthèse qui est multipliée par $\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-\lambda)}$ est une fonction elliptique de u, donc une fonction rationnelle de X, Y,

---

[1] Quand on change u en $u+a$, λ ne change pas, car $\Sigma\, m\alpha$ se change en $\Sigma\, m\alpha - a\Sigma m$, et comme $\Sigma m = 0$, λ ~~ou~~ $-\Sigma m\alpha$, garde la même valeur.

et on a :

$$e^{v+b} = Z R(X,Y) \frac{\sigma(u)}{\sigma(u-\lambda)} \quad ,$$

ou bien en changeant Z en $ZR(X,Y)$:

$$Z = \frac{\sigma(u-\lambda)}{\sigma(u)} e^{v+b} .$$

On voit ainsi que x, y, z sont des fonctions rationnelles de $\wp(u), \wp'(u)$ et de $V = e^v \frac{\sigma(u-\lambda)}{\sigma(u)}$, telles qu'inversement $\wp$, $\wp'$ et V s'expriment rationnellement en x, y, z – Pour $\lambda = 0$, V coïncide avec e^v.

Inversement si les fonctions x, y, z de (u,v) sont de cette forme, elles dépendent rationnellement de x_0, y_0, z_0. Il suffit pour le voir de poser

$$\begin{cases} X = \wp(u+u_0) \\ Z = e^{v+v_0} \dfrac{\sigma(u+u_0-\lambda)}{\sigma(u+u_0)} \end{cases} , \qquad \begin{cases} X_0 = \wp(u_0) \\ Z_0 = e^{v_0} \dfrac{\sigma(u_0-\lambda)}{\sigma(u_0)} \end{cases}$$

et de montrer que X, Z sont algébriques en X_0, Z_0 (quand on exprime u_0, v_0 en X_0, Z_0). Tout d'abord, X est algebrique en X_0 ; de plus, on a :

$$Z = Z_0 \frac{\sigma(u+u_0-\lambda)}{\sigma(u+u_0)} \frac{\sigma(u_0)}{\sigma(u_0-\lambda)} \equiv Z_0 \Psi(u, u_0) ;$$

le coëfficient $\Psi(u,u_0)$ de Z_0 est une fonction elliptique de u_0 (car les deux zéros $u_0 = 0$, $u_0 = \lambda - u$ du numérateur et les deux zéros $u_0 = -u$, $u_0 = \lambda$ du dénominateur ont même somme) ; donc $\Psi(u, u_0)$ est une fonction algébrique de $X_0 = \wp(u_0)$. C. Q. F. D.

Le théorème définitif auquel nous arrivons s'énonce donc ainsi :

Théorème général. – Quand les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ définies par les différentielles totales :

$$(1) \qquad du = P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy \, , \quad dv = P_1(x,y,z)\, dx + Q_1(x,y,z)\, dy$$
$$[S(x,y,z) = 0] \, ,$$

dépendent rationnellement des constantes x_0, y_0, z_0 (valeurs de x, y, z pour $u = v = 0$);

ou bien x, y, z sont des fonctions hyperelliptiques de u, v (telles qu'à un point quelconque x, y, z de S corresponde un seul couple u, v abstraction faite des couples congruents);

ou bien (moyennant une transformation linéaire convenable effectuée sur u, v), x, y, z sont des fonctions rationnelles soit de u, v, soit de $u, \theta = e^v$, soit de $t = e^u$, $\theta = e^v$, soit enfin de $p(u), p'(u)$, V, où V désigne une des trois expressions:

$$V = v, \quad V = v - \frac{\sigma'}{\sigma}(u), \qquad V = e^v \frac{\sigma(u-\lambda)}{\sigma(u)},$$

(λ est une constante numérique). Inversement, u, v dans le premier cas, u, θ dans le second, $t\ \theta$ dans le troisième, p, p' et V dans le dernier, s'expriment rationnellement en (x, y, z).

Comparaison avec les fonctions hyperelliptiques et leurs dégénérescences. — Tous les systèmes de fonctions $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ de la forme précédente vérifient un système (1). Il est intéressant de montrer qu'ils se ramènent soit aux fonctions hyperelliptiques, soit à leurs dégénérescences.

Considérons les deux équations:

$$(1)' \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \dfrac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = du, \\[2ex] \dfrac{x_1\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \dfrac{x_2\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = dv, \end{cases} \qquad \text{avec } R(x) \equiv (4x^3 - g_2 x - g_3)(mx^2 + nx + p),$$

et posons: $X = x_1 + x_2$, $Y = x_1 x_2$, $Z = \alpha\sqrt{R(x_1)} + \beta(\sqrt{R(x_2)})$, ($\alpha, \beta$ étant des constantes quelconques). Les fonctions X, Y, Z de (u, v) sont hyperelliptiques, et dépendent rationnellement des constantes X_0, Y_0, Z_0, — cela pour des valeurs arbitraires des paramètres g_2, g_3, m, n, p de R. Pour certaines valeurs de

paramètres $R(x)$ a des racines infinies ou multiples: les fonctions X, Y, Z dépendent encore rationnellement des constantes X_0, Y_0, Z_0; elles sont encore méromorphes, mais elles n'admettent plus quatre couples de périodes distincts. Nous donnerons à ces fonctions le nom de dégénérescences des fonctions hyperelliptiques. Il est clair que ces fonctions, qui vérifient un système (1) et dépendent rationnellement des constantes, rentrent dans les systèmes de fonctions énumérées plus haut. Ce que nous voulons montrer c'est que tous les systèmes $(x = u, y = v)$, $(x = e^u, y = v)$, $(x = e^u, y = e^v)$, $[x = p(u), y = v - \lambda \zeta(u)]$, $\left[x = p(u), y = e^v \frac{\sigma(u-\lambda)}{\sigma(u)}\right]$ se ramènent rationnellement à des dégénérescences de fonctions hyperelliptiques.

Faisons d'abord, dans (1)', $m = n = 0$, $p = 1$; $R(x)$ se réduit à $4x^3 - g_2 x - g_3$; si on remplace x_1, x_2 en X, Y le système (1)' devient:

$$(1)'' \quad \begin{cases} du = \Pi(x, y, z)\, dX + K(X, Y, Z)\, dY, \\ dv = \Pi_1(X, Y, Z)\, dX + K_1(X, Y, Z)\, dY, \end{cases}$$

la première différentielle étant de première espèce et ayant deux périodes (1) $2\omega_1, 2\omega_2$ de rapport imaginaire, la seconde différentielle étant de deuxième espèce, et ayant deux périodes correspondantes $2\omega_1', 2\omega_2'$ dont une au moins n'est pas nulle. Le système (1)'' doit donc se laisser transformer birationnellement dans le système:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}}, \quad dv_1 \equiv h\,du + K\,dv = dy + \frac{\lambda x\, dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}}, \quad [\lambda = 0 \text{ ou } 1],$$

où γ_2, γ_3 sont arbitraires car γ_2, γ_3 sont des fonctions algébriques distinctes de g_2, g_3 puisque la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}}$ est une transformée du second degré de la

---

(1) Ces périodes sont égales aux périodes de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3}}$, au facteur $\frac{1}{2}$ près

différentielle $\frac{dx_1}{\sqrt{4x_1^3-g_2x_1-g_3}}$.

Faisons maintenant dans (1)' $m=1, n=2q, p=q^2$; le facteur $(x-q)$ sort du radical; si on pose $u_1=v-qu$ $v_1=u\sqrt{4q^3-g_2q-g_3}$, et si on substitue à u, v les variables u_1, v_1 en effaçant les indices, les équations (1)' (où on exprime x_1, x_2 en X, Y) prennent la forme (1)", la première différentielle étant de première espèce et ayant deux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ de rapport imaginaire; la seconde différentielle étant de troisième espèce et ayant ses résidus égaux à ± 1. Le système (1) doit donc ici se laisser transformer birationnellement dans un système de la forme:

$$\begin{cases} du = \dfrac{dx}{\sqrt{4x^3-\gamma_2 x-\gamma_3}}, \\ dv = \dfrac{dy}{y}+\Big[\zeta(u)-\zeta(u-\lambda)+h\Big]du = \dfrac{dy}{y}+\Big[h+\zeta(\lambda)+\frac{1}{2}\dfrac{\sqrt{4x^3-\gamma_2x-\gamma_3}+\wp'(\lambda)}{\wp(\lambda)-x}\Big]\dfrac{dx}{\sqrt{4x^3-\gamma_2x-\gamma_3}} \end{cases}$$

où γ_2, γ_3 sont des fonctions algébriques distinctes de g_2, g_3, et $\mu=\wp(\lambda)$ une fonction algébrique de g_2, g_3, q. On peut donc disposer de g_2, g_3, q, de façon que $\gamma_2, \gamma_3, \lambda$ soient arbitraires.[1]

En définitive, (moyennant une transformation linéaire convenable effectuée sur u, v, tout système de la

---

[1] Il n'y aurait de difficulté que si $\mu\equiv\wp(\lambda)$ était indépendant de q; mais dans ce cas les périodes de l'intégrale $\int\frac{dx_1}{\sqrt{4x_1^3-g_2x_1-g_3}}\left(h-\frac{\sqrt{4q^3-g_2q-g_3}}{x_1-q}\right)\equiv J(x_1,q)$ seraient indépendantes de q; la différence $J(x_1,q)-J(x_1,q')$ n'aurait que la période $2i\pi$ et l'expression $e^{[J(x_1,q)-J(x_1,q')]}$ serait une fonction rationnelle $f[x_1, \sqrt{\varrho(x_1)}]$, si $\varrho(x_1)$ représente $4x_1^3-g_2x_1-g_3$. D'ailleurs f devrait vérifier une égalité de la forme: $f^2-\frac{(ax_1^2+bx_1+c)}{(x_1-q)(x_1-q')}f+d=0$, a, b, c, pouvant dépendre de q, q' et d pouvant être pris égal à 1. On aurait donc $\varrho(x_1)\equiv(ax_1^2+bx_1+c)^2-4[(x_1-q)(x_1-q')]^2$; et le polynôme $\varrho(x_1)$ serait décomposable d'une infinité de manières en une somme de deux carrés, ce qui est absurde.

forme

$$(m) \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}}, \qquad dv = dy + \frac{\lambda x dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}},$$

ou de la forme

$$(n) \qquad du \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}}, \qquad dv = \frac{dy}{dy} + \left[\zeta(\lambda) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3} + \wp'(\lambda)}{\wp(\lambda) - x}\right]\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}}$$

se laisse transformer birationnellement en un système hyperelliptique (1)' dégénéré. On serait arrivé à la même conclusion en intégrant directement les équations (1)' dans les deux cas : $m = n = 0$, $p = 1$, et $m = 1$, $n = 2q$, $p = q^2$.

Ce qui précède s'applique en particulier aux deux systèmes :

$$(m)' \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad dv = \begin{cases} dy \\ \text{ou} \\ \frac{dy}{y} \end{cases},$$

cas particuliers des précédents, où λ est nul. D'autre part, les systèmes

$$du = \frac{dX}{X}, \quad dv = \frac{dY}{Y}, \qquad \text{et} \qquad du = \frac{dX}{X}, \quad dv = dY,$$

sont des dégénérescences des systèmes $(m)'$, obtenues en faisant par exemple $g_2 = 3$, $g_3 = 1$, en posant $X = \frac{\sqrt{x-1} + i\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-1} - i\sqrt{\frac{3}{2}}}$, et en multipliant u par $i\sqrt{6}$. Enfin, le système $du = dX$, $dv = dY$, est une dégénérescence du système $(m)'$ [où $dv = dy$], obtenue en faisant $g_2 = g_3 = 0$, et $x = \frac{1}{X^2}$.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Toutes les fonctions uniformes $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ définies par l'inversion d'un système :

$$(1) \qquad u = \int P dx + Q\, dy, \qquad v = \int P_1 dx + Q_1 dy$$

sont des fonctions hyperelliptiques (aux mêmes périodes), ou des dégénérescences.[1]

---

[1] En convenant d'appeler fonctions hyperelliptiques ou dégénérescences toutes les fonctions uniformes $X(u,v)$, $Y(u,v)$, $Z(u,v)$ définies par un système (1)' quelconque, où on a fait subir aux variables X, Y, Z (liées algébriquement), une transformation birationnelle quelconque.

Conclusions générales sur les surfaces qui admettent un groupe continu fini de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Appelons surface hyperelliptique toute surface S dont les coordonnées (x, y, z) sont exprimables par des fonctions hyperelliptiques aux mêmes périodes de deux paramètres u, v, - et cela de telle façon qu'à un point (x, y, z) de S ne corresponde qu'un couple (u, v), abstraction faite des couples congruents. - Les résultats obtenus dans cette leçon et la précédente se résument ainsi :

Pour qu'une surface algébrique admette un groupe continu fini de transformations birationnelles, il faut et il suffit :

ou bien qu'elle soit hyperelliptique;

ou bien qu'elle corresponde birationnellement à un cylindre;

ou enfin que les coordonnées x, y, z de S soient exprimables à l'aide de deux paramètres t, u, de telle façon que x, y, z soient des fonctions elliptiques de t, algébriques de u, et qu'inversement à un point (x, y, z) de S correspondent une seule valeur de u et des valeurs de t qui ne diffèrent que par la partie aliquote ν^e d'une période.

Dans le premier cas, la surface S possède deux différentielles totales de première espèce; dans le second cas, elle en possède ϖ, qui sont fonctions d'une d'entre elles, (ϖ désignant le genre de la section droite du cylindre); dans le troisième, elle possède au moins une différentielle totale de première espèce n'ayant que deux périodes.

Ces théorèmes comportent un grand nombre d'applications : nous les emploierons dans la leçon prochaine à l'intégration des équations différentielles. Ils permettent également, (combinés avec certains résultats de M. Sophus Lie), de déterminer explicitement tous les groupes continus (?) algébriques à deux variables; etc....

- Digression sur les intégrales doubles de première espèce. -

On sait qu'à une surface algébrique quelconque M. Nœther

a attaché certaines intégrales doubles $\iint R(x,y,z)\,dx\,dy$, dites de première espèce. Ces intégrales [où R est rationnel en x,y,z] sont les analogues des intégrales abéliennes de première espèce attachées à une courbe : elles sont caractérisées par la propriété de rester finies quel que soit le champ d'intégration auquel on les étende[1]. — Ces intégrales se laissent toujours mettre sous

$$J = \iint \frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{S'_z},$$

où P est un polynôme en x,y,z de degré $(m-4)$ au plus, si m désigne le degré de la surface

$$S(x,y,z) = 0 \ .$$

Quand S est le polynôme le plus général de son degré, P est le polynome le plus général de son degré $(m-4)$. Quand S n'admet que des singularités ordinaires (points doubles, lignes doubles), la surface $P=0$ est assujettie à passer par ces singularités, etc. Le nombre des intégrales doubles de première espèce linéairement distinctes est donc un certain entier fini p, qui peut être nul, que M. Nœther appelle le genre p de la surface.

Quand on peut passer d'une surface $S(x,y,z)=0$ à une surface $\Sigma(X,Y,Z)=0$ par une transformation rationnelle :

$$(a) \qquad x = \varphi(X,Y,Z)\ ,\ y = \psi(X,Y,Z)\ ,\ z = \chi(X,Y,Z)\ ,$$

toute intégrale double de 1ère espèce attachée à S se transforme en une intégrale double analogue attachée à Σ :

$$J(x,y,z) = \lambda_1 \mathcal{J}_1(X,Y,Z) + \lambda_2 \mathcal{J}_2(X,Y,Z) + \ldots + \lambda_q \mathcal{J}_q(X,Y,Z),$$

---

[1] Quand x, y sont réels, l'intégration $J = \iint R(x,y,z)\,dx\,dy$ a un sens élémentaire; pour x, y complexes, voici la définition qu'on adopte. Soit $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, [et par $z = \chi(u,v)$] des fonctions algébriques de u, v arbitrairement choisies : donnons à u, v des valeurs réelles et soit D un domaine quelconque du plan des u, v. L'intégrale double étendue à D sera, par définition,

$$\iint_D R(x,y,z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\,dv = \iint_D A(u,v)\,du\,dv + i\iint_D B(u,v)\,du\,dv,$$

A, B étant réels. Pour que J soit de 1ère espèce, il faut que J reste finie, quels que soient φ, ψ, et D.

g désignant le genre Σ. Si la transformation (α) dépend de paramètres (qui ne figurent ni dans S ni dans Σ), les λ sont indépendants de ces paramètres). On le voit en raisonnant exactement comme pour les intégrales abéliennes de première espèce [voir page 95].

D'après cela, si la surface S possède au moins deux intégrales doubles de première espèce J_1, J_2, on a, en appelant Δ le déterminant fonctionnel des fonctions $x(X,Y)$, $y(X,Y)$:

$$\frac{P_1 \Delta}{S'_z} = \frac{\lambda_1 \Pi_1 + \dots + \lambda_g \Pi_g}{\Sigma'_Z},$$

$$\frac{P_2 \Delta}{S'_z} = \frac{\mu_1 \Pi_1 + \dots + \mu_g \Pi_g}{\Sigma'_Z},$$

d'où :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\lambda_1 \Pi_1 + \dots + \lambda_g \Pi_g}{\mu_1 \Pi_1 + \dots + \mu_g \Pi_g},$$

les λ, μ étant des constantes.

Lors donc qu'une surface S admet un groupe continu de transformations birationnelles, si le genre p de S est supérieur à 1, ce groupe est nécessairement <u>intransitif</u> et conserve les courbes $\frac{P_1}{P_2} = C^{te}$, qui sont par suite ou de genre 1 et de module constant, ou de genre nul. Mais cette dernière hypothèse doit être écartée parce qu'il ne saurait exister alors d'intégrale double de 1ère espèce.(1) Les courbes $\frac{P_1}{P_2} = C^{te}$ sont donc de genre 1 et leur module constant.

La conservation des intégrales doubles de première espèce dans une transformation birationnelle, de même que la conservation des différentielles totales de première espèce, joue un rôle important dans

---

(1) On voit bien aisément que si $\iint R(x,y,z)\,dx\,dy$ est de première espèce, les intégrales abéliennes $\int R(x, y_0, z)\,dx$, $\int R(x_0, y, z)$ sont a fortiori de première espèce, ce qui ne peut avoir lieu si S renferme une famille d'unicursales.

l'intégration des équations différentielles au point de vue qui nous occupe.

Remarques. – Je terminerai cette étude des transformations birationnelles des surfaces par quelques remarques.

Nous avons vu qu'une courbe algébrique ne peut admettre une infinité de transformations birationnelles sans admettre un groupe continu fini de telles transformations qui les comprend toutes.

Une surface algébrique peut au contraire admettre une infinité de transformations birationnelles qui ne soit contenue dans aucun groupe fini. Par exemple le plan $z=0$ admet les transformations :

$$x=X\ ,\ y=Y+X^n \qquad (\text{où } n \text{ est un entier quelconque}),$$

et le degré de ces transformations birationnelles croît indéfiniment avec n. Mais une remarque qu'il importe de faire, c'est que dans tous les exemples de cette nature qu'on a formés jusqu'ici, la surface S possède néanmoins un groupe continu fini de transformations birationnelles. Une question se pose donc qu'il serait très intéressant de résoudre : « Existe-t-il des surfaces algébriques telles que le groupe de leurs transformations birationnelles soit infini sans renfermer aucun groupe fini » ?

Une autre remarque est relative aux transformations biuniformes des surfaces. Tandis qu'une courbe algébrique ne peut admettre de transformation biuniforme (1) en elle-même sans que cette transformation soit birationnelle, une surface algébrique peut admettre des transformations biuniformes, d'espèce très simple, qui ne sont pas birationnelles. C'est ainsi que le plan $z=0$ admet ces transformations biuniformes :

$$x=X\ ,\quad y=\varphi(X)+Y\ ,\qquad \text{ou } X=x,\qquad Y=-\varphi(x)+y\ ,$$

φ désignant une fonction méromorphe quelconque. L'étude générale de telles transformations serait du plus grand intérêt à tout point de vue.

---

(1) Pourvu du moins que la fonction $x(X)$ qui définit la transformation n'admette pas de lignes singulières. – Je me borne à signaler ici cette proposition dont nous n'avons pas à faire usage.

mais elle présente les plus profondes difficultés.

Avant d'appliquer les généralités précédentes à l'intégration des équations différentielles, j'en déduirai, sous la forme la plus complète, le théorème de M. Weierstrass relativement aux fonctions qui admettent un théorème d'addition.

Théorème de M. Weierstrass sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition.

Étant données deux fonctions analytiques indépendantes quelconques x, y de deux variables u, v, soit $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, on dit (voir page 295) que ces deux fonctions admettent un théorème d'addition si, (X,Y), (x,y), (x_0, y_0) désignant les valeurs des fonctions φ, ψ pour les valeurs $(u+u_0, v+v_0)$, (u,v), (u_0, v_0) de (u,v), X et Y s'expriment algébriquement en fonction de x, y, x_0, y_0.

Autrement dit, si on tire d'une part u_0, v_0 en fonction de x_0, y_0, d'autre part (u,v) en fonction de x, y, des égalités :

$$x_0=\varphi(u_0, v_0), \quad y_0=\psi(u_0,v_0)$$

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\psi(u,v)$$

et si on porte dans les égalités :

$$(1) \qquad X=\varphi(u+u_0, v+v_0), \quad Y=\psi(u+u_0, v+v_0),$$

les fonctions $X=\Phi(x,y,x_0,y_0)$, $Y=\Psi(x,y,x_0,y_0)$ ainsi obtenues doivent être algébriques.

Si nous remplaçons dans les équations (1), u_0 et v_0 en fonction de x_0, y_0, X et Y deviennent des fonctions $\varphi_1(u,v,x_0,y_0)$, $\psi_1(u,v,x_0,y_0)$ algébriques en x_0, y_0. Éliminons x_0, y_0 entre les égalités

$$X=\varphi_1(u,v,x_0,y_0), \quad Y=\psi_1(u,v,x_0,y_0)$$

et une quelconque des quatre égalités :

$$\frac{\partial X}{\partial u}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial X}{\partial v}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u}=\frac{\partial \psi_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial Y}{\partial v}=\frac{\partial \psi_1}{\partial v};$$

nous formons ainsi quatre relations :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = A(X, Y, u, v), & \dfrac{\partial X}{\partial v} = B(X, Y, u, v) \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} = A_1(X, Y, u, v), & \dfrac{\partial Y}{\partial v} = B_1(X, Y, u, v) \end{cases}$$

où A, B, A_1, B_1 sont algébriques en X, Y. Comme d'autre part les relations (2) peuvent aussi s'obtenir en éliminant u_0, v_0 entre les deux équations (1) et une des quatre équations :

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u+u_0, v+v_0), \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u+u_0, v+v_0), \text{ etc},$$

u et v se trouvent éliminés en même temps que u_0, v_0, et A, B, A_1, B_1 sont indépendants de u, v. De plus le déterminant $AB_1 - BA_1$ n'est pas identiquement nul ; en sorte qu'on peut remplacer (2) par le système :

$$\begin{aligned} du &= P(X,Y)\,dX + Q(X,Y)\,dY \\ dv &= P_1(X,Y)\,dX + Q_1(X,Y)\,dY, \end{aligned}$$

où les deux seconds membres sont deux différentielles totales algébriques.

Nous voyons donc que toutes les fonctions analytiques $x(u,v), y(u,v)$ qui admettent un théorème d'addition sont définies par l'inversion d'un système de deux différentielles totales algébriques :

$$(3)\quad \begin{cases} dx = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \\ dy = P_1(x,y)\,du + Q_1(x,y)\,dy. \end{cases}$$

Posons $Z = \alpha P + \beta Q + \alpha_1 P + \beta_1 Q$, ($\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ étant des constantes numériques arbitrairement choisies) ; les variables x, y, z, sont liées par une relation algébrique

$$F(x, y, z) = 0,$$

et si x_0, y_0, z_0 désignent les valeurs de x, y, z pour $u = 0$, $v = 0$, les fonctions x, y de u, v vérifient deux relations de la forme :

$$(4)\begin{cases} x^n + R_{n-1}(x_0, y_0, z_0, u, v)\, x^{n-1} + \dots + R_1(x_0, y_0, z_0, u, v)\, x + R_0(x_0, y_0, z_0, u, v) = 0 \\ y^n + \rho_{n-1}(x_0, y_0, z_0, u, v)\, y^{n-1} + \dots + \rho_{n-1}(x_0, y_0, z_0, u, v)\, y + \rho_0(x_0, y_0, z_0, u, v) = 0 \end{cases}$$

où les R et les ρ sont rationnels en x_0, y_0, z_0.[1] Ces égalités nous montrent que le nombre des valeurs des fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$ qui se permutent autour des singularités critiques mobiles (c'est-à-dire variables avec les constantes x_0, y_0, z_0) est fini et au plus égal à n. Nous pouvons d'ailleurs admettre qu'il est effectivement égal à n ; car s'il était égal à μ [$\mu < n$], on voit, en appelant $x_1, x_2, \dots x_\mu$ les μ déterminations de $x(u,v)$ qui se permutent autour des singularités mobiles, que les fonctions symétriques $(x_1 + x_2 + \dots + x_\mu), \dots\dots, x_1 x_2 \dots x_\mu$ sont des fonctions uniformes de x_0, y_0, z_0 (voir page 239), donc des fonctions rationelles, et x vérifie une relation de la forme (4) où n est égal à μ. Le même raisonnement s'appliquant à y, il est loisible de supposer $\mu = n$.

De plus, soit $x(u,v)$, $y(u,v)$ une solution particulière du système (1), et soit $\bar{R}_{n-1}(u,v)$ la somme $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ correspondante ; si nous changeons u en $u + u_0$, v en $v + v_0$, nous obtenons toutes les solutions de (1), en sorte qu'on a :

$$R_{n-1}(x_0, y_0, z_0, u, v) \equiv \bar{R}_{n-1}(u + u_0, v + v_0),$$

en faisant correspondre à (u_0, v_0) des valeurs convenables de x_0, y_0, z_0, et des égalités analogues ont lieu pour toutes les fonctions R, ρ. — Enfin, parmi ces fonctions R, ρ de u, v, il en existe au moins deux qui sont indépendantes ;[2] j'appelle R et ρ deux telles fonctions, et je pose :

$$\xi = R(x_0, y_0, z_0, u, v) \equiv \bar{R}(u + u_0, v + v_0)$$
$$\eta = \rho(x_0, y_0, z_0, u, v) \equiv \bar{\rho}(u + u_0, v + v_0).$$

---

(1) - Il est loisible de supposer que le degré des deux relations en x, y est le même en effectuant sur x, y une transformation linéaire quelconque.

(2) - Autrement x et y seraient fonctions d'une même fonction $g(u,v)$.

J'ai montré (1) qu'on peut donner à ces conditions la forme indiquée plus haut (voir page 285); la surface S doit correspondre birationnellement à un cylindre, ou bien ses coordonnées doivent s'exprimer en fonction elliptique de t et algébrique de u, de façon qu'à un point x, y, z de S corresponde une seule valeur de u et des valeurs de t ne différant que par une partie aliquote de période.

Les surfaces de la seconde classe possèdent toutes un groupe continu transitif de transformations birationnelles. Quant à la nature de ces surfaces, elle apparaît aussitôt si on admet le théorème de Weierstrass relatif aux fonctions qui possèdent un théorème d'addition. Ces surfaces S sont des surfaces hyperelliptiques ou des dégénérescences de telles surfaces.

Mais la démonstration de l'illustre géomètre de Berlin, qui n'a jamais été ni publiée, ni enseignée, est aujourd'hui perdue. Toute la difficulté revient d'ailleurs à établir le théorème qui a fait l'objet de cette leçon:

« Quand les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ définies par l'inversion de deux « intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique $S(x,y,z)$, « renferment rationnellement les constantes x_0, y_0, z_0, ce sont des fonctions abéliennes « de u, v, ou des dégénérescences. »

Les deux différentielles totales ne peuvent posséder plus de quatre couples de périodes distincts. Quand elles en possèdent quatre, le théorème de M. Weierstrass a été établi en toute rigueur par MM. Picard et Poincaré d'une part, par M. Appell d'autre part, à l'aide de méthodes toutes différentes. M. Picard a de plus donné, sous une forme bien remarquable, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions x, y, z de u, v définies

---

(1) Voir les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (Janvier, Février 1893, Août 1895); voir aussi une note de MM. Castelnuovo et Enriquez (Juillet 1895).

par (1) soient des fonctions abéliennes non dégénérées : il faut et il suffit que la surface S soit de genre p égal à 1 et qu'elle possède deux différentielles totales de première espèce linéairement indépendantes (voir le mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables, pages 89-95).[1]

Mais quand le nombre des couples de périodes est inférieur à 4, des difficultés d'un tout autre ordre se présentent. M. Picard a bien indiqué, pour ce cas, une démonstration du théorème de Weierstrass (loc. cit. pages 99-115). Mais sa démonstration présente des lacunes qu'il me semble impossible de combler sans une discussion analogue à celle qui se trouve développée aux pages 298 - 323. Cette discussion constitue précisément la partie essentielle de la démonstration que j'ai donnée plus haut et elle ne me paraît guère susceptible de simplifications, au moins dans ses grandes lignes.

Dix-septième Leçon.

Application des résultats précédents à l'intégration des équations différentielles du second ordre.

Nous allons nous servir des résultats précédents pour étudier la nature de l'intégrale d'une équation différentielle :

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0,$$

(F désignant un polynôme en y'', y', y), dans l'hypothèse

---

[1] D'un tout autre point de vue, les surfaces hyperelliptiques ont fait l'objet de brillantes recherches géométriques de M. Humbert (Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, (Journal de Mathématiques).

où l'intégrale générale de (1) ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles et renferme algébriquement les constantes y_0, y'_0. Nous étudierons d'abord les équations (1) où x ne figure pas explicitement.

—. Equations où x ne figure pas explicitement.

Étant donnée une équation

$$F(y'', y', y) = 0,$$

déterminons la nature de l'intégrale $y(x)$ dans l'hypothèse où cette intégrale $y(x)$ a des points critiques fixes[1] (et par suite est méromorphe), et renferme algébriquement les constantes y_0, y'_0. Nous savons que $y(x)$ est alors une fonction rationnelle de y''_0, y'_0, y_0. Inversement, si $y(x)$ renferme rationnellement les constantes y_0, y'_0, y''_0 (liées par $F=0$), les points critiques et essentiels de $y(x)$ sont fixes, et par suite $y(x)$ est méromorphe.

Posons d'autre part $y'=z$, $y''=t$; nous avons:

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = t, \quad \text{avec} \quad F(t, z, y) = 0;$$

si y_0, z_0, t_0 sont les valeurs de y, z, t pour $x=0$, les fonctions y, z, t de y_0, z_0, t_0, x définissent un groupe (à un paramètre x) de transformations birationnelles de la surface $F=0$ en elle même. La transformation infinitésimale $\eta(y,z), \zeta(y,z)$ de ce groupe est: $\eta = z$, $\zeta = t(y,z)$.

Ecrivons explicitement les équations de ce groupe

$$G \begin{cases} y = R(t_0, z_0, y_0, x) \equiv t_0^{m-1} r_{m-1}(y_0, z_0, x) + \dots + t_0 r_1(y_0, z_0, x) + r_0(y_0, z_0, x), \\ z = \dfrac{\partial R}{\partial x}(t_0, z_0, y_0, x) \equiv t_0^{m-1} r'_{m-1}(y_0, z_0, x) + \dots + t_0 r'_1(y_0, z_0, x) + r'_0(y_0, z_0, x), \\ t \quad \dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}(t_0, z_0, y_0, x) \equiv t_0^{m-1} r''_{m-1}(y_0, z_0, x) + \dots + t_0 r''_1(y_0, z_0, x) + r''_0(y_0, z_0, x)); \end{cases}$$

---

[1] x ne figurant pas dans l'équation, $y(x)$ ne peut avoir d'autres points critiques ou essentiels qui soient fixes que $x = \infty$.

m désigne le degré en t du polynôme F et les r, r', r'' des fractions rationnelles en y_0, z_0, dont les coëfficients sont des fonctions méromorphes de x, (un de ces coëfficients étant égal à 1 pour chaque fraction r, r', r''). Soit $\alpha(x)$ un de ces coëfficients, qui dépend effectivement de x ; si nous exprimons x en fonction de α dans les autres coëfficients, deux cas sont à distinguer suivant que toutes les fonctions de α ainsi obtenues sont algébriques ou non.

Dans le premier cas, le groupe G renferme algébriquement son paramètre α. Si on donne à (y_0, z_0, t_0) des valeurs numériques, on a :

$$y = \rho(\alpha)$$
$$z = \rho_1(\alpha)$$

ρ et ρ_1 étant algébriques en α, et α étant une fonction méromorphe de x. Mais, puisque $z = \frac{dy}{dx}$, on a aussi :

$$\frac{d\rho}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = \rho_1(\alpha), \text{ c'est-à-dire : } \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\rho_1(\alpha)}{\rho'(\alpha)} ;$$

α est donc une fonction rationnelle soit de x, soit de e^{gx}, soit de $[\wp(x, g_2, g_3) \frac{d\wp}{dx}]$, g, g_2, g_3 désignant des constantes numériques. Les autres coëfficients des r, r', r'' sont, d'une part, des fonctions méromorphes de x, d'autre part des fonctions algébriques de α : dans la première hypothèse [α rationnel en x], ce sont donc des fonctions rationnelles de x; dans la seconde hypothèse [α rationnel en e^{gx}], ce sont des fonctions rationnelles en $e^{\frac{g}{\nu}x}$, ν désignant un certain entier; dans la troisième hypothèse (α rationnel en $\wp$, $\wp'$), ce sont des fonctions elliptiques de x admettant un parallélogramme de périodes commun — La fonction $y(x)$ est donc elle-même soit une fonction rationnelle de x ou de $e^{\frac{2i\pi}{\omega}x}$, [$\omega$ étant numérique]], soit une fonction elliptique de x (à périodes numériques).

la nature de la fonction $y(x)$ est complètement élucidée dans ce premier cas.

Passons au second cas, dans lequel le groupe G renferme son paramètre α sous forme transcendante. Je dis que G est alors un sous-groupe d'un groupe permutable de transformations birationnelles de la surface F, qui renferme algébriquement ses paramètres. En effet, si dans les fonctions r, r', r'' nous laissons indéterminés tous les coëfficients $\alpha, \beta, \ldots$, nous savons que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de transformations ainsi définie forme un groupe permutable se traduisent par certains systèmes de relations algébriques entre les coëfficients $\alpha, \beta, \ldots\ldots$, relations qui peuvent dépendre de certains coëfficients numériques indéterminés $\lambda, \mu \ldots$ (voir page 266). Chacun de ces systèmes, pour des valeurs numériques quelconques données à $\lambda, \mu \ldots$, définit un groupe permutable Γ, qui renferme algébriquement ses paramètres. D'autre part le groupe G à un paramètre est permutable et vérifie par suite au moins un de ces systèmes. C'est donc un sous-groupe du groupe Γ correspondant. C. Q. F. D.

Nous savons qu'en choisissant convenablement les paramètres $u_1, \ldots u_k$ de Γ, ce groupe peut être défini par l'intégrale générale d'un système:

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} = \eta_1(y, z, t), \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial y}{\partial u_k} = \eta_k(y, z, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_1} = \zeta_1(y, z, t), \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial u_k} = \zeta_k(y, z, t),$$

les η, ζ étant rationnels en y, z, t, et y_0, z_0, t_0 désignant les valeurs de y, z, t pour les valeurs numériques $u_1^0, \ldots u_k^0$ de $u_1, \ldots, u_k$. Les transformations infinitésimales η_i, ζ_i sont de plus

linéairement distinctes; c'est-à-dire qu'il n'existe pas de constantes $c_1, \dots c_k$ (autres que $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$) telles qu'on ait à la fois:

$$c_1 \eta_1 + \dots\dots + c_k \eta_k \equiv 0 \qquad c_1 \zeta_1 + \dots + c_k \zeta_k \equiv 0 .$$

Le groupe G s'obtient en prenant pour $u_1, \dots u_k$ des fonctions convenables de x. La transformation infinitésimale $[\eta = z, \zeta = t]$ de G vérifie les deux relations:

$$\eta \equiv z = \eta_1 \frac{du_1}{dx}(x_0) + \dots\dots + \eta_k \frac{du_k}{du}(x_0) ,$$

$$\zeta \equiv t = \zeta_1 \frac{du_1}{dx}(x_0) + \dots\dots + \zeta_k \frac{du_k}{dx}(x_0) ,$$

x_0 représentant la valeur de x pour laquelle $u_1(x) = u_1^0, \dots u_k(x) = u_k^0$, c'est-à-dire une valeur quelconque de x. Les premiers membres des égalités précédentes ne dépendant pas de x_0, il en est de même des seconds, ce qui exige que $\frac{du_1}{dx}, \dots \frac{du_k}{dx}$ soient des constantes, car autrement on aurait (pour x quelconque)

$$\eta_1 \frac{d^2u_1}{dx^2} + \dots + \eta_k \frac{d^2u_k}{dx^2} = 0, \quad \zeta_1 \frac{d^2u_1}{dx^2} + \dots\dots + \eta_k \frac{d^2u_k}{dx^2} = 0 ,$$

les quantités $\frac{d^2u_1}{dx^2}, \dots \frac{d^2u_k}{dx^2}$ n'étant pas toutes nulles. Le groupe G s'obtient donc en remplaçant $u_1, \dots u_k$ par des fonctions linéaires de x, soit $u_1 = a_1 x + b_1, \dots\dots u_k = a_k x + b_k$, et, comme il est loisible d'effectuer sur les u une transformation linéaire, on peut supposer $a_1 = 1, a_2 = a_3 \dots = a_k = 0$, ce qui entraîne $\eta = \eta_1, \zeta = \zeta_1$.

Ce point établi, si le groupe Γ est <u>intransitif</u>, on a $\varrho(y, z, t) \varrho = (y_0, z_0, t_0) = C$, ϱ désignant une certaine fonction rationnelle; d'où une relation algébrique entre y, $\frac{dy}{dx}$ et C, qui montre que la fonction uniforme $y(x)$ est une fonction rationnelle ou de x, ou de e^{gx}, ou de $[\wp(x, g_2, g_3), \frac{d\wp}{dx}]$, g, g_2, g_3 étant indépendants de C, autrement la fonction $y(x, y_0, C)$, algébrique en y_0, serait transcendante en C,

et par suite $y(x, y_0, y'_0)$ ne renfermerait pas algébriquement les deux constantes y_0, y'_0). Observons que, dans ce cas, le groupe G dépend algébriquement soit de x, soit de e^{gx}, soit de $\wp(x)$, et par suite dépend algébriquement de α. Le groupe Γ est donc nécessairement transitif si G renferme α sous forme transcendante.

Si le groupe Γ est transitif, tous les rapports $\frac{\xi_i}{\eta_i}$ ne sont pas identiques à $\frac{\xi_1}{\eta_1}$; soit par exemple $\frac{\xi_2}{\eta_2} \neq \frac{\xi_1}{\eta_1}$. Si nous posons: $u_1 = u$, $u_2 = v$, les égalités:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \eta_1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \xi_1, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \eta_2, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \zeta_2,$$

peuvent s'écrire

$$(3) \quad \begin{cases} du = P(y,z,t)\,dy + Q(y,z,t)\,dz, \\ dv = P_1(y,z,t)\,dy + Q_1(y,z,t)\,dz, \end{cases}$$

les deux différentielles totales (3) étant attachées à la surface $F = 0$, et les fonctions y, z, t de u, v ainsi définies sont des fonctions hyperelliptiques ou des dégénérescences. Le groupe Γ défini par les relations:

$$u = \int_{y_0, z_0, t_0}^{y, z, t} P\,dy + Q\,dz, \qquad v = \int_{y_0, z_0, t_0}^{y, z, t} P\,dy + Q\,dz$$

coïncide avec le groupe G quand on y fait $u = x$, $v = 0$. L'intégrale générale de l'équation différentielle $F = 0$ est donc donnée par les égalités:

$$dx = P\,dy + Q\,dz, \qquad 0 = P_1\,dy + Q_1\,dz;$$

ou bien

$$x + a = \int P\,dy + Q\,dz, \qquad b = \int P_1\,dy + Q_1\,dz.$$

Les résultats que nous venons d'obtenir se résument ainsi:

Quand l'intégrale générale $y(x)$ d'une

équation :

$$F(y'', y', y) = 0$$

dépend rationnellement des constantes (y''_0, y'_0, y_0), cette intégrale s'obtient en remplaçant dans une fonction hyperelliptique $y(u,v)$ [ou dans une telle fonction dégénérée] u par $\lambda x + a$, v par $\mu x + b$, a et b étant des constantes arbitraires, et λ, μ certaines constantes numériques. , ou bien $y(x)$ est une fonction elliptique de x (ou une dégénérescence).

Au lieu d'une équation unique du second ordre, on pouvait aussi bien considérer un système de deux équations du premier ordre

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = G(y,z,t), \quad \frac{dz}{dx} = H(y,z,t), \text{ avec } F(y,z,t) = 0,$$

G et H étant des fonctions rationnelles du point (y, z, t) de la surface algébrique $F = 0$, et inversement t s'exprimant rationnellement en fonction de $y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$. [1] Le théorème s'énonce alors ainsi :

Quand l'intégrale générale $y(x)$, $z(x)$ d'un système (1)' dépend rationnellement des constantes (y_0, z_0, t_0), les fonctions $y(x)$, $z(x)$ s'obtiennent en remplaçant dans deux fonctions hyperelliptiques aux mêmes périodes $y(u,v)$, $z(u,v)$, [ou dans deux telles fonctions dégénérées], les variables u et v par $\lambda x + a$ et $\mu x + b$; ou bien y et z sont deux fonctions elliptiques de x (ou dégénérescences).

Considérons maintenant une équation

$$(1) \qquad F(y'', y', y) = 0$$

dont l'intégrale $y(x)$ renferme algébriquement les constantes

---

(1) Étant donné un système :

$$\frac{dy}{dx} = G(y,z), \quad \frac{dz}{dx} = H(y,z)$$

où G et H sont algébriques en y, z, on peut toujours en posant : $t = \alpha G + \beta H$ (α et β étant des constantes) lui donner la forme (1)'.

y''_0, y'_0, y_0 [valeurs de y'', y', y pour $x = x_0$]

Cette intégrale est alors une fonction $y(x)$ à un nombre fini n de valeurs, et elle vérifie une relation de la forme:

$$(2) \quad 0 = y^n + R_{n-1}(x-x_0, y''_0, y'_0, y_0)y^{n-1} + \dots + R_1(x-x_0, y''_0, y'_0, y_0)y + R_0(x-x_0, y''_0, y'_0, y_0),$$

les R étant des fonctions méromorphes de x et des fonctions rationnelles du point (y''_0, y'_0, y_0) de la surface F. La solution $y(x)$, $y'(x)$, $y''x)$ qui pour $x = x_1$, correspond aux valeurs y_1, y'_1, y''_1, [soit $y = \varphi(x-x_1, y''_1, y'_1, y_1)$, $y' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $y'' = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$], admet au point x_0 n déterminations distinctes, et si y_0, y'_0, y''_0 désignent une quelconque de ces n déterminations, on a quel que soit x (voir pages 240-242):

$$R_i(x-x_1, y''_1, y'_1, y_1) = R_i(x-x_0, y''_0, y'_0, y_0), \quad [i = 0, 1, 2 \dots (n-1)].$$

En particulier on peut écrire en donnant à x_0 la valeur zéro, à y_1 une valeur numérique $\bar{y}_1$:

$$R_i(x-x_1, y''_1, y'_1, \bar{y}_1) = R_i(x, y''_0, y'_0, y_0),$$

avec $y_0 = \varphi(-x_1, y''_1, y'_1, \bar{y}_1)$, $y'_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-x_1, y''_1 y'_1, \bar{y}_1)$, $y''_0 = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(-x_1, y''_1, y'_1, \bar{y}_1)$.

Il est loisible de prendre comme constantes arbitraires soit les deux constantes indépendantes y_0, y'_0, soit les deux constantes x_1, y'_1. Autrement dit, on peut donner aux coëfficients R de la relation (2) soit la forme $R(x, y''_0, y'_0, y_0)$ (rationnelle en y''_0, y'_0, y_0), soit la forme $R(x-x_1, y''_1, y'_1, \bar{y}_1) \equiv r(x+\alpha, b)$, en posant $x_1 = -\alpha$, $y'_1 = b$.

Ce point admis, il existe au moins deux fonctions R qui sont des fonctions indépendantes des deux constantes y'_0, y_0; autrement $y(x)$ ne dépendrait que d'une seule constante. Soit $Y = R_i(x, y''_0, y'_0, y_0)$, $Z = R_j(x, y''_0, y'_0, y_0)$, ces deux fonctions. Si j'élimine les deux constantes indépendantes entre $Y, Z, \frac{dY}{dx}, \frac{dZ}{dx}$, je forme un système:

$$(3) \quad \frac{dY}{dx} = G(Y, Z, x), \qquad \frac{dZ}{dx} = H(Y, Z, x),$$

où G, H sont algébriques en Y, Z. Je dis que G, H ne renferment pas x. En effet, le système (3) peut aussi s'obtenir en éliminant a, b, entre les égalités:

$$Y = r_i(x+a, b), \qquad Z = r_j(x+a, b),$$
$$\frac{dY}{dx} = \frac{\partial r_i}{\partial x}(x+a, b) \qquad \frac{dZ}{dx} = \frac{\partial r_j}{\partial x}(x+a, b),$$

et x se trouve éliminé en même temps que a.

Enfin, si dans les $R(x, y''_0, y'_0, y_0)$, on exprime y_0, y'_0 (et y''_0) en fonction de Y, Z, les R deviennent des fonctions $\rho(Y, Z, x)$ algébriques en Y, Z et qui ne renferment pas x; car ces fonctions ρ peuvent aussi s'obtenir en remplaçant, dans les $r(x+a, b)$, les quantités a, b, (c'est-à-dire $x+a, b$) en fonction de $Y = r_i(x+a, b)$, $Z = r_j(x+a, b)$.

La fonction $y(x)$ est donc une fonction algébrique des fonctions Y, Z définies par le système (3). Comme ces fonctions $Y(x), Z(x)$ renferment les constantes y''_0, y'_0, y_0 (liées par $F=0$) sous forme rationnelle, ce sont des fonctions hyperelliptiques $Y(u, v)$, $Z(u, v)$, qui peuvent être dégénérées (dans lesquelles on a remplacé u par $\lambda x + a$ v par $\mu x + b$), ou des fonctions elliptiques de x (dégénérées ou non). Comme on peut aussi bien considérer, au lieu d'une équation du second ordre $F=0$, deux équations simultanées du premier ordre (1)', le théorème définitif auquel nous arrivons est le suivant:

Soit un système de deux équations différentielles du premier ordre où x ne figure pas explicitement:

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = G(y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = H(y, z).$$

Quand l'intégrale $y(x), z(x)$ d'un tel système dépend algébriquement des constantes y_0, z_0, les fonctions $y(x)$, $z(x)$ sont des fonctions algébriques de $X(u, v)$, $Y(u, v)$, où $u = \lambda x + a$, $v = \mu x + b$;

$X(u,v)$, $Y(u,v)$ désignant soit deux fonctions hyperelliptiques (non dégénérées) aux mêmes périodes, soit un des systèmes suivants :

$$X = u, \qquad Y = v,$$
$$X = e^u, \qquad Y = v,$$
$$X = e^u, \qquad Y = e^v,$$
$$X = \wp(u, g_2, g_3), \qquad Y \begin{cases} = v \\ = v - \frac{\sigma'}{\sigma}(u) \\ = e^v \frac{\sigma(u+h)}{\sigma(u)} \end{cases};$$

$\lambda, \mu, g_2, g_3, h$ représentent des quantités numériques, a et b les deux constantes d'intégration, - ou bien y et z sont des fonctions algébriques de x, ou e^{gx}, ou $\wp(x, g_2, g_3)$ (g, g_2, g_3 étant numériques).

Inversement, tout système de telles fonctions $y(x, a, b)$, $z(x, a, b)$ vérifie un système (A) où x ne figure pas, et dépend algébriquement des constantes y_0, z_0.

Équations différentielles où x figure explicitement.

J'envisage maintenant une équation différentielle

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0$$

où F est (pour x arbitraire) un polynôme irréductible en y'', y', y. Quelle est la nature de l'intégrale $y(x)$ quand elle dépend rationnellement des constantes y''_0, y'_0, y_0 ? Ces constantes sont les valeurs de y'', y', y pour $x = x_0$, et vérifient la relation :

$$0 = F(y''_0, y'_0, y_0, x_0) \equiv F_0.$$

Nous savons (voir pages 250-255) que l'intégrale générale $y(x)$ définit, pour des valeurs fixes quelconques de x et de x_0, une correspondance birationnelle entre les surfaces algébriques $F = 0$, $F_0 = 0$. Nous pouvons donc toujours à l'aide d'une transformation birationnelle T passer de la surface F à la surface F_0 où x_0 a reçu une valeur <u>numérique</u> $\bar{x}_0$, soit la surface $F_0(y''_0, y'_0, y_0) = 0$. De plus il est loisible d'admettre que la transformation T dépend

algébriquement des coefficients de F; car si on écrit explicitement les équations de transformation

$$(2) \qquad y = y_0''^{\,m-1}\, r_{m-1}(x, y_0', y_0, \bar{x}_0) + \ldots, \quad z = y_0''^{\,m-1}\, r''_{m-1}(x, y_0', y_0, \bar{x}_0) + \ldots \text{etc.}$$

en laissant indéterminés les coefficients $b(x)$ des fractions rationnelles r, r'... en y_0', y_0, les conditions pour que la correspondance (2) entre F et F_0 soit birationnelle se traduisent par certains systèmes de relations algébriques entre les $b(x)$ et les coefficients de F. Les valeurs $b = \beta(x)$ qu'il faut donner aux fonctions b pour définir l'intégrale générale de (1), vérifient au moins un de ces systèmes, soit le système (A). Ce système (A) admet donc des solutions $b(x)$ où les $b(x)$ dépendent algébriquement des coefficients de F et coïncident pour $x = \bar{x}_0$ avec les $\beta(x)$, $[b_i(\bar{x}_0) = \beta_i(\bar{x}_0)]$. Nous choisissons comme transformation T la transformation définie par une telle solution $b(x)$ de A. Pour $x = \bar{x}_0$, la transformation T et la transformation qui définit l'intégrale de (1) coïncident l'une et l'autre avec la transformation identique. – Enfin, toutes les correspondances birationnelles entre F et F_0 s'obtiennent en combinant T avec une quelconque des transformations birationnelles de F_0 en elle-même.

Ceci posé, si la surface F_0 ne possède aucun groupe continu fini de transformations birationnelles, nous savons (voir pages 253 - 255) que l'équation (1) s'intègre algébriquement. Si la surface possède un groupe continu fini de transformations birationnelles, elle rentre dans une des trois classes énumérées plus haut (voir page 341), et que nous allons examiner successivement.

1º La surface F_0 est une surface hyperelliptique non dégénérée.

La surface F_0 possède alors deux différentielles totales de première espèce distincte, soit :

$$dJ = P^0(\bar{x}_0, y_0'', y_0', y_0)\, dy_0 + Q^0(\bar{x}_0, y_0'', y_0', y_0)\, dy_0'$$

une de ces différentielles. Si on effectue la transformation T (où x a reçu une valeur numérique arbitraire $\bar{x}$), F_0 se change en F, et dJ devient une différentielle totale de première espèce attachée à F, soit :

$$dJ = P(\bar{x}, y'', y', y)\, dy + Q(\bar{x}, y'', y', y)\, dy',$$ [1]

P et Q dépendant algébriquement des coefficients de F. Considérons maintenant la transformation birationnelle $y = \varphi(x, y_0'', y_0', y_0, \xi)$, $y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $y'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ qui définit l'intégrale de (1); cette transformation peut s'obtenir en effectuant, avant la transformation T, une certaine transformation birationnelle τ qui conserve F_0, transformation qui peut dépendre de $\bar{x}$, mais qui pour $\bar{x} = \bar{x}_0$ coïncide avec la transformation identique. Dans la transformation τ, dJ devient une différentielle totale de première espèce dJ' attachée à F_0 et qui ne saurait dépendre du paramètre continu $\bar{x}$ (voir page), et comme, pour $\bar{x} = \bar{x}_0$, dJ et dJ' coïncident, on voit que dJ ne change pas dans la transformation τ; par suite les fonctions:

(3) $\quad y = \varphi(\bar{x}, y_0'', y_0', y_0, \bar{x}_0)$, $y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{x}, y_0'', y_0', y_0, \bar{x}_0)$, $y'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\bar{x}, y_0'', y_0', y_0, \bar{x}_0)$.

vérifient la relation

(4) $\quad P(\bar{x}, y'', y', y)\, dy + Q(\bar{x}, y'', y', y)\, dy' = P(\bar{x}_0, y_0'', y_0', y_0)\, dy_0 + Q(\bar{x}_0, y_0'', y_0', y_0)\, dy_0'$.

Les périodes du second membre étant indépendantes de x, il en est de même des périodes du premier. L'intégrale $R = \int \frac{\partial P}{\partial x} dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dy'$ est une fonction rationnelle de y'', y', y; si ρ est une des fonctions R, toutes les autres sont de la forme $R = \rho + h(x)$ et nous savons calculer algébriquement (voir page) une de ces fonctions R. Il existe donc une fonction $R(x, y'', y', y)$ rationnelle par rapport à y'', y', y et aux coëfficients de F, P, Q, telle que l'expression:

$$P(x, y'', y', y)\, dy + Q(x, y'', y', y)\, dy' + R(x, y'', y', y)\, dx,$$

où y, y', x sont trois variables indépendantes, soit une différentielle totale exacte, $[F(y'', y', y, x) = 0]$

D'autre part, si dans les relations

$$y_0 = \varphi(\bar{x}_0, y'', y', y, x), \quad y_0' = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(\bar{x}_0, y'', y', y, x), \quad y_0'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2}(\bar{x}_0, y'', y', y, x),$$

nous laissons x variable, la différentielle totale $dJ = P^0 dy_0 + Q^0 dy_0'$ devient une différentielle totale à trois variables indépendantes:

$$P dy + Q dy' + R_1 dx,$$

[1] y et y' sont ici deux variables indépendantes et y'' une troisième variable liée aux deux autres par la relation $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$. La même remarque s'applique à y_0, y_0', y_0''.

et on a : $R_1 \equiv R + h(x)$.

L'équation (1) admet donc une intégrale première de la forme :

$$\int P(x,y'',y',y)\,dy + Q(x,y'',y',y)\,dy' + R(x,y'',y',y)\,dx + \int h(x)\,dx = \int P^0 dy_0 + Q^0 dy_0' = C.$$

Les fonctions P, Q, R, s'obtiennent algébriquement ; h est lui-même connu algébriquement, car, une fois P, Q, R connus, $h(x)$ est donné rationnellement en fonction des coëfficients de F et de P, Q, R. S'il existait en effet deux fonctions distinctes h et h_1, on aurait évidemment :

$$\int [h_1(x) - h(x)]\,dx = C_1 - C = C',$$

ce qui est absurde puisque x est la variable indépendante. En remplaçant $R + h$ par R, on voit en définitive qu'il existe une intégrale première de la forme :

(5) $$\int P(x, y'', y', y)\,dy + Q(x, y'', y', y)\,dy' + R(x, y'', y', y)\,dx = C,$$

P, Q, R étant rationnels en y'', y', y et algébriques par rapport aux coëfficients de F.

Le même raisonnement appliqué à la seconde différentielle totale de première espèce dK montre qu'on a aussi :

(6) $$\int P_1(x, y'', y', y)\,dx + Q_1(x, y'', y', y)\,dy' + R_1(x, y'', y', y)\,dx = C_1,$$

les égalités (5) et (6) devant définir pour y'', y', y des fonctions hyper-elliptiques des constantes C, C'.

On peut préciser ce dernier résultat. Donnons à x une valeur numérique a, et soit $0 = F(Y'', Y', Y, a) \equiv F_0(Y'', Y', Y)$ la surface F correspondante. La transformation T connue algébriquement, [soit $Y = \Phi\,(y'', y', y, x)$, ...] permet de passer birationnellement de F à F_0 et transforme la différentielle totale (5) en une différentielle :

$$\int P(a, Y'', Y', Y)\,dY + Q(a, Y'', Y', Y)\,dY' + \rho(x, Y'', Y', Y)\,dx.$$

Comme les coëfficients de dY, dY' sont indépendants de x, ρ se réduit à une simple fonction de x (qui est d'ailleurs connue algébriquement en fonction des coëfficients de F). De plus,

par une transformation birationnelle où x ne figure plus, on peut aux variables Y'', Y', Y substituer des variables U, V, W obtenues en posant :

$$U = \xi_1 + \xi_2, \; V = \xi_1 \xi_2, \; W = \alpha\sqrt{R(\xi_1)} + \beta\sqrt{R(\xi_2)},$$

$$R(\xi) = (4\xi^3 - g_2\xi - g_3)\,[\xi^2 + n\xi + p]$$

et

$$\int P(Y'', Y', Y)\,dY + Q(Y'', Y', Y)\,dY' = \int^{\xi_1} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \int^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

$$\int P_1(Y'', Y', Y)\,dY + Q_1(Y'', Y', Y)\,dY' = \int^{\xi_1} \frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \int^{\xi_2} \frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

les lettres $\alpha, \beta, g_2, g_3, n, p$ désignent certaines constantes numériques.

En définitive, quand la surface $F=0$ est une surface algébrique non dégénérée, l'équation différentielle se ramène algébriquement au système :

$$\frac{d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \frac{d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}} = h(x)\,dx,$$

$$\frac{\xi_1\,d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \frac{\xi_2\,d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}} = k(x)\,dx,$$

où h, k se calculent algébriquement à l'aide des coëfficients de F. L'intégrale $y(x)$ est une fonction rationnelle de $U = \xi_1 + \xi_2$, $V = \xi_1 + \xi_2$, $W = \alpha\sqrt{R(\xi_1)} + \beta\sqrt{R(\xi_2)}$, fonction qui dépend algébriquement des coëfficients de F. Si on veut encore, $y(x)$ s'obtient en remplaçant dans une fonction hyperelliptique de u, v, soit $\varphi(u, v, x)$ — dont les périodes sont indépendantes de x et qui dépend algébriquement des coëfficients de (1) — les variables u, v, par $\int h(x)\,dx + C_1$, $\int k(x)\,dx + C_2$.

2° — Supposons que la surface $F=0$ rentre dans la classe des surfaces qui possèdent un faisceau de courbes de genre 1, auquel correspond une différentielle totale de première espèce doublement périodique attachée à la surface.

Si $P(\bar{x}, y'', y', y)\,dy + Q(\bar{x}\, y, y', y'')\,dy'$ représente

cette différentielle, le raisonnement employé plus haut montre que l'équation différentielle (1) admet une intégrale première de la forme :

$$\int P(x, y'', y', y)\, dy + Q(x, y'', y', y)\, dy' + R(x, y'', y', y)\, dx = C^{te},$$

les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ de la différentielle $P dy + Q dy'$ étant indépendantes de x. Considérons la différentielle elliptique $\frac{d\theta}{\sqrt{4\theta^3 - g_2\theta - g_3}}$ dont les périodes sont $2\omega_1$, $2\omega_2$, et écrivons l'égalité

$$(i) \qquad \frac{d\theta}{\sqrt{4\theta^3 - g_2\theta - g_3}} = P(\bar{x}, y'', y', y)\, dy + Q(\bar{x}, y'', y', y)\, dy'.$$

Cette égalité est vérifiée quand on remplace θ par une certaine fonction rationnelle $\Phi(y'', y', y)$ qui dépend de x ; quand on écrit cette fonction Φ en laissant ses coëfficients $a(x)$ indéterminés, et quand on remplace θ par Φ, l'égalité (i) entraîne entre les $a(x)$ certaines relations algébriques, qui laissent arbitraire un de ces coëfficients. On peut donc calculer algébriquement (en fonction des coëfficients de (1)) une transformation $\theta = \Phi(y'', y', y, x)$ qui vérifie (i). Si on remplace, dans Φ, y par l'intégrale générale de (1), y' et y'' par $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$, la fonction $\theta(x)$ ainsi obtenue vérifie une relation :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{4\theta^3 - g_2\theta - g_3}} - \varrho(x)\, dx = C^{te},$$

ϱ se calculant algébriquement en fonction des coëfficients de (1).

Si maintenant on élimine y'' entre les équations $F = 0$, $\Phi(y'', y', y, x) = \wp\left[C + \int \varrho(x)\, dx\right]$, on obtient une relation :

$$G(y', y, x) = 0$$

algébrique en y', y, et dont les coëfficients dépendent algébriquement des coëfficients de F et de $R(x) \equiv \wp\left[C + \int \varrho(x) dx\right]$. Les points critiques de cette équation du premier ordre sont fixes par hypothèse : si donc le genre p de la relation $G = 0$ entre

y', y est supérieur à 1, l'équation $G=0$ s'intègre algébriquement ; si $p=1$, y se calcule algébriquement en fonction de $\tau(x)$ et des coëfficients de G, τ étant donné par la relation :

$$\tau = \mathcal{R}_1\left[C' + \int k(x,C)\,dx\right]$$

où k dépend algébriquement des coëfficients de G. Enfin, si p est nul, l'équation $G=0$ se ramène algébriquement à une équation de Riccati.

$$\frac{d\tau}{dx} = \alpha\tau^2 + \beta\tau + \gamma .$$

3°. Supposons que la surface $F=0$ corresponde birationnellement à un cylindre.

Nous pouvons, dans ce cas, exprimer rationnellement y, y' y'' en fonction de t, Y et Z, Y et Z étant liés par une relation algébrique [1]

$$H(Y,Z) = 0 \quad ;$$

soit

$$y = \varphi(t,Y,Z,\bar{x}), \quad y' = \psi(t,Y,Z,\bar{x}), \quad y'' = \chi(t,Y,Z,\bar{x}),$$

avec

$$t = \rho(y'',y',y,\bar{x}), \quad Y = \rho_2(y'',y',y,\bar{x}), \quad Z = \rho_3(y'',y',y,\bar{x}) ;$$

les fonctions φ, ψ, χ sont rationnelles en t, Y, Z, les fonctions ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont rationnelles en y'', y', y ; elles dépendent algébriquement des coëfficients de F. Si nous exprimons que $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{dy'}{dx}$, nous formons un système :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dt}{dx} = M(t,Y,Z,x) \\ \dfrac{dY}{dx} = N(t,Y,Z,x) \end{array} \right.$$

---

[1] Cette relation $H(Y,Z)=0$ peut toujours être supposée indépendante de x, car on peut transformer birationnellement d'abord la surface $F_0 \equiv F(y_0'', y_0', y_0, x_0)=0$ dans le cylindre $H=0$, puis la surface $F(y'',y',y,x)$ dans la surface $F_0=0$.

où M, N sont rationnels en t, Y, Z, leurs coëfficients se calculant algébriquement à l'aide de ceux de F.

Pourque l'intégrale $y(x)$ de (1) dépende rationnellement des constantes y_0, y'_0, y''_0 il faut et il suffit que l'intégrale $t(x)$ $Y(x)$, $Z(x)$ de (1)' dépende rationnellement des constantes t_0, Y_0, Z_0.

Ceci posé, si le genre ϖ de la relation $H(Y,Z)=0$ est plus grand que 1, N est identiquement nul et M est un polynôme en t du second degré au plus. En effet, soit $P(Y)dY$, $P_1(Y)dY$ deux intégrales de première espèce attachées à H; le système (1)' admet (voir plus haut) deux intégrales premières de la forme:

$$J \equiv \int P(Y)\,dY + h(x)\,dx = C,$$
$$J_1 \equiv \int P_1(Y)\,dY + k(x)\,dx = C';$$

ces deux intégrales premières doivent être fonctions l'une de l'autre, autrement elles détermineraient x (et Y) en fonction de C, C'; on doit donc avoir: $kP - hP_1 \equiv 0$, ce qui n'est possible que si k et h sont nuls; $Y = Y_0$ est donc une intégrale première de (1)'.

Si maintenant on remplace Y et Z par Y_0, Z_0 (qui vérifient $H(Y_0, Z_0) = 0$), la première équation (1)' doit se réduire à une équation de Riccati.

Quand le genre ϖ de H est égal à 1, on peut supposer la relation $H = 0$ mise sous la forme:

$$Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3.$$

La fonction $Y(x)$ vérifie alors la relation:

$$\frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - g_2 Y - g_3}} = h(x)\,dx,$$

où h est connu algébriquement. Quant à M, c'est un polynôme du second degré en t, puisque la première équation (1)' où on remplace Y et Z par $\wp(R+C)$, $\wp'(R+C)$, [avec $R = \int h(x)dx$], doit être une

équation de Riccati.

Reste enfin le <u>cas où ϖ est nul</u>. La surface $F=0$ est alors uniformément unicursale, et on peut exprimer y, y', y'' en fonction rationnelle de deux paramètres t, u, soit

$$y=\varphi(t,u,x), \quad y'=\psi(t,u,x), \quad y''=\chi(t,u,x),$$

avec $\quad t=\rho_1(y'',y',y,x), \qquad u=\rho_2(y'',y',y,x)$;

les fonctions φ, ψ, χ sont rationnelles en t, u; les fonctions ρ_1, ρ_2 sont rationnelles en y'', y', y; elles dépendent algébriquement des coëfficients de F.

Si on exprime que $y'=\frac{dy}{dx}$, $y''=\frac{dy'}{dx}$, on ramène algébriquement l'équation (1) au système:

$$(1)' \quad \begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = M(t,u,x) \\ \dfrac{du}{dx} = N(t,u,x) \end{cases}$$

où M, N sont rationnels en t, u. Pour que l'intégrale $y(x)$ de (1) dépende rationnellement des constantes y_0, y_0', y_0'', il faut et il suffit que l'intégrale $t(x), u(x)$ de $(1)'$ dépende rationnellement des constantes t_0, u_0..

Quand il en est ainsi, on peut mettre l'intégrale sous la forme:

$$C=\alpha(t,u,x) \qquad C_1=\beta(t,u,x),$$

α et β étant rationnels en t, u et t, u étant rationnels en C, C_1, (C et C_1 représentent par exemple les valeurs t_0 et u_0 de t et u pour $x=x_0$).. Moyennant une transformation homographique effectuée sur les deux constantes C, C_1, il est loisible d'admettre que les deux fractions rationnelles α, β en t, u (mises sous forme irréductible), ont même dénominateur; écrivons donc:

$$\alpha=\frac{A_2(t,u,x)}{A_1(t,u,x)}, \qquad \beta=\frac{A_3(t,u,x)}{A_1(t,u,x)},$$

en représentant par A_1, A_2, A_3 trois polynômes en t, u d'un

certain degré.

L'égalité $A_2 = 0$ est une intégrale première particularisée ; autrement dit, l'expression

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial t} M + \frac{\partial A_2}{\partial u} N$$

est divisible par A_2 ; si on pose $M \equiv \frac{L_2}{L_1}$, $N = \frac{L_3}{L_1}$, L_1, L_2, L_3 étant trois polynômes (de degré m) en t, u, on peut écrire :

$$L_1 \frac{\partial A_2}{\partial x} + L_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} + L_3 \frac{\partial A_2}{\partial u} \equiv \lambda_2 A_2 ,$$

λ_2 désignant un polynôme en t, u de degré $m-1$ (qui dépend de x) - Une remarque analogue s'applique à A_1, .

$$L_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + L_2 \frac{\partial A_1}{\partial t} + L_3 \frac{\partial A_1}{\partial u} \equiv \lambda_1 A_1 ,$$

et comme $\frac{A_2}{A_1}$ est une intégrale première, l'expression

$$\frac{1}{A_2}\left[L_1 \frac{\partial A_2}{\partial x} + L_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} + L_3 \frac{\partial A_2}{\partial u}\right] - \frac{1}{A_1}\left[L_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + L_2 \frac{\partial A_1}{\partial t} + L_3 \frac{\partial A_1}{\partial u}\right],$$

ou $(\lambda_2 - \lambda_1)$ est identiquement nulle. Autrement dit, A_1 et A_2 vérifient identiquement l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$(d) \qquad L_1 \frac{\partial A}{\partial x} + L_2 \frac{\partial A}{\partial t} + L_3 \frac{\partial A}{\partial u} = \lambda(t, u, x)\, A ,$$

où λ est un certain polynôme en t, u de degré $m-1$. Le raisonnement montre que A_3 vérifie aussi l'équation (d).

Inversement si deux polynômes en t, u, de degré ν, soit $B_1(t, u, x)$, $B_2(t, u, x)$, vérifient une équation :

$$(d)' \qquad L_1 \frac{\partial B}{\partial x} + L_2 \frac{\partial B}{\partial t} + L_3 \frac{\partial B}{\partial u} = \Lambda(t, u, x)\, B ,$$

le rapport $\frac{B_2}{B_1}$ définit une intégrale première de $(1)'$.

La Condition nécessaire et suffisante pour que l'expression $\frac{B_2(t, u, x)}{B_1(t, u, x)}$ [où B_2, B_1 désignent deux polynômes en t, u, premiers entre eux] soit une intégrale première de $(1)'$ est donc que B_2, B_1 vérifient la <u>même équation (d')</u>.

Ceci posé, ν désignant le degré en t, u des polynômes A_1, A_2, A_3, considérons l'intégrale première $\frac{B_2}{B_1}$, de degré ν en t, u, la plus générale. Cette intégrale dépend algébriquement d'un certain nombre de constantes arbitraires : en effet, $\frac{B_2}{B_1}$ s'exprime rationnellement en fonction de C, C_1 ; on a :

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{R_2(A_1, A_2, A_3)}{R_1(A_1, A_2, A_3)},$$

où R_2, R_1 sont des polynômes homogènes en A_1, A_2, A_3, premiers entre eux et de degré au plus égal à ν.[1] Pour que la fraction $\frac{R_2}{R_1}$ de (t, u), rendue irréductible, soit de degré ν, il faut et il suffit que les coefficients de R_2, R_1 satisfassent à certaines conditions algébriques, qui définissent ces coefficients en fonction algébrique d'un certain nombre d'entre eux. Il peut se faire que ces conditions se décomposent en plusieurs systèmes séparés : chacun de ces systèmes définit une intégrale première $\frac{B_2(t, u, x, a_1, \dots a_j)}{B_1(t, u, x, a_1, \dots a_j)}$ qui dépend algébriquement d'un certain nombre j de constantes arbitraires, [j est au moins égal à 3, puisqu'il est loisible d'effectuer sur $\frac{B_2}{B_1}$ une transformation homographique]. Les fonctions B_1, B_2 satisfont respectivement à la même équation $(d)'$ où $\Lambda(t, u, x)$ peut dépendre de $a_1, \dots a_j$; je vais montrer que Λ est nécessairement de la forme :

$$\Lambda(t, u, x, a_1, \dots a_j) \equiv \Lambda_0(t, u, x) + h(x, a_1, \dots a_j) I_1 .$$

Pour démontrer cette proposition, je ferai d'abord quelques remarques sur la transformation de Cremona que définissent (pour x constant) les égalités :

$$(e) \qquad C = \frac{A_2(t, u, \bar{x})}{A_1(t, u, \bar{x})}, \qquad C_1 = \frac{A_3(t, u, \bar{x})}{A_1(t, u, \bar{x})}$$

entre les deux plans dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement (t, u) et (C, C_1).

---

[1] En effet, pour $x = x_0$, $\frac{B_2}{B_1}$ est au plus de degré ν en t_0, u_0, donc en C, C_1 qui se déduisent homographiquement de t_0, u_0.

Soit $P(t, u, \bar{x}) = 0$ une courbe algébrique irréductible du premier plan ; si cette courbe ne fait pas partie de la courbe $A_1 = 0$, non plus que de la courbe $\Delta = 0$, Δ désignant le déterminant fonctionnel $\frac{D(C, C_1)}{D(t, u)}$, je dis qu'à la courbe $P = 0$ correspond point par point une courbe [1] algébrique irréductible $\Pi(C, C_1, \bar{x}) = 0$ du plan des C, C_1. La chose est évidente si on sait que le point (C, C_1) ne reste pas fixe quand (t, u) parcourt la courbe $P = 0$; or, soit $(\bar{t}, \bar{u})$ un point quelconque de la courbe $P = 0$, [pour lequel ni A_1, ni Δ ne sont nuls] et $\bar{C}$, $\bar{C}_1$, les valeurs correspondantes de C, C_1 ; les égalités (e) définissent un système (et un seul) de fonctions $t(C, C_1, \bar{x})$, $u(C, C_1, \bar{x})$ qui, pour $C = \bar{C}$, $C_1 = \bar{C}_1$, sont holomorphes et égales respectivement à $\bar{t}, \bar{u}$. Il est donc impossible que C, C_1 gardant les valeurs $\bar{C}, \bar{C}_1$, le point (t, u) parcourt la courbe $P = 0$.

D'après cela, soit $P(t, u, \bar{x}) = 0$, $P'(t, u, \bar{x}) = 0$ deux courbes algébriques irréductibles et distinctes qui ne font partie ni de la courbe $A_1 = 0$, ni de la courbe $\Delta = 0$; à ces deux courbes correspondent, point par point, deux courbes $\Pi(C, C_1, \bar{x}) = 0$, $\Pi'(C, C_1, \bar{x}) = 0$ qui sont distinctes : Autrement, à un point variable (C, C_1) de la courbe $\Pi = 0$ correspondraient deux points variables (t, u), ce qui est absurde puisque la transformation (e) est crémonienne.

Ces remarques faites, considérons l'identité :

$$(f) \qquad \frac{B_2(t, u, x, a_1 \ldots\ldots a_j)}{B_1(t, u, x, a_1 \ldots\ldots a_j)} \equiv \frac{R_2(A_1, A_2, A_3, a_1, \ldots\ldots a_j)}{R_1(A_1, A_2, A_3, a_1, \ldots\ldots a_j)}$$

Les polynômes R_2, R_1 en A_1, A_2, A_3 étant premiers entre eux, il nous est loisible d'admettre que R_2 et R_1 sont indécomposables ; car on peut remplacer R_2 par $R_2 + cR_1$, en même temps que B_2 par $B_2 + cB_1$. Pour la même raison, les courbes $B_2 = 0$, $B_1 = 0$ sont irréductibles et dépendent effectivement des constantes $a_1, \ldots a_j$. — Si maintenant dans R_2, R_1 on remplace A_1, A_2, A_3 par leurs expressions en t, u, R_2 et R_1 deviennent deux polynômes ϱ_1 et ϱ_2

[1] Au contraire, si la courbe $P = 0$ fait partie de la courbe $\Delta = 0$, le point C, C_1 reste fixe quand (t, u) parcourt la courbe $P = 0$.

en t, u et l'identité (f), où $\frac{B_2}{B_1}$ est irréductible, entraîne les conséquences

$$\rho_2 \equiv B_2 \, H(t, u, x, a_1, \dots a_j), \quad \rho_1 \equiv B_1 \, H(t, u, x, a_1, \dots a_j),$$

où H est un polynome en t, u. Je dis que H est de la forme

$$H \equiv k(x, a_1, \dots a_j) \quad H_1(t, u, x).$$

En effet, décomposons H en polynômes irréductibles :

$$H = k(x, a_1, \dots a_j) \; B_1^{s_1} B_2^{s_2} H_1^{r_1} \dots\dots H_l^{r_l}.$$

Je dis d'abord que les courbes $H_i = 0$ font partie de la courbe $A_1 = 0$ ou de la courbe $\Delta = 0$. En effet à la courbe $B_2 = 0$ [qui, dépendant de constantes, ne fait pas partie des courbes $A_1 = 0$, $\Delta = 0$], la transformation (c) fait correspondre une courbe irréductible $\pi(c, c_1, \bar{x}) = 0$ qui se confond nécessairement avec la courbe irréductible $R_2(1, C, C_1) = 0$. Si $H_i = 0$ ne fait pas partie des courbes $A_1 = 0$, $H = 0$, à la courbe $H_i = 0$ correspond une courbe $\pi'(c, c_1, \bar{x}) = 0$, distincte de la précédente, et π' devrait être en facteur dans $R_2(1, C, C_1)$, ce qui est absurde. De même l'exposant s_1 de B_1 est nul, autrement $R_1(1, C, C_1)$ devrait diviser $R_2(1, C, C_1)$. En raisonnant sur B_1 comme sur B_2, on voit enfin que l'exposant s_2 est nul. On a donc bien :

$$H \equiv k(x, a_1, \dots a_j) H_1(t, u, x),$$

la courbe $H_1 = 0$ faisant partie des courbes $A_1 = 0$, $\Delta = 0$.[1]

Ce point établi, on a les relations :

$$L_1 \frac{d}{dx} B_2 = \Lambda B_2,$$

$$L_1 \frac{d}{dx} \rho_2 = L_1 \left[\frac{\partial R_2}{\partial A_1} \frac{dA_1}{dx} + \frac{\partial R_2}{\partial A_2} \frac{dA_2}{dx} + \frac{\partial R_2}{\partial A_3} \frac{dA_3}{dx} \right];$$

et comme $L_1 \frac{dA_1}{dx} = \lambda A_1$, etc, on peut écrire :

$$L_1 \frac{d}{dx} \rho_2 = \lambda \left(\frac{\partial R_2}{\partial A_1} A_1 + \frac{\partial R_2}{\partial A_2} A_2 + \frac{\partial R_2}{\partial A_3} A_3 \right) \equiv \varpi \lambda \rho_2;$$

[1] On peut préciser beaucoup la nature et le rôle de ce facteur $H(t, u, x)$, et c'est là une question très importante quand on se propose de reconnaître effectivement si l'intégrale d'un système (1) donné dépend rationnellement des constantes, mais je me borne ici aux indications essentielles.

ϖ désignant le degré du polynôme R_2 en A_1, A_2, A_3. D'autre part on a :

$$I_1 \frac{d}{dx} \log H = I_1 \frac{d}{dx} \log \rho_2 - I_1 \frac{d}{dx} \log B_2 = \varpi\lambda - \Lambda,$$

et en même temps :

$$I_1 \frac{d}{dx} \log . H = I_1 \frac{k'(x, a_1, \dots a_j)}{k(x, a_1, \dots a_j)} + I_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + I_2 \frac{\partial H_1}{\partial t} + I_3 \frac{\partial H_1}{\partial u}$$
$$\equiv I_1 \frac{k'(x, a_1, \dots a_j)}{k(x, a_1, \dots a_j)} + \mu(t, u, x).$$

Il vient donc :

$$\Lambda = \varpi\lambda - \mu - I_1 \frac{k'}{k} \equiv \Lambda_0(t, u, x) + I_1 h(x, a_1, \dots a_j).$$

C.Q.F.D.

Remarquons qu'il est loisible de multiplier B_2 et B_1 par une fonction arbitraire de x, soit $g(x)$. Si on pose $B_2' = B_2\, g(x)$, on a :

$$I_1 \frac{d}{dx} \log B_2' = I_1 \frac{d}{dx} \log B_2 + I_1 \frac{g'}{g} = \Lambda + I_1 \frac{g'}{g} \equiv \Lambda';$$

comme on peut toujours admettre que I_1 n'est pas nul identiquement pour $t=0$, $u=0$, la fonction arbitraire g permet d'annuler, dans le polynôme Λ' en t, u, le terme constant. L'intégrale $\frac{B_2}{B_1}$ se laisse donc définir par le quotient $\frac{B_2}{B_1}$ de deux solutions B_2, B_1 d'une équation $(d)'$, où Λ est nul identiquement pour $t=0$, $u=0$. — Moyennant cette restriction Λ est indépendant des constantes $a_i, \dots a_j$. En effet, soit Λ et Λ_1 deux déterminations de Λ qui correspondent à des valeurs différentes des constantes $a_1, \dots a_j$. La différence $(\Lambda - \Lambda_1)$ est nulle identiquement pour $t=0$, $u=0$; d'autre part elle est égale à

$$\left[h(x, a_1, \dots a_j) - h(x, a_1', \dots a_j')\right] I_1,$$

et cette dernière expression n'est nulle identiquement pour $t=0$, $u=0$ que si le coefficient de I_1 est identiquement nul.

En définitive, toutes les intégrales premières de $(1)'$ rationnelles en t, u et de degré ν, appartiennent à un nombre fini de types tels que $\frac{B_2(t, u, v, a_1, \dots a_j)}{B_1(t, u, v, a_1, \dots a_j)}$, et chacun de ces types s'obtient en prenant pour B_2, B_1 deux solutions quelconques de la même équation $(d)'$,

où Λ est indépendant de constantes (et s'annule pour $t=0$, $u=0$). De là ce théorème :

Il existe un nombre fini de polynômes Λ de degré $(m-1)$ en t, u (et nuls pour $t=0$, $u=0$), tels que l'équation linéaire (d) admette au moins deux solutions B linéairement distinctes qui soient des polynômes en t, u de degré ν. Ces polynômes Λ se calculent donc algébriquement.[1] A chacun de ces polynômes Λ, correspond une solution $a_1 B_1 + a_2 B_2 + \dots + a_i B_i$, $(i \geq 2)$ où les B sont des polynômes en t, u de degré ν entre lesquels n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants. L'intégrale première correspondante la plus générale est

$$\frac{a_1 B_1 + \dots\dots + a_i B_i}{a'_1 B_1 + \dots\dots + a'_i B_i}$$

En particulier, la fonction λ qui figure dans l'équation (d) s'obtient algébriquement, et l'équation (d) admet au moins trois solutions A_1, A_2, A_3 linéairement indépendantes. Nous voyons donc que la recherche des deux intégrales :

$$(e) \qquad C = \frac{A_2}{A_1}, \qquad C_1 = \frac{A_3}{A_1}$$

revient à l'intégration d'une certaine équation linéaire[2], dont l'ordre est au moins égal à 3. Si des relations (e) on tire t, u, on voit que t, u s'expriment algébriquement à l'aide des coefficients de (1)', de leurs dérivées et des intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène, qui se déduit algébriquement du système (1)'.

Remarquons que, si l'ordre de l'équation différentielle en question dépasse trois, elle jouit d'une propriété remarquable : car soit A_1, A_2, A_3, A_4 quatre solutions quelconques de l'équation (d) ; ces solutions vérifient

---

(1) Si on exprime qu'une équation (d) admet deux solutions B linéairement distinctes qui soient des polynômes, de degré ν, en t, u, on forme certaines relations algébriques entre les coefficients inconnus de B, de Λ, leurs dérivées, et les coefficients de L_1, L_2, L_3. Ces relations sont compatibles et définissent Λ sans constante, donc algébriquement à l'aide des coefficients du système (1)' (et de leurs dérivées).

(2) Si on met en évidence les coefficients du polynôme A, de degré ν en t, u, ces coefficients vérifient un certain système différentiel qui les définit en fonction linéaire et homogène de i constantes, et qui équivaut à une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre i.

une relation algébrique homogène $\Pi(A_1, A_2, A_3, A_4)$, puisque $\frac{A_4}{A_1}$ s'exprime algébriquement en $\frac{A_2}{A_1}$, $\frac{A_3}{A_1}$. En s'appuyant sur certains théorèmes généraux de M. Sophus Lie, on peut tirer de cette propriété la conclusion suivante :

« Quand la relation $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$, en y'', y', y, est uniformément « unicursale, si l'intégrale générale $y(x)$ dépend rationnellement des constantes y_0'', y_0', y_0, « elle s'exprime algébriquement en fonction des coefficients[1] de (1), et de deux « fonctions $t(x)$, $u(x)$, les fonctions t, u représentant soit les deux premières dérivées « logarithmiques $\frac{\theta'}{\theta}$, $\left(\frac{\theta''}{\theta} - \frac{\theta'^2}{\theta^2}\right)$ de l'intégrale θ d'une équation linéaire et homogène du « troisième ordre,

$$\theta''' + g(x)\,\theta' + h(x)\,\theta = 0, \qquad \text{(où } g, h \text{ sont connus algébriquement)},$$

« soit les intégrales de deux équations de Riccati

$$\frac{dt}{dx} = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, \qquad \frac{du}{dx} = \alpha_1 u^2 + \beta_1 u + \gamma_1,$$

« où α, β, γ se calculent algébriquement d'après (1) et où $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ dépendent « algébriquement de $t(x)$. »

Mais je ne développerai pas ici la démonstration de ce théorème qui est assez longue. Je me borne au résultat obtenu précédemment : dans le dernier cas considéré, l'équation (1) se ramène algébriquement à une équation linéaire.

Remarques.

— Je compléterai la discussion précédente par quelques remarques.

I — Insistons d'abord sur le cas 3° (voir page 367) où la surface $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$ correspond birationnellement à un cylindre $H(Y, Z) = 0$ sans être uniformément unicursale. Si le genre ϖ de la section droite du cylindre est plus grand que 1, y s'exprime en fonction rationnelle de t et en fonction algébrique des coefficients de F et d'une constante C ; la fonction $t(x)$ est donnée par une équation de Riccati

$$(1)' \quad \frac{dt}{dx} = \alpha t^2 + \beta t + \gamma,$$

où α, β, γ dépendent algébriquement des coefficients de F et de C ; la constante C est elle-même algébrique en y_0, y_0'. Mais toute équation (1) qui s'intègre de cette manière n'a pas nécessairement ses points critiques ou essentiels fixes : il faut pour

[1] et de leurs dérivées. La même remarque peut être répétée dans tout ce qui suit.

cela que les points singuliers, variables avec C, des coefficients $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$, soient des pôles ou des points ordinaires de $t(x)$. Cette première condition remplie, pour que l'équation (1) soit de l'espèce étudiée, il faut en outre que l'intégrale de (1)″, à savoir $t(x)=\chi(x; t_0, \bar{x}_0, C)$ dépende algébriquement de C. Précisons ces conditions.

Tout d'abord, en changeant t en $-\frac{t_1}{\alpha}$, on peut supposer α égal à -1. En changeant ensuite t en $t_1+\frac{\beta}{2}$, on peut supposer β nul. Il est donc loisible de donner à l'équation (1)″ la forme :

$$(1)'' \qquad \frac{dt}{dx} = -t^2 + \gamma(x, C).$$

On sait exprimer algébriquement que les points singuliers, variables avec C, de $\gamma(x, C)$, points qui sont des pôles de γ[1], sont des pôles de l'intégrale $t(x)$, [ce ne peuvent être des points réguliers de $t(x)$] : les conditions en question s'obtiennent aisément soit en étudiant directement l'équation (1)″, soit en appliquant les théorèmes de M. Fuchs à l'équation linéaire (voir 2e Leçon, page (29) :

$$(2) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} - \gamma(x, C)\, v = 0 .$$

Ces conditions remplies, l'intégrale $y(x)$ a ses points critiques fixes, par suite c'est une fonction uniforme de y_0'', y_0', y_0 ; pour qu'elle dépende rationnellement de ces variables, il faut et il suffit que la fonction $t=\chi(x, t_0, \bar{x}_0 C)$ définie par (1)″, considérée comme fonction de C, n'ait pas de singularités essentielles. Il faut pour cela et il suffit qu'aucune valeur de C (finie ou infinie) ne rende γ infini quel que soit x ; car soit $C=0$ par exemple un pôle de γ pour x quelconque, si on développe l'intégrale générale $v(x)$ de l'équation linéaire (2), soit

$$v(x) = v_0 + v_0'(x-x_0) + \sum \varrho_i(C, v_0, v_0', x_0)(x-x_0)^i,$$

un calcul élémentaire montre que $C=0$ est un pôle des ϱ_i dont l'ordre croît indéfiniment avec i ; $C=0$ est donc singularité essentielle de $v(x)$[2], par suite

---

[1] En effet, $\gamma(x, C)$ est de la forme $\gamma(x, Y_0, Z_0)$ où γ est rationnel en Y_0, Z_0, liés par $H(Y_0, Z_0)$.

[2] Si la fonction $v(x, v_0, v_0', \bar{x}_0, C)$ admet le point $C=0$ comme point polaire d'ordre m (m étant un nombre positif, fractionnaire ou nul), le développement de $V(x)$ en série de Taylor ne renferme pas de coefficients pour lesquels $C=0$ soit pôle d'ordre supérieur à m :

de $t(x,t_0,\bar{x}_0,C)$, [car si $t(x,t_0,\bar{x}_0,C)$ est algébroïde pour $C=0$, il en est de même de $v(x,v_0,v'_0,\bar{x}_0,C)$ qui se déduit algébriquement de l'intégrale de (1)"]. D'ailleurs si pour $C=C_0$ (ou $=\infty$), y n'est pas infinie quel que soit x, on voit aussitôt que $v(x,v_0,v'_0,\bar{x}_0,C)$ est algébroïde pour $C=C_0$. D'où ce théorème :

Pour que l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1) dépende rationnellement des constantes, il faut et il suffit 1° que, dans l'équation (1)", $\gamma(x,C)$ ne devienne infini (quel que soit x) pour aucune valeur finie ou infinie de C ; 2° que les pôles $x=x_1$ de $\gamma(x,C)$, variables avec C, soient des pôles de $t(x)$.

Quand le genre ϖ de la section droite du cylindre $H(Y,Z)=0$ est égal à 1, des observations analogues s'appliquent : L'intégrale $y(x)$ de (1) s'exprime rationnellement en fonction de t, $p(u)$, $p'(u)$ et des des coëfficients de (1), u étant donné par une quadrature $u=C+\int k(x)dx$, et t vérifiant une équation de Riccati :

$$(1)' \qquad \frac{dt}{dx}=\alpha t^2+\beta t+\gamma\,;$$

$k(x)$ se calcule algébriquement à l'aide des coefficients de (1), et α,β,γ sont des fonctions rationnelles de p, p' qui dépendent algébriquement des coefficients de (1).

Les coefficients α,β,γ sont, d'après cela, des fonctions rationnelles des deux constantes $c=p(C)$, $c'=p'(C)$, liées par la relation $c'^2=4c^3-g_2c-g_3$, où g_2,g_3 sont numériques. On peut, comme plus haut, ramener l'équation (1)' à la forme

$$\frac{dt}{dx}=-t^2+\gamma(x,c,c').$$

Pour que l'intégrale $y(x)$ dépende rationnellement des constantes, il faut et il suffit 1° que $\gamma(x,c)$ ne devienne infini pour aucune valeur de c (finie ou non) indépendante de x, 2° que les pôles $x=x_1$ de γ (variables avec c) soient des pôles de l'intégrale $t(x)$.

Une remarque analogue s'applique au système de

deux équations de Riccati :

$$\frac{dt}{dx} = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, \quad \frac{du}{dx} = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1$$

introduit à la page 375. Il est loisible de donner à ces deux équations la forme :

$$\frac{dt}{dx} = -t^2 + \gamma_1, \qquad \frac{du}{dx} = -u^2 + \gamma_1 \ ;$$

γ est connu algébriquement, γ_1 dépend rationnellement de t ; γ_1 est donc de la forme $\gamma_1(x, C)$ et les deux conditions énoncées plus haut doivent être encore remplies.

II. — Revenons maintenant sur le cas 2° (page 365) où la surface $F=0$ possède une famille de courbes de genre 1 et une différentielle totale de première espèce à deux périodes.

Donnons à x une valeur numérique a, et considérons la relation $F(\alpha,\beta,\gamma,a) = 0 \equiv F_1(\alpha,\beta,\gamma)$. Les intégrales premières de l'équation (1) :

$$\alpha = r(y'',y',y,x), \quad \beta = r_1(y'',y',y,x), \quad \gamma = r_2(y'',y',y,x)$$

qui vérifient la relation $F_1 = 0$ et établissent une correspondance birationnelle entre les surfaces $F_1 = 0$ et $F(y'',y',y,\bar{x}) = 0$, dépendent (quand elles ne s'obtiennent pas algébriquement) d'un système différentiel (Σ) tel que toute solution α, β, γ de ce système se déduit d'une solution particulière quelconque $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ par les substitutions birationnelles d'un groupe continu fini G qui conserve la surface F_1 (voir pages 253-255) ; G renferme algébriquement ses paramètres.

Si G ne dépend que d'un paramètre, toutes les substitutions vérifient une relation de la forme :

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0),$$

où R est rationnel. D'après cela, soit

$$\alpha_0 = r^0(y'',y',y,x), \ \beta_0 = r_1^0(y'',y',y,x), \ \gamma_0 = r_2^0(y'',y',y,x)$$

une solution de (Σ), et $R_1(y'',y',y,x)$ ce que devient $R(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ quand on y remplace $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ par r^0, r_1^0, r_2^0. Toutes les solutions (α,β,γ) de Σ

vérifient la même relation:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_1(y'',y',y,x).$$

L'expression $R(\alpha,\beta,\gamma)$ ne dépend donc pas des constantes d'intégration qui entrent dans α,β,γ, et par suite se calculent algébriquement d'après le système (Σ), c'est-à-dire d'après l'équation (1) donnée. Il existe donc une intégrale première de (1)

$$R_1(y'',y',y,x) = C$$

(rationnelle en y, y', y'') qui se calcule algébriquement. — D'autre part, dans le cas 2° qui nous occupe, il est loisible d'exprimer y'', y', y en fonction rationnelle de $\theta, \sqrt{4\theta^3-g_2\theta-g_3}$ et en fonction algébrique de Z, et θ vérifie l'égalité:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{4\theta^3-g_2\theta-g_3}} = \int h(x)\,dx + C'.$$

Il suit de là aussitôt que $y(x)$ est une fonction rationnelle de $\wp(u), \wp'(u)$, où $u = \int h(x)\,dx + C'$, fonction qui dépend algébriquement d'une seconde constante C; $h(x)$ se calcule algébriquement d'après (1).

Si le groupe G dépend de ϱ paramètres, considérons tous les sous groupes permutables contenus dans G. Si un de ces sous-groupes est transitif, la surface $F=0$ est hyperelliptique, et on rentre dans les cas élucidés 3° ou 1° suivant que $F=0$ est une surface hyperelliptique dégénérée ou non. Supposons donc que tous les sous-groupes permutables soient intransitifs. Dans ce cas, chacun de ces sous-groupes (et en particulier chaque sous-groupe G_1 à un paramètre) vérifie une relation

$$(\alpha) \qquad R(\alpha,\beta,\gamma) = R(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$$

où R est rationnel. Quand un des faisceaux $R(\alpha,\beta,\gamma) = C^{te}$ (tracés sur F_1) est formé d'unicursales, on rentre dans le cas 3° où la surface $F=0$ correspond birationnellement à un cylindre. Plaçons nous dans l'hypothèse où une quelconque des familles $R(\alpha,\beta,\gamma) = C^{te}$ est formée de courbes du genre 1, et montrons que l'hypothèse est absurde.

Les groupes G_1 dépendent algébriquement de $\varrho-1$ coefficients arbitraires, soit $c_2, c_3 \ldots c_\varrho$. Désignons par G_1^0 un des groupes G_1 bien déterminé,

[soit le groupe $c_2=0,\dots c_\rho=0$], par G_1 un quelconque de ces groupes. A G_1^0 et à G_1 correspondent deux différentielles totales de première espèce attachées à la surface F_1, qui n'ont que deux périodes, soit dJ_0, dJ; de plus J n'est pas constant le long d'une courbe quelconque du faisceau $R(\alpha,\beta,\gamma)=C^{te}$ que conserve le groupe G_1. Il nous est loisible d'exprimer α,β,γ en fonction rationnelle de $\theta, \sqrt{4\theta^3-g_2\theta-g_3}$ et de z, Z [liés par une relation algébrique $H(z,Z)=0$], de façon que dJ_0 se confonde avec $\dfrac{d\theta}{\sqrt{4\theta^3-g_2\theta-g_3}}$; dJ est nécessairement de la forme $\dfrac{\lambda\, d\theta}{\sqrt{4\theta^3-g_2\theta-g_3}}+h(z,Z)\,dz$, la fonction h pouvant dépendre de $c_2,\dots c_\rho$, et s'annulant pour $c_2=0,\dots c_\rho=0$. Je dis que l'expression $\frac{h}{\lambda}$ est indépendante de $c_2,\dots c_\rho$, et par suite identiquement nulle. En effet considérons la différentielle $\dfrac{h(z,Z,c_2,\dots c_\rho)\,dz}{\lambda(c_2,\dots c_\rho)}$; ses périodes sont indépendantes de $c_2,\dots c_\rho$ puisqu'elles doivent avoir un parallélogramme commun avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ de dJ_0. Il suit de là que la différentielle

$$\left[\frac{h(z,Z,c_2,\dots c_\rho)}{\lambda(c_2,\dots c_\rho)}-\frac{h(z,Z,c_2',\dots c_\rho')}{\lambda(c_2',\dots c_\rho')}\right]$$

n'a pas de périodes, et comme elle est de première espèce, elle est identiquement nulle. Donc dJ se réduit à $\dfrac{d\theta}{\sqrt{4\theta^3-g_2\theta-g_3}}$.

D'autre part à chaque groupe G_1 correspond un groupe G_1' de substitutions qui transforment θ_0, z_0 (valeurs correspondantes à $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$) en θ, z (valeurs correspondantes à α,β,γ). Un tel groupe G_1' est défini par un système de la forme:

$$(i)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt}=C_1\xi_1(\theta,z)+C_2\xi_2(\theta,z)+\dots\dots+C_\rho\xi_\rho(\theta,z)\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=C_1\eta_1(\theta,z)+C_2\eta_2(\theta,z)+\dots\dots+C_\rho\eta_\rho(\theta,z),\end{cases}$$

où ξ,η désignent des fonctions algébriques de θ, z, les C des constantes numériques arbitraires, et t le paramètre du groupe.

Mais le même groupe vérifie la relation :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{4\theta^3-g_2\theta-g_3}}=\frac{dt}{\lambda}$$

où λ est une constante différente de zéro (autrement θ, et par suite J seraient

constants le long de chaque courbe $R = C^{te}$). Les équations (i) sont donc de la forme :

$$\frac{d\theta}{dt} = C_1 \sqrt{4\theta^3 - g_2\theta - g_3}$$

$$\frac{dz}{dt} = C_1\ \eta_1(\theta, z) + C_2\,\eta_2(\theta, z) + \dots\dots + C_\varrho\,\eta_\varrho(\theta, z)\ ;$$

mais $\eta_2, \dots \eta_\varrho$ sont identiquement nuls ; car soit $\eta_2 \neq 0$, le groupe G_1' défini par

$$\frac{d\theta}{dt} = 0\,, \qquad \frac{dz}{dt} = \eta_2(\theta, z)$$

laisserait θ et, par suite, J constant ; J serait donc constant le long de chaque courbe $R(\alpha, \beta, \gamma) = C^{te}$ que conserve le groupe correspondant G_1. Il suit de là que l'hypothèse $\varrho > 1$ est absurde.

En définitive tous les cas 2° qui ne rentrent pas dans les cas 1° ou 3° se réduisent au seul cas où l'intégrale $y(x)$ est une fonction rationnelle de $\wp(u+c)$, $\wp'(u+c)$, et une fonction algébrique d'une autre constante C', u étant donné par une quadrature $\int h(x)\,dx$.

Théorème général —

Les résultats précédents se résument ainsi :

Quand l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation (1) donnée

(1) $$F(y'', y', y, x) = 0$$

(où F est un polynôme en y'', y', y), dépend rationnellement des constantes y_0'', y_0', y_0, l'intégrale rentre dans une des catégories suivantes :

1° ou bien elle s'obtient algébriquement,

2° ou bien $y(x)$ s'exprime rationnellement en fonction de $\wp(u+c)$, $\wp'(u+c)$, où u est donné par une quadrature $u = \int h(x)\,dx$; soit $y = R(\wp, \wp')$. Les coefficients de R dépendent algébriquement des coefficients de (1) et d'une seconde constante.

3°. — ou bien $y(x)$ s'exprime rationnellement en fonction de $Y(u,v)$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$, $\frac{\partial Y}{\partial v}$, soit $y = R\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial v}\right)$, où Y désigne une fonction hyperelliptique de u, v, et où u, v sont remplacés par $u = \int h(x)\,dx + C$, $v = \int k(x)\,dx + C'$. Les coefficients de R dépendent algébriquement des coëfficients de (1) ainsi que h k. L'équation (1) s'intègre par quadratures.

4°. — ou bien $y(x)$ s'exprime rationnellement en fonction de $t(x)$, soit $y = R(t)$, où t vérifie une équation de Riccati :

$$\frac{dt}{dx} = -t^2 + \gamma(x)\ ;$$

R et γ dépendent algébriquement des coëfficients de (1) et rationnellement de deux constantes C, C_1 qui vérifient une relation algébrique $H(C, C_1) = 0$. De plus, tous les pôles de $\gamma(x)$ variables avec C sont des pôles de $t(x)$, et aucune valeur de C (finie ou non) ne rend γ infini, quel que soit x.

5°. — ou bien $y(x)$ s'exprime rationnellement en fonction de t, $\wp(u+C)$, $\wp'(u+C)$, soit $y = R(t, \wp, \wp')$, où u est donné par une quadrature $u = \int h(x)\,dx$, et où t vérifie une équation de Riccati :

$$\frac{dt}{dx} = -t^2 + \gamma(x)\ ;$$

R dépend rationnellement des coëfficients de (1), et γ peut en outre renfermer rationnellement $\wp(u)$, $\wp'(u)$. Si on pose $\wp(C) = c$, la fonction $\gamma(x, c)$ est assujettie aux mêmes conditions que dans le cas 4°.

6°. — ou bien l'équation se ramène algébriquement à une équation linéaire.[1]

---

[1] Quand on s'appuie sur la proposition énoncée sans démonstration à la page 375, on peut préciser l'énoncé précédent en remplaçant le paragraphe 6° par les suivants :

6° ou bien $y(x)$ s'exprime rationnellement en fonction de t, θ, soit $y = R(t, \theta)$, où t, θ vérifient deux équations de Riccati :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\theta^2 + \gamma(x), \quad \frac{dt}{dx} = -t^2 + \gamma_1(x)\ ;$$

R et γ' dépendent rationnellement des coëfficients de (1); γ_1 peut en outre renfermer rationnellement θ; la fonction $\gamma_1(x, C)$ est alors soumise aux conditions énoncées dans le 4°.

7° ou bien $y(x)$ s'exprime rationnellement en $t, \frac{dt}{dx}$, soit $y = R\left(t, \frac{dt}{dx}\right)$, t représentant la dérivée logarithmique $\frac{\theta'}{\theta}$ de l'intégrale d'une équation linéaire et homogène du 3° ordre $\theta''' + \alpha\theta' + \beta\theta = 0$; α, β et les coëfficients de R se calculent algébriquement d'après (1).

De la manière de reconnaître si une équation (1) donnée rentre dans l'espèce précédente.

Étant donnée une équation

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0 \quad ,$$

où F est un polynome en y'', y', y, est-il possible de reconnaître si son intégrale générale dépend rationnellement des constantes y_0, y'_0, y''_0 ? — Sur ce nouveau problème, je me bornerai ici à quelques rapides indications.

Du rôle des intégrales doubles de première espèce. — Tout d'abord, si le genre p de la surface algébrique $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$ est supérieur à 1, la solution est immédiate [1].

Donnons en effet à x une valeur numérique $\bar{x}_0$, et soit $J^0 = \iint \frac{P^0(y''_0, y'_0, y_0)\, dy_0\, dy'_0}{F'_{0 y''_0}}$ une intégrale double de première espèce attachée à la surface $F_0 \equiv F(y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) = 0$. Nous savons qu'il existe au moins une correspondance birationnelle (T) entre F et F_0, qui dépend algébriquement des coëfficients de F et qui se réduit pour $x = \bar{x}_0$ à la transformation identique. Admettons pour un instant qu'on ait déterminé une telle transformation T. La correspondance birationnelle que définit entre F_0 et F l'intégrale générale de (1) s'obtient en effectuant, avant la transformation T, une transformation birationnelle T_0 sur y''_0, y'_0, y_0, transformation qui conserve F_0, qui dépend de x, et qui pour $x = \bar{x}_0$ se réduit à la transformation identique (voir page 361).

Ceci posé, soit J l'intégrale double (attachée à F) dans laquelle la transformation T transforme J^0 ; J est de la forme

$$\iint \frac{P(y'', y', y, x)\, dy\, dy'}{F'_{y''}} \, ,$$

où P désigne un polynôme en y'', y', y de degré $(m-4)$ (si m est le degré de la surface F) dont les coefficients sont connus <u>algébriquement</u>

---

[1] p désigne le nombre d'intégrales doubles de première espèce (linéairement distinctes) attachées à F (voir page 342).

en fonction de ceux de F. D'autre part la transformation T_0 conserve J^0, de sorte qu'en définitive la transformation de passage entre F et F_0 définie par l'intégrale générale de (1), change J^0 en J.

Précisons ce dernier résultat ; soit

$$y_0 = r(y'', y', y, x) \equiv \bar{r}(y', y, x)$$
$$y'_0 = r_1(y'', y', y, x) \equiv \bar{r}_1(y', y, x)$$

les égalités qui définissent l'intégrale générale de (1) ; nous avons :

$$\frac{P^0(y''_0, y'_0, y_0)}{F'_{y''_0}}\left(\frac{\partial r}{\partial y'}\frac{\partial r_1}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r_1}{\partial y'}\right) \equiv \frac{P(y'', y', y, x)}{F'_{y''}},$$

quand on remplace y_0, y'_0 (et y''_0) en fonction de y, y'.

D'après cela, s'il existe deux intégrales doubles de première espèce, l'égalité

$$\frac{P^0(y''_0, y'_0, y_0)}{P^0_1(y''_0, y'_0, y_0)} = \frac{P(y'', y', y, x)}{P_1(y'', y', y, x)}$$

où P et P_1 sont connus algébriquement, est une intégrale première de (1). L'équation (1) est donc ramenée algébriquement à la forme

$$f(y', y, x, C) = 0 .$$

où f est un polynôme en y', y, et on sait reconnaître algébriquement si cette équation du premier ordre a ses points critiques fixes.

Tout ceci suppose qu'on ait déterminé une transformation(1). La chose est facile si la surface F_0 admet au moins trois intégrales doubles de première espèce telles que les deux fonctions $\frac{P_1^0}{P^0}$, $\frac{P_2^0}{P^0}$ du point (y''_0, y'_0, y_0) de F_0 soient distinctes. En effet, les égalités :

$$\frac{P_1^0}{P^0} = \frac{P_1(y'', y', y, x)}{P(y'', y', y, x)}, \quad \frac{P_2^0}{P^0} = \frac{P_2(y'', y', y, x)}{P(y'', y', y, x)}$$

(où le degré des P en y'', y', y est moindre que $m-4$) donnent une limite supérieure du degré auquel figurent y'', y', y dans les égalités

$$y_0 = r(y'', y', y, x) \; ; \; y'_0 = r_1, \; y''_0 = r_2 .$$

Il suffit donc d'écrire les fractions r, r_1, r_2 de degré connu en y'', y', y

en laissant leurs coëfficients indéterminés, et d'exprimer que les égalités ainsi obtenues définissent une transformation birationnelle de F_0 en F, pour obtenir une substution (T). Si une telle substitution n'existe pas, l'équation (1) n'est pas de l'espèce étudiée.

Quand p est égal à 2, ou quand (pour $p > 2$) toutes les fonctions $\frac{P_i^o}{P^o}$ de (y_0'', y_0', y_0) sont fonctions d'une d'entre elles, écrivons l'égalité :

$$(\alpha) \qquad C = \frac{P_1^o(y_0'', y_0, y_0)}{P_o(y_0'', y_0', y_0)} = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i(x) P_i(y'', y', y, x)}{\sum_{i=1}^{i=p} \mu_i(x) P_i(y'', y', y, x)},$$

les coëfficients des polynômes P en y'', y', y étant connus algébriquement en fonction des cofficients de (1), et les λ_i, μ_i étant des fonctions inconnues de x.

Eliminons y'' entre (α) et (1) ; il vient :

$$H(y', y, C, x, \ldots \lambda_i \ldots \mu_i \ldots) = 0,$$

ou bien, en mettant la courbe $H(y', y) = 0$ sous forme irréductible :

$$h(y', y, C, c, x \ldots \lambda_i \ldots \mu_i \ldots) = 0,$$

C et c étant liés algébriquement. En éliminant (C, c) entre les rapports des coefficients de $h(y', y)$, on peut exprimer ces coefficients en fonction algébrique de l'un d'eutre eux α ; de même en éliminant (C, c) entre α et $\frac{d\alpha}{dx}$, on forme une relation algébrique d'un certain degré entre α, $\frac{d\alpha}{dx}$ (où figure x, les $\lambda_i, \lambda_i', \mu_i, \mu_i'$). En définitive, l'intégrale $y(x)$ de (1) peut être définie par un système de la forme :

$$(b) \quad \begin{cases} K(y', y, \alpha, A) = 0, & k(\alpha, A) = 0 \\ L\left(\frac{d\alpha}{dx}, \alpha\right) = 0, & \end{cases}$$

K, k, L étant des polynômes en $y', y, \alpha, A, \frac{d\alpha}{dx}$, de degré connu, dont les coefficients dépendent de x. Exprimons qu'un tel système (b) définit l'intégrale générale

de (1) : nous formons ainsi certaines relations entre les coefficients indéterminés de K, k, L et leurs dérivées. Si ces relations définissent plusieurs systèmes (b) distincts, on aperçoit aussitôt qu'il existe deux intégrales premières distinctes :

$$K_1(y', y, x, \alpha_0) = 0, \qquad K_2(y', y, x, \alpha_0^1) = 0,$$

entières et de degré connu en y', y, α_0 (ou y', y, α_0'), α_0 et α_0' étant deux constantes arbitraires. Le problème n'offre plus de difficulté théorique. S'il n'existe qu'un système (b), il est connu algébriquement; d'ailleurs, la fonction $\alpha(x, \alpha_0)$ doit avoir ses points critiques fixes ; autrement, comme on le voit aussitôt, $y(x)$ aurait des points critiques variables avec α_0. On est ramené en définitive, à l'intégration successive de deux équations du premier ordre à points critiques fixes.

Il est d'ailleurs facile de préciser et de simplifier dans ce cas l'intégration. Mais ce qui précède suffit à faire comprendre que la question est résolue dans le cas de $p>1$.

Quand le genre p de la surface F est égal à 1, on connaît par une quadrature, une dernier multiplicateur du système différentiel :

$$(1)' \qquad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{y''}, \quad \text{avec } F(y'', y', y, x) = 0.$$

En effet, il est bien connu que l'expression :

$$\frac{\partial r}{\partial y'} \frac{\partial r_1}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r_1}{\partial y'},$$

est un dernier multiplicateur M du système (1)'. Si on multiplie M par une intégrale quelconque de (1)', soit $\dfrac{P^0(y_0'', y_0', y_0)}{F'_{y_0''}}$, (où y_0, y_0' sont remplacés par r, r_1), le produit est encore un multiplicateur de (1)'; donc l'expression $\dfrac{\lambda(x) P(y'', y', y, x)}{F'_{y''}}$ est un multiplicateur de (1)' : deux multiplicateurs de cette forme ne pouvant différer que par un facteur constant, $\dfrac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}$ est connu algébriquement.

λ est donné par une quadrature.

En particulier, si x ne figure pas explicitement dans F, P est indépendant de x, le système :

$$\frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{y''}, \text{ avec } F(y'', y', x) = 0,$$

admet le multiplicateur $\frac{P}{F'_{y''}}$; autrement dit l'expression :

$$dj = \frac{P(y'', y', y)}{F'_{y''}} (y'' dy - y' dy')$$

est une différentielle totale exacte attachée à F. Il est bien aisé de voir que cette intégrale est de première espèce et n'a que deux périodes (quand l'équation (1) est de l'espèce étudiée) : en sorte que la relation $j = C^{te}$ équivaut à une relation algébrique $R(y'', y', y, C) = 0$.

Du rôle des différentielles totales de première espèce — Quand p est nul, la méthode précédente ne donne rien. Mais toutes les fois que la surface F possède des différentielles totales de première espèce, soit $dj = \frac{P dy + Q dy'}{F''_{y''}}$, l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1) vérifie des relations de la forme :

$$j^o = \int \frac{P(y''_o, y'_o, y_o, \bar{x}_o) dy_o + Q(y''_o, y'_o, y_o, \bar{x}_o) dy'_o}{F''_{o y''_o}} = \int \frac{P dy + Q dy' + R dx}{F'_{y''}},$$

[voir page 362] ; P et Q sont des polynômes en y'', y', y de degré $(m-3)$.

D'après cela, s'il n'existe qu'une différentielle dj, il existe une intégrale première de la forme :

$$\int \lambda(x) \left[\frac{P dy + Q dy'}{F'_{y''}}\right] + R dx = C^{te},$$

où la différentielle totale est donnée par une quadrature logarithmique.

Si la surface F possède au moins deux différentielles dj^o, dj_1^o, mais si j^o, j_1^o par exemple sont fonctions l'une de l'autre, l'équation (1) admet une intégrale première de la forme :

$$\frac{\Sigma\ \lambda_i\ P_i\ (y'', y', y, x)}{\Sigma\ \mu_i\ P_i\ (y'', y', y, x)} = C^{te},$$

et on est conduit à une discussion analogue à celle de la page 385

Si la surface F_o possède exactement deux différentielles totales de première espèce, soit dj^o, dj^o_1, [j_o et j^o_1 n'étant pas fonctions l'une de l'autre], l'intégrale de (1) vérifie deux relations de la forme:

$$\int \lambda_1 \frac{(P_1\, dy + Q_1\, dy')}{F'_{y''}} + \lambda_2\, \frac{(P_2\, dy + Q_2\, dy')}{F'_{y''}} + R\, dx = C^{te},$$

où $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ dépendent d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre : une fois cette équation intégrée, R est connu algébriquement.

Si la surface F_o possède au moins trois différentielles totales de première espèce, soit dj^o, dj^o_1, dj^o_2, l'équation (1) admet une intégrale première de la forme:

$$\frac{N\ (y'', y', y, x)}{N_1\ (y'', y', y, x)} = C^{te}$$

où N et N_1, sont des polynômes en y'', y', y de degré au plus égal à $2\ (m-3)$.

En effet, le système:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{y''}\ ,\ \text{avec}\ F\,(y'', y', y, x) = 0,$$

admet comme multiplicateur le déterminant fonctionnel D de j^o, j^o_1 par rapport aux deux variables indépendantes y, y', soit $D = \dfrac{PQ_1 - P_1 Q}{(F'_{y''})^2}$

De même le déterminant de j^o, j^o_2 par rapport à y, y', soit $\dfrac{PQ_2 - P_2 Q}{F'^2_{y''}}$ est un multiplicateur; si ces deux multiplicateurs sont distincts, $\dfrac{PQ_1 - P_1 Q}{PQ_2 - P_2 Q} = C^{te}$ est une intégrale première de (1); s'ils ne diffèrent que par un facteur constant c, on a:

$$PQ_1 - P_1 Q = M\ ,\qquad PQ_2 - P_2 Q = c\, M\ ,\qquad \text{d'où:}$$

$$P\ (c\, Q_1 - Q_2) - Q\,(c P_1 - P_2) \equiv 0;$$

les intégrales j° et $cj_1^{\circ} - j_2^{\circ}$ sont donc fonctions l'une de l'autre, et l'équation (1) admet l'intégrale première $\frac{cP_1 - P_2}{P} = C^{te}$.

D'autre part, on saura toujours reconnaître s'il existe une intégrale première rationnelle et de degré donné en y'', y', y, et on se trouve ramené à une discussion analogue à celle de la page 385.

En définitive, le cas qui échappe entièrement aux considérations précédentes est celui où il n'existe ni intégrales doubles, ni différentielles totales de première espèce. D'une manière générale, toute la difficulté revient à déterminer une limite supérieure du degré auquel peuvent figurer y_0'', y_0', y_0 dans les fractions rationnelles:

$$y = r(x, y_0'', y_0', y_0), \quad y' = \frac{dr}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 r}{dx^2},$$

qui définissent l'intégrale de (1) (si cette intégrale renferme rationnellement les constantes). Le cas le plus compliqué est précisément le cas le plus simple en apparence, celui où la surface F est uniformément unicursale, et notamment le cas du système:

$$\frac{dt}{dx} = R(t, u, x), \quad \frac{du}{dx} = R_1(t, u, x),$$

où R, R_1 sont rationnels en t, u. La solution du problème exige, dans ce dernier cas, une discussion approfondie des points-bases de la substitution de Cremona qui relie $t(x), u(x)$ à leurs valeurs initiales t_0, u_0.[1]

Équations dont l'intégrale générale renferme algébriquement les constantes — Quand l'intégrale $y(x)$ d'une équation:

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0$$

---

[1] Voir la note de la page 372

renferme algébriquement les constantes y''_0, y'_0, y_0, nous savons qu'elle ne prend qu'un nombre fini n de valeurs autour des points critiques mobiles, et qu'elle se laisse définir par une relation :

$$\Phi\left(y, r, \frac{dr}{dx}, \frac{d^2r}{dx^2}, x\right) = 0 \text{ , avec}$$

$$(1)' \qquad f\left(\frac{d^2r}{dx^2}, \frac{dr}{dx}, r, x\right) = 0 ,$$

Φ et f étant des polynômes en $y, r, \frac{dr}{dx}, \frac{d^2r}{dx^2}$, dont les coefficients se calculent algébriquement d'après (1), et l'intégrale $r(x)$ de l'équation $f=0$ dépendant rationnellement des constantes. Il suit de là que l'intégrale $y(x)$ se ramène algébriquement aux transcendantes énumérées à la page 387. Autrement dit, l'équation (1) ou bien s'intègre algébriquement, ou bien se ramène algébriquement soit à une équation linéaire, soit à un des systèmes :

1°
$$\int^{\xi_1} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \int^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \int k(x)\,dx + C$$

$$\int^{\xi_1} \frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \int^{\xi_2} \frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \int k(x)\,dx + C'$$

avec
$$R(\xi) = (4\xi^3 - g_2\xi - g_3)(\xi^2 + \alpha x + \beta)$$

2°
$$\frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} = h(x, C)\,dx$$

3°
$$\frac{du}{dx} = -u^2 + A(x, C),$$

4°
$$\frac{du}{dx} = -u^2 + A(x, t), \quad \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} = h(x),$$

Quant au problème de reconnaître si l'intégrale d'une équation (1) donnée dépend algébriquement des constantes, c'est un problème difficile dans lequel la nature de la surface algébrique $f(r'', r', r, \bar{x}) = 0$ joue un rôle essentiel. Par exemple, si cette surface est de genre

$p>1$, la surface $F=0$, qui doit être de genre au moins égal, possède deux intégrales doubles de première espèce :

$$\iint P\,dy\,dy', \quad \iint P_1\,dy\,dy',$$

telles que $\frac{P}{P_1}$ soit une intégrale première de (1). D'où une discussion analogue à celle de la page 385. D'une façon générale, les considérations développées ou indiquées plus haut permettent de résoudre la question posée dans des cas très étendus sans aucune donnée, et dans tous les cas, si on se donne le nombre n de valeurs de $y(x)$ qui se permutent autour des points critiques mobiles.

Extension aux équations différentielles d'ordre quelconque. — Les résultats et les méthodes, que nous venons d'exposer, s'étendent d'eux-mêmes aux équations d'ordre quelconque. Bornons-nous aux équations du troisième ordre. Soit :

$$(1) \qquad F(y''', y'', y', y, x) = 0$$

une équation du 3e ordre où F est un polynôme en y''', y'', y', y, dont les coëfficients sont des fonctions analytiques quelconques de x. Quand l'intégrale générale $y(x)$ de (1) dépend algébriquement des constantes y_0, y'_0, y''_0, l'équation (1), ou bien s'intègre algébriquement, ou bien se ramène algébriquement soit à une équation linéaire, soit à un des systèmes suivants :

$$1^o \int P_i(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi + Q_i(\xi,\eta,\zeta)\,d\eta + R_i(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta = \int h_i(x) + C_i$$
$$(i=1,2,3),$$

le système définissant pour ξ, η, ζ des fonctions uniformes à 6 couples de périodes de C_1, C_2, C_3 ;

$$2^o \qquad f(t'', t', t, u, u', x) = 0$$

où f est un polynôme en t'', t', t, u, u', et où $u(x)$ est donné soit algébriquement, soit par l'égalité $u = p\left[\int h(x)\,dx + C\right]$, soit par une équation de Riccati ; enfin l'intégrale $t(x)$ de $f=0$ doit dépendre

rationnellement de t_0, t'_0, t''_0, et par suite s'obtient comme il a été expliqué page 381;

3°.
$$f(t', t, u, u', u''; x) = 0$$
avec:
$$\varphi(u'', u', u, x) = 0,$$

la seconde équation ayant son intégrale qui dépend rationnellement des constantes, et la première étant de la forme:

$$\frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} = h\,dx, \text{ ou de la forme } \frac{dt}{dx} = -t^2 + h,$$
où h dépend de x, u, u'.

Sous sa forme la plus brève, le théorème général s'énonce ainsi:

Considérons un système différentiel quelconque portant sur m fonctions $y_1, \dots y_m$ de n variables $x_1, \dots\dots x_n$, système algébrique par rapport aux fonctions et à leurs dérivées. Si l'intégrale générale de ce système $y_1(x_1, \dots x_n) \dots\dots y_m(x_1, \dots x_n)$ ne dépend que d'un nombre fini de constantes, et si ces constantes figurent algébriquement dans $y_1, \dots y_m$, cette intégrale s'obtient algébriquement, ou par des quadratures, ou par l'intégration d'équations linéaires. Observons toutefois que ces quadratures et équations linéaires se combinent d'une façon très particulière, ainsi qu'il ressort de ce qui précède.

D'après les théorèmes démontrés ci-dessus, les équations différentielles du second ordre $F(y'', y', y, x) = 0$ [ou d'ordre supérieur], algébriques en y, y', y'', dont l'intégrale générale dépend algébriquement des constantes, ne sauraient engendrer des transcendantes uniformes (ou à n déterminations) essentiellement distinctes des transcendantes déduites (à l'aide de quadratures) des fonctions abéliennes ou issues des équations linéaires. Pour que l'intégrale $y(x)$ d'une équation $F = 0$ soit une transcendante uniforme vraiment nouvelle, il faut que $y(x)$ renferme les constantes y_0, y'_0 sous forme transcendante. Nous étudierons, dans

les leçons prochaines, les équations $F=0$ de cette nature. Je terminerai cette leçon par quelques mots d'historique sur les résultats qui s'y trouvent développés.

Historique _ L'étude des équations du second ordre à points critiques fixes a été abordée pour la première fois par M. Picard, qui leur a appliqué les résultats fondamentaux obtenus par lui dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables (Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables, pages 129-164). L'illustre analyste s'est surtout attaché aux équations $F(y'', y', y) = 0$ où x ne figure pas explicitement et dont l'intégrale renferme rationnellement les constantes y_0, y'_0, y''_0: il a défini, dans tous les cas, la nature de l'intégrale, et indiqué le moyen de reconnaître si une équation donnée est de l'espèce étudiée dans le cas où la surface $F=0$ est hyperelliptique ou de genre p plus grand que 1.

Si x figure dans F, mais si la surface $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$ est hyperelliptique ou de genre $p>1$, M. Picard a défini encore la nature de l'intégrale $y(x)$ quand elle dépend rationnellement de y_0, y'_0, y''_0. Dans une suite de notes (Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1893), j'ai défini la nature de l'intégrale dans tous les cas où $y(x)$ dépend algébriquement des constantes y_0, y'_0, y''_0, quelle que soit la nature de la surface F. Ces notes traitent également du problème de reconnaître si une équation donnée est de l'espèce en question, et renferment des résultats plus complets que ceux que j'ai pu développer dans cette leçon.

Dix-huitième Leçon.

Singularités des Équations différentielles d'ordre quelconque.

Nous allons étudier dans cette leçon les diverses singularités que peut présenter une équation différentielle d'ordre quelconque, et en particulier du second ordre. Dans la leçon prochaine, nous appliquerons les résultats obtenus aux équations dont l'intégrale générale est uniforme ou ne prend qu'un nombre fini de valeurs, autour des points critiques mobiles.

Je rappellerai d'abord, en le précisant, le théorème fondamental de Cauchy.

Théorème de Cauchy. — Si pour:

$$x = x_0 \ , y_1 = y_1^0 , \dots y_m = y_m^0 ,$$

les seconds membres des m équations différentielles:

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i \ (x, y_1, y_2, \dots y_m) \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

sont holomorphes, il existe une solution $y_1(x), \dots y_m(x)$ des équations (1), qui pour $x = x_0$ est holomorphe et satisfait aux conditions initiales $y_1(x_0) = y_1^0, \dots y_m(x_0) = y_m^0$.

La démonstration même de Cauchy permet de préciser ce théorème: supposons que pour $x = a$, $y_1 = b_1, \dots y_m = b_m$, les coefficients différentiels $f_1, \dots f_m$ soient holomorphes, et soit

$$y_i = \varphi_i \ (x, y_1^0, \dots y_m^0, x^0) \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

la solution holomorphe de (1) définie par les conditions initiales $x_0, y_1^0, \dots y_m^0$;

les fonctions $\varphi_1, \dots \varphi_m$ de $x, x_0, y_1^0 \dots y_m^0$ sont holomorphes pour $x = a, x_0 = a$, $y_1^0 = b_1, \dots y_m^0 = b_m$. Comme on peut permuter x et x_0, on voit qu'en donnant à x_0 la valeur numérique a, on peut représenter l'intégrale générale de (1) à l'aide des m intégrales premières :

$$y_i^0 = \varphi_i (a, y_1, \dots y_m, x) \quad , \quad (i = 1, 2 \dots m),$$

où les φ_i sont holomorphes pour $x = a, y_1 = b_1, \dots y_m = b_m$.

Quand $x_0, y_1^0, \dots y_m^0$ varient respectivement dans certains cercles de centres $a, b_1, \dots b_m$ et de rayons $r, \rho_1, \dots \rho_m$, la solution $y_1(x), \dots y_m(x)$ des équations (1) définie par les conditions initiales $x^0, y_1^0 \dots y_m^0$, est holomorphe à l'intérieur d'un certain cercle dont le rayon reste supérieur à une limite fixe λ [$\lambda > 0$].

Ces propriétés s'établissent exactement comme pour le premier ordre (pages 18 - 20).

Qu'il n'existe qu'une seule solution $y_1(x) \dots y_m(x)$, holomorphe, répondant aux conditions initiales régulières $x_0, y_1^0 \dots y_m^0$, c'est ce qui résulte en toute évidence de la démonstration de Cauchy. Mais ne saurait-il exister d'autres solutions analytiques $y_1(x), \dots y_m(x)$, non holomorphes pour $x = x_0$, et tendant vers $y_1^0, \dots y_m^0$ quand x tend vers x_0 sur un certain chemin L ? On voit que la chose est impossible en raisonnant comme pour le premier ordre (page 20) ; mais on rend le raisonnement plus intuitif encore en le présentant de la manière suivante.

Faisons le changement de variables :

$$(2) \qquad u_i = \varphi_i (x_0, y_1, \dots y_m, x) \qquad (i = 1, 2 \dots m),$$

(x_0 ayant reçu la valeur numérique considérée), ou ce qui revient au même :

$$(2)' \qquad y_i = \varphi_i (x, u_1, \dots u_m, x_0).$$

Le système (1) se transforme dans le système :

$$(1)' \qquad \frac{du_1}{dx} = 0, \dots\dots \frac{du_m}{dx} = 0 ;$$

Soit $y_1(x) \ldots y_m(x)$ une solution analytique de (1) qui, quand x tend vers x_0 sur L, tend vers $y_1^0, \ldots y_m^0$: à cette solution correspond une solution analytique $u_1(x), \ldots u_m(x)$ de (1)' qui tend aussi vers $y_1^0 \ldots y_m^0$ quand x tend vers x_0 sur L ; comme cette dernière solution est évidemment $u_1 \equiv y_1^0 \ldots u_m \equiv y_m^0$, la solution $y_1(x), \ldots y_m(x)$ correspondante se confond bien avec la solution holomorphe.(1)

Nous allons appliquer immédiatement ce théorème aux équations du second ordre.

Équations différentielles du second ordre $y'' = R(y', y, x)$ où R est rationnel en y', y

— Considérons d'abord une équation :

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = R\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) \equiv \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)},$$

où P et Q sont deux polynômes en y', y (sans facteur commun pour x quelconque), les coefficients $\alpha(x)$ étant des fonctions analytiques quelconques de x.

---

(1) Ce complément essentiel du théorème de Cauchy a été démontré pour la première fois par M. Picard à l'aide d'une méthode très élégante. Le procédé tout différent que je viens d'indiquer se recommande par son caractère direct et intuitif. J'ajoute qu'il permet de préciser encore davantage le théorème de Cauchy : dans le cas, en effet, où les f_i sont des fonctions analytiques réelles en même temps que x et les y, on peut se demander s'il n'existe pas des solutions réelles $y_1(x) \ldots y_m(x)$ non analytiques, définies seulement pour les valeurs réelles de x, et tendant vers $y_1^0, \ldots y_m^0$ quand x tend vers x_0. La substitution (2) montre qu'il n'en est rien. Plus généralement, les fonctions analytiques f_i étant quelconques, posons : $x = \xi + i\eta$, $y_1 = \xi_1 + i\eta_1, \ldots y_m = \xi_m + i\eta_m$, et soit L ou $\xi = \psi(t)$, $\eta = \chi(t)$ un chemin du plan ξ, η, tel que x tende vers x_0 quand le paramètre

Marquons dans le plan des x, les points ξ qui sont soit des points singuliers (algébriques ou transcendants) des coefficients $\alpha(x)$, soit des pôles de y'' quels que soient y', y, ainsi que les points ξ pour lesquels les deux polynômes $P(y', y, \xi)$, $Q(y', y, \xi)$ en y', y ont un facteur commun. Soit maintenant x_0 un point du plan des x qui ne coïncide pas avec un des points ξ ; adoptons dans le voisinage de x_0 une détermination bien définie des coefficients $\alpha(x)$, et étudions les intégrales $y(x)$ de l'équation (1) dans le voisinage de x_0.

Supposons d'abord que, quand x tend vers x_0 sur un certain chemin L, la solution considérée $y(x)$ et sa dérivée y' tendent respectivement vers y_0, y'_0.

En premier lieu, si $Q(y'_0, y_0, x_0)$ est différent de zéro, la solution $y(x)$ se confond avec la solution holomorphe unique définie (dans le voisinage de x_0) par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0.

Qu'arrive-t-il si $Q(y'_0, y_0, x_0)$ est nul ? Discutons cette hypothèse en supposant d'abord $P(y'_0, y_0, x_0) \neq 0$.

I _ $Q(y'_0, y_0, x_0) = 0$, $P(y'_0, y_0, x_0) \neq 0$.

Posons $y' = z$; et prenant z comme variable indépendante, étudions le système :

$$(3) \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{Q(z,y,x)}{P(z,y,x)}, \quad \frac{dy}{dz} = z\,\frac{Q(z,y,x)}{P(z,y,x)}.$$

---

réel t tend vers zéro ; nous admettons seulement que $\psi(t)$ et $\chi(t)$ ont une dérivée première. Soit maintenant un système de fonctions continues $y_i = \xi_i(t) + i\eta_i(t)$ définies seulement le long d'un tel chemin L et telles que $\xi_i(t), \eta_i(t)$ aient une dérivée première : le rapport $\frac{\Delta y_i}{\Delta x}$ quand, x variant sur L, Δx tend vers zéro, a pour limite : $y'_i = \frac{\xi'_i(t) + i\eta'_i(t)}{\varphi'(t) + i\psi'(t)}$. On peut se demander s'il existe un tel système de fonctions (non analytiques), telles que les y_i, y'_i vérifient le long de L les équations (1). La transformation (2) montre encore qu'il n'en est rien._

Ce système admet une solution $x = \Psi(z)$, $y = X(z)$, holomorphe pour $z = y'_0$ et répondant aux conditions initiales y'_0, x_0, y_0 : toute autre solution de (3) où $x(z)$, $y(z)$ tendent vers x_0, y_0 quand z tend vers y'_0 sur un certain chemin L', se confond avec la précédente. Si donc l'équation (1) admet une solution $y(x)$ telle que, x tendant vers x_0 sur un certain chemin L, y et $\frac{dy}{dx}$ tendent vers y_0, y'_0, cette solution vérifie les équations :

$$x = \Psi(y'), \qquad y = X(y').$$

Soit ν l'ordre de la première des dérivées $\frac{\partial Q}{\partial z}(z, y, x)$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}$, ... qui ne s'annule pas pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = y'_0$; la fonction $\Psi(y')$ est de la forme :

$$\Psi(y') = \alpha\,(y' - y'_0)^{\nu+1} + \cdots \quad , (\alpha \neq 0) ;$$

$y'(x)$ et par suite $y(x)$ sont donc dans le voisinage de x_0, des fonctions algébroïdes de x dont $(\nu+1)$ valeurs se permutent autour du point x_0. Les conditions initiales x_0, y_0, y'_0 définissent ainsi, comme solutions de (1), les $(\nu+1)$ branches d'une fonction $y(x)$ algébroïde pour $x = x_0$: toute solution $y(x)$ de (1) telle que (x tendant vers x_0 sur un chemin L) y et $\frac{dy}{dx}$ tendent vers y_0, y'_0 se confond avec une de ces branches.

Ceci suppose toutefois que $Q(y', y_0, x_0)$ n'est pas nul quel que soit y'. Si on a au contraire $Q(y', y_0, x_0) \equiv 0$, le système (3) n'a, comme solution répondant aux conditions initiales y'_0 x_0, y_0, d'autre solution que $x \equiv x_0$, $y \equiv y_0$. L'équation (1) n'admet pas de solution $y(x)$ telle que y et y' tendent vers y_0, y'_0 quand x tend vers x_0 (sur un chemin L).

On se trouve amené ainsi à distinguer deux cas, suivant que le polynôme $Q(y', y, x)$ en y possède ou non des racines $y = G(x)$, indépendantes de y'. Dans le second cas, qui est le cas général, il n'existe que des valeurs particulières $x = \alpha$, $y = \beta$

qui annulent Q quel que soit y' : nous ajoutons alors les points $x=\alpha$ aux points ξ. Au contraire, dans le premier cas, Q est de la forme $Q \equiv Q_1(y,x)\, Q_2(y',y,x)$, où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes, le premier en y, le second en y', y, (le second n'ayant pas de racine en y indépendante de y') ; il n'existe pas de solution $y(x)$ de (1) telle que (x tendant vers x_0) y et y' tendent vers y_0, y'_0, quand y_0, x_0 annulent $Q_1(y,x)$ [sans que $P(y'_0, y_0, x_0)$ soit nul].

Nous représenterons dans ce qui suit par $y = G(x)$ toutes les valeurs de y qui sont des pôles de y'', quel que soit y'.

II – $Q(y'_0, y_0, x_0) = 0$, $P(y'_0, y_0, x_0) = 0$ – Quand les valeurs y'_0, y_0, x_0 annulent à la fois P et Q, c'est à dire dans le cas difficile où le coefficient différentiel a la forme $\frac{0}{0}$, les circonstances les plus variées peuvent se présenter : il peut exister une infinité de solutions répondant aux conditions initiales, ou au contraire il peut n'en exister aucune. Le point x_0 peut être un point transcendant de ces solutions. La discussion de ces singularités a fait l'objet de travaux de MM. Picard, Poincaré, Bendixson, mais elle est loin d'être épuisée.

Je représenterai, dans ce qui suit, par $y = g(x)$, $y' = h(x)$, les valeurs de y, y' qui donnent à $\frac{P}{Q}$ la forme $\frac{0}{0}$.

Conséquences de la discussion précédente –

Une première remarque est relative à la nature de la fonction $y = \varphi(x, y'_0, y_0, x_0)$ quand les valeurs y'_0, y_0, x_0 annulent Q.

Soit a une valeur de x (distincte des valeurs ξ), b, c des valeurs de y, y' qui annulent $Q(y', y, x)$ sans annuler ni $P(y', y, x)$ ni $Q_1(y, x)$. Soit de plus x_0, y_0, y'_0 des valeurs voisines de a, b, c. La solution $x(z), y(z)$ de (3) qui correspond aux conditions initiales y'_0, x_0, y_0, définit deux fonctions :

$$x = \psi(z, x_0, y_0, y'_0), \qquad y = X(z, x_0, y_0, y'_0)$$

holomorphes pour $z = c$, $x_0 = a$, $y_0 = b$, $y'_0 = c$; de plus, pour $x_0 = a$, $y_0 = b$, $y'_0 = c$,

y ne se réduit pas une constante, mais est de la forme :

$$\psi = \alpha z^{\nu+1} + \dots, \quad [\alpha \neq 0].$$

Il suit de là, exactement comme pour le premier ordre [voir pages 34-36] que z et par suite y sont des fonctions algébroïdes de x, y'_0, y_0, x_0 pour $x = a$, $y'_0 = c$, $y_0 = b$, $x_0 = a$. Si donc x_0, y_0, y'_0 varient respectivement à l'intérieur de petits cercles ayant comme centres a, b, c, la solution de (1), $y = \varphi(x, y'_0, y_0, x_0)$, qui correspond aux conditions initiales x_0, y_0, y'_0, est sûrement une fonction algébroïde de x à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon fixe λ.

Cette remarque entraîne une importante conséquence soit toujours $\bar{x}$ une valeur de x distincte des ξ ; faisons varier x dans un petit cercle C, de centre $\bar{x}$; à l'intérieur de C, les branches considérées des coëfficients $\alpha(x)$ de (1) sont bien déterminées et holomorphes. Marquons dans le plan des y tous les points $Y = G(x)$ et $Y = g(x)$;(1) quand x varie dans C (et sur son contour), les Y restent intérieurs à de petits cercles $C_1, \dots C_K$ ayant comme centres les points $b_1, \dots b_K$ que définissent les valeurs $Y(\bar{x})$. Considérons, dans le plan des y, une aire finie quelconque A extérieure à ces cercles $C_1, \dots C_K$, et dans le plan des y' une aire finie quelconque A'. Soit enfin x_0, y_0, y'_0 trois points quelconques des aires C, A et A' ; la solution $y(x)$ de (1), qui correspond aux conditions initiales x_0, y_0, y'_0, est algébroïde à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayons λ_0. Je dis que λ_0 reste supérieur à une certaine limite positive λ quand x_0, y_0, y'_0 varient dans les aires C, A, A'.

On peut le montrer en s'appuyant sur le calcul

---

(1) Les valeurs $y = G(x)$, sont avons-nous dit, des pôles de y'' quel que soit y', et les valeurs $y = g(x)$ donnent à $\frac{P}{Q}$ la forme $\frac{0}{0}$ pour une valeur convenable $y' = h(x)$ de y'.

des limites, par un raisonnement déjà employé dans le cas du premier ordre (voir pages 23-25) mais un peu plus compliqué. Le procédé qui suit est plus rapide: Admettons que la limite inférieure λ de λ_0 (quand x_0, y_0, y'_0 varient dans les aires C, A, A') soit nulle, et montrons que cette hypothèse est absurde. Pour cela, j'entoure les aires C, A, A' de trois carrés, et je décompose chacun de ces carrés en quatre carrés égaux. Soit C_1, A_1, A'_1 trois portions des aires C, A, A', intérieures respectivement à un des douze petits carrés ainsi formés, et soit λ_1 la limite inférieure de λ_0 quand x_0, y_0, y'_0 varient dans les aires C_1, A_1, A'_1: si pour le 64 associations possibles C_1, A_1, A'_1, la limite λ_1 est positive, il en est de même de λ. Donc pour une au moins des associations C_1, A_1, A'_1, soit $\bar{C}_1, \bar{A}_1, \bar{A}'_1$, la limite $\bar{\lambda}_1$ est nulle. En raisonnant sur les aires $\bar{C}_1, \bar{A}_1, \bar{A}'_1$, comme sur C, A, A', et ainsi de suite, on forme dans chacun des trois plans complexes une suite de carrés dont chacun est formé d'un quart du précédent: ces carrés tendent respectivement vers trois points α, β, γ, situés dans les aires C, A, A' ou sur leurs contours, et si petits que soient ces carrés, quand x_0, y_0, y'_0 varient dans ces carrés, la limite inférieure λ de λ_0 est nulle.

Mais d'autre part, pour $x=\alpha$, $y=\beta$, $y'=\gamma$, ou bien $Q(y', y, x)$ est différent de zéro, ou bien, si Q est nul, $P(y', y, x)$ et $Q_1(y, x)$ ne le sont pas. Si donc x_0, y_0, y'_0 varient dans le voisinage de α, β, γ, la solution correspondante $y(x)$ est sûrement algébroïde à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon fixe λ. Il y a contradiction: l'hypothèse faite est absurde. — C.Q.F.D.

Si, au lieu d'une aire finie quelconque du plan des y', on considère une aire A' qui ne comprend aucun des points $y'=h(x)$ [x variant dans C], la proposition précédente

subsiste lors même que l'aire finie A du plan des y renferme des points $Y = g(x)$, pourvu seulement qu'aucun des points $Y = G(x)$ n'appartienne à A.

Cette proposition fournit déjà d'importantes indications sur les singularités des intégrales $y(x)$.

Soit $y(x)$ une solution particulière de (1). Je suppose que, x tendant vers x_0 [1] sur un certain chemin L, y tende vers une valeur finie y_0 : qu'advient-il de y' ? A priori, y' peut tendre vers une limite finie y'_0, ou vers l'infini, ou ne tendre vers aucune limite. Je dis que ce dernier cas ne saurait se présenter, à moins que y_0 ne coïncide avec une des valeurs $Y_0 = G(x_0)$.

En effet, si y_0 ne coïncide avec aucun des points $Y_0 = G(x_0)$, décrivons, du point x_0 et du point y_0 comme centres, deux cercles C et A assez petits pour que, x variant dans C, aucun des points $Y = G(x)$ n'atteigne la circonférence A. Dans le plan des y', décrivons de l'origine comme centre un cercle Γ' de rayon $\frac{1}{\varrho}$, et de chaque point $y'_0 = h(x_0)$ comme centre un cercle γ' de rayon ϱ' [ϱ étant très petit]. Si (quand x tend vers x_0 sur L) y' tend vers l'infini ou vers une des valeurs $y'_0 = h(x_0)$, le théorème est démontré. Sinon, du moment que ϱ a été pris une fois pour toutes suffisamment petit, le point $y'(x)$ ne reste pas constamment extérieur à Γ' ou intérieur à un des γ', (voir page 24) et on peut trouver des valeurs de x sur L, aussi voisines de x_0 qu'on veut, pour lesquelles $y'(x)$ appartient à l'aire A' extérieure aux γ et intérieure à Γ : la valeur correspondante de y est intérieure au cercle A. D'autre

---

[1] Nous excluons, comme je l'ai dit, dans toute cette discussion les points x_0 qui feraient partie des ξ.

part, $\bar{x}$ appartenant à l'aire C, $\bar{y}$ à l'aire A, y' à l'aire A', la solution $y(x)$ de (1) qui en $\bar{x}$ a comme valeur $\bar{y}$ et comme dérivée $\bar{y}'$, est algébroïde dans un cercle de centre $\bar{x}$ et de rayon fixe λ. Il suffit de prendre le point $\bar{x}$ sur L à une distance de x_0 moindre que λ, pour voir que la solution étudiée est algébroïde pour $x = x_0$; pour $x = x_0$, $\frac{dy}{dx}$ a donc une valeur finie bien déterminée ou est infinie. C.Q.F.D.

Supposons maintenant que, x tendant vers x_0 sur un chemin L, la dérivée y' de la solution considérée tende vers une limite finie y'_0 : qu'advient-il de $y(x)$? Si le chemin L a une longueur finie, il est clair que $y(x)$ tend vers une limite finie y_0. Mais si L n'admet pas une tangente continue, à priori $y(x)$ peut tendre vers y_0, ou vers l'infini, ou ne tendre vers aucune limite. Montrons que cette dernière hypothèse est impossible : il suffit pour cela de décrire, dans le plan des y, un cercle de rayon très grand et des cercles γ de rayons très petits, le premier ayant l'origine comme centre, les autres les points $Y_0 = G(x_0)$ et $Y = g(x_0)$. Si (quand x tend vers x_0 sur L) $y(x)$ ne tend pas vers l'infini ou vers un des points Y_0, il existe sur L des points x aussi voisins de x_0 qu'on veut et pour lesquels $y(x)$ appartient à l'aire A intérieure à Γ et extérieure aux γ. Il suit de là, comme plus haut, que $y(x)$ est algébroïde pour $x = x_0$.

Cas où y' devient infini. — Discutons maintenant l'hypothèse où, x tendant vers x_0 sur un chemin L, y tend vers une valeur finie y_0, et y' vers l'infini.

Posons pour cela $y' = \frac{1}{z}$, et prenant y comme variable indépendante étudions le système :

$$(4) \qquad \frac{dx}{dy} = z, \qquad \frac{dz}{dy} = -z^3 R\left(\frac{1}{z}, y, x\right) \equiv \frac{P_1(z,y,x)}{Q_1(z,y,x)}$$

Deux cas sont à distinguer suivant que P_1

renferme ou non z en facteur, autrement dit suivant qu'on a: $p \leq q+2$ ou $p > q+2$, p et q désignant les degrés de P, Q en y'.

Soit d'abord $p \leq q+2$. — Si $Q_1(o, y_o, x_o)$ n'est pas nul, le système (4) n'admet comme solution $x(y)$, $z(y)$ correspondant aux conditions initiales $y=y_o$, $x=x_o$, $z=o$, que la solution $x \equiv x_o$, $z=o$. Il n'existe pas de solution $y(x)$ de (1) telle que (x tendant vers x_o sur un chemin L) y tende vers y_o, y' vers l'infini: à moins toutefois que y_o, x_o ne vérifient la condition $Q_1(o, y_o, x_o)=o$, [qui n'est pas une identité].

Soit maintenant $p > q+2$. — Prenons z comme variable indépendante et étudions le système:

$$(5) \qquad \frac{dx}{dz} = -\frac{zQ_1}{P_1}, \qquad \frac{dy}{dz} = -\frac{Q_1}{P_1}$$

Si $P_1(o, y_o, x_o)$ n'est pas nul, ce système admet une solution unique $x = \psi(z)$ $y = \chi(z)$ qui répond aux conditions initiales $z=o$, $x=x_o$, $y=y_o$ solution qui est de la forme:

$$(6) \qquad x = \psi(z) = a_{\nu+1} z^{\nu+1} + \cdots, \quad y = \chi(z) = b_\nu z^\nu + \dots\dots, \ (\nu > o),$$

où $a_{\nu+1}$ est différent de zéro. Il n'y aurait d'exception que si ψ se réduisait à la constante x_o, et par suite, si on avait, pour z quelconque, $Q_1(z, x_o, y)=o$: le point x_o ne faisant pas partie des points ξ, ce cas ne se présente que si y_o coïncide avec une des valeurs $Y_o = G(x_o)$.

Quand $P_1(o, y_o, x_o)$ est nul, $\frac{dx}{dz}$ a (pour les conditions initiales considérées) la forme $\frac{o}{o}$. C'est pourquoi nous ajouterons aux points ξ les points x, qui annulent tous les coëfficients de $P_1(o, y, x)$, c'est-à-dire tous les coefficients du polynôme Π_p en y qui multiplie dans P la puissance y'^p de y'. Nous ajouterons de même aux valeurs exceptionnelles $Y = g(x)$ de y, les valeurs $Y = g_1(x)$ qui vérifient la condition $\Pi_p(y, x) = o$.[1]

[1] Quand p est égal à $q+3$, ni P_1, ni Q_1 ne renferme z en facteur. Si $P_1(o, y_o, x_o)$ est nul, sans

Il suit de là que, si x_0 ne coïncide avec aucun des points ξ, et si y_0 ne coïncide avec aucune des valeurs exceptionnelles $Y_0 = Y(x_0)$, il existe une solution $y(x)$ de l'équation (1) et une seule qui tende vers y_0, y' tendant vers l'infini, quand x tend vers x_0 sur un chemin L : cette solution est représentée par la fonction $y(x)$ à $(\nu+1)$ branches définie dans le domaine de $x = x_0$ par les égalités (6).

De plus, soit a un point x distinct des points ξ, b un point y distinct des points $Y = G(a)$, $Y = g_1(a)$. La solution $y(x)$ de (1) qui répond aux conditions initiales x_0, y_0, y'_0, soit $y = \varphi(x, y'_0, y_0, x_0)$, est une fonction algébroïde de x, y'_0, y_0, x_0 pour $x = a$, $y'_0 = \infty$, $y_0 = b$, $x_0 = a$. La fonction $y(x)$ est donc sûrement algébroïde à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon fixe λ, tant que x_0, y_0, y'_0 vérifient les inégalités :

$$|x_0 - a| < r, \quad |y_0 - b| < r, \quad |y'_0| > \frac{1}{r},$$

r étant un certain nombre positif (suffisamment petit).

Nous pouvons dès lors démontrer ce théorème :

Théorème. — Si p est supérieur à $q+2$, [p et q désignant les degrés de P, Q en y], aucune solution $y(x)$ ne saurait devenir indéterminée quand x tend vers un point a (distinct des points ξ).

Autrement dit, quand x tend vers a d'une façon quelconque, $y(x)$ tend vers une limite finie ou vers l'infini.

Pour démontrer ce théorème nous nous appuierons sur un lemme qui résulte immédiatement de la discussion précédente.

Soit a un point du plan des x distinct des points ξ; décrivons, dans le plan des y, de chacun des points $Y(a)$ comme centre, un

---

que $Q_1(0, y_0, x_0)$ le soit, on peut garder y comme variable indépendante, et étudier le système (4) qui admet alors une solution holomorphe $x = \psi(y)$, $z = \chi(y)$ répondant aux conditions initiales, et où x ne se réduit pas à x_0, (du moment que x_0 n'est pas un des points ξ qui annulent tous les coëfficients de $\Pi_p(y)$]. Il n'y a donc lieu, dans ce cas, d'introduire comme nouvelles singularités que les valeurs de x, y qui annulent à la fois $P_1(0, y, x)$ et $Q_1(0, y, x)$, c'est-à-dire $\Pi_p(y, x)$ et $K_q(y, x)$ [coëfficient de y'^q dans Q]. Si les deux équations $\Pi_p = 0$, $K_q = 0$ ne sont compatibles que pour des valeurs exceptionnelles de x, il faut ajouter ces valeurs aux valeurs ξ ; si elles admettent des solutions $y = g_1(x)$ quel que soit x, il faut ajouter les couples $y = g_1(x)$, $z = 0$, aux couples exceptionnels $y = g(x)$, $y' = h(x)$.

cercle γ de rayon très petit ϱ, et de l'origine comme centre un cercle Γ de rayon $\frac{1}{\varrho}$. Quand x varie à l'intérieur et sur la circonférence d'un cercle C de centre a et de rayon r suffisamment petit, les points $Y=G(x)$, $Y=g(x)$ restent intérieurs aux cercles γ [ou extérieurs à Γ si certaines valeurs $G(a)$, $g(a)$, $g_1(a)$ sont infinies]. Soit A l'aire du plan des y intérieure à la circonférence Γ et extérieure aux γ. Je dis que, dans l'hypothèse $p > q+2$, la solution $y(x)$ qui correspond aux conditions initiales x_0, y_0, y'_0, est sûrement algébroïde à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon fixe λ, quand x_0, y_0 varient respectivement dans C et dans A, et y'_0 dans tout son plan.

En effet, décrivons dans le plan des y', un cercle Γ' ayant l'origine comme centre, et soit A' l'aire du plan des y' intérieure à Γ', A'' l'aire extérieure. Quand y'_0 varie dans A' et sur la circonférence Γ', la proposition en question est démontrée (voir page 400-401) : soit λ' la valeur correspondante de λ. Posons maintenant $y' = \frac{1}{z}$: à l'aire A'' correspond, dans le plan des z, l'aire B intérieure à une circonférence Γ''. La solution $y=\varphi(x, \frac{1}{z_0}, y_0, x_0)$, $z = \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}$, est algébroïde en x à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon fini λ_0, pour tout système de valeurs x_0, y_0, z_0, qui appartient au domaine C, A, B. Il suffit dès lors de répéter identiquement le raisonnement de la page 401, pour voir que λ_0 admet une limite inférieure positive, soit $\lambda'' > 0$, quand x_0, y_0, z_0 varient dans C, A, B. Si on prend pour λ le plus petit des deux nombres λ', λ'', le lemme est démontré.

Revenons au théorème que nous avons énoncé : soit $y(x)$ une solution de (1) ; si, quand x tend vers a,[1] y tend vers une des valeurs $G(x)$, $g(x)$, $g_1(x)$ ou vers l'infini, le théorème est vérifié. Sinon, le nombre positif ϱ ayant été choisi assez petit une fois

---

[1] Sans rencontrer de points singuliers de $y(x)$.

pour toutes, il existe des valeurs x_0 de x aussi voisines de α qu'on le veut, pour lesquelles $y(x)$ appartient à l'aire A. Il suffit de prendre x_0 à une distance de α moindre que r et que λ, pour voir que $y(x)$ est algébroïde pour $x = \alpha$. Le théorème est établi.

D'après cela, quand x tend vers un point x_0, (distinct des points ξ), $y_1(x)$ tend vers une limite finie y_0 ou vers l'infini. Quand la valeur y_0 est finie et distincte des valeurs $Y_0 = G(x_0)$, y' tend vers une valeur finie y'_0 ou vers l'infini (voir page 403). Dans l'hypothèse $p > q+2$, la fonction $y'(x)$ ne peut donc être indéterminée quand x tend vers x_0 sans que y tende soit vers l'infini, soit vers une des valeurs $Y_0 = G(x_0)$.[1]

Quand x est égal ou inférieur à $q+2$, les théorèmes précédents se modifient ainsi :

Théorème. — Supposons que x tendant vers un point α (distinct des points ξ), les deux fonctions $y(x)$, $y'(x)$ [solution de (1)] ne tendent pas l'une et l'autre vers une limite, (finie ou infinie) : si η désigne le plus petit des modules :

$$\left|\frac{1}{y'}\right|, \left|\frac{1}{y}\right|, \ldots \left|y - G(\alpha)\right| \ldots,$$

η tend vers zéro quand x tend vers α.

Soit $y(x)$ une solution de (1) telle que η ne tende pas vers zéro quand x tend vers α : le théorème sera établi si je montre que $y(x)$ et $y'(x)$ tendent respectivement vers une limite finie y_0, y'_0.

Dans le plan des y, décrivons de l'origine comme centre un cercle Γ de rayon $\frac{1}{\varrho}$, et des points $b = G(\alpha)$, $b_1 = g(\alpha)$ comme centres, des cercles γ et γ_1 de rayon ϱ [ϱ étant très petit]. De même dans le plan des y', décrivons de l'origine comme centre

---

(1) Je rappelle que les valeurs $y = G(x)$ sont pôles de $y'' = R(y', y, x)$ quel que soit y'.

un cercle Γ' de rayon $\frac{1}{\varrho}$, et des points $b'_1 = h(\alpha)$ comme centres, des cercles γ'_1 de rayons ϱ. Si x varie à l'intérieur d'un cercle C de centre α et de rayon r suffisamment petit, les valeurs $Y = G(x)$, $Y = g(x)$, $Y' = h(x)$, restent respectivement intérieures aux cercles $\gamma, \gamma_1, \gamma'_1$. De plus, si x_0 est intérieur à C, y_0 intérieur à Γ et extérieur aux γ_0, y'_0 intérieur à Γ', la solution $y(x)$ de (1) qui correspond aux conditions initiales x_0, y_0, y'_0, est sûrement algébroïde à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon fixe λ, pourvu toutefois y_0, y'_0 ne soient pas intérieures simultanément à un des couples de cercles γ_1, γ'_1.

Ceci posé, si pour la solution $y(x)$ considérée, η ne tend pas vers zéro, il existe des valeurs x_0 de x aussi voisines de α qu'on veut et pour lesquelles le point $y(x)$ est intérieur à Γ et extérieur aux γ, le point $y'(x)$ intérieur à Γ', (le nombre ϱ ayant été choisi assez petit une fois pour toutes). Prenons une telle valeur x_0 de x à une distance de α moindre que r et λ : si $y_0, y'_0, \gamma_1, \gamma'_1$, ne sont pas intérieurs à un des couples de cercles γ_1, γ'_1 la solution $y(x)$ est algébroïde pour $x = \alpha$; si au contraire y_0 et y'_0 sont intérieurs respectivement à γ_1, γ'_1, ou bien, quand x tend vers α, $y(x)$ et $y'(x)$ tendent vers $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, ou bien, quand x tend vers α en partant de x_0, un au moins des points y, y' sort[1] de γ_1 ou de γ'_1, et $y(x)$ est algébroïde au point $x = x_0$. C. Q. F. D.

---

[1] Du moment qu'on a pris ϱ (une fois pour toutes), suffisamment petit. Si $y(x)$, $y'(x)$ ne tendent pas vers $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, il existe une certain nombre positif σ tel que $|y - g(\alpha)| + |y' - h(\alpha)|$, soit supérieur à σ, pour des valeurs de x voisines de α qu'on veut : il suffit d'avoir pris ϱ inférieur à $\frac{\sigma}{2}$ pour être certain que y, y' ne restent pas l'un et l'autre intérieurs à γ_1 ; γ'_1.

En particulier, s'il n'existe pas de valeur $y = G(x)$, (pôle de y'' quel que soit y'), le théorème précédent exprime que $M(x)$ désignant le plus grand des modules $|y(x)|$ et $|y'(x)|$, $M(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers a, du moment que y, y' ne tendent respectivement vers une limite finie y_0, y'_0.

Cas où y devient infini. Nous sommes conduits ainsi, pour achever cette discussion, à étudier les grandes valeurs de y. A cet effet, posons $y = \frac{1}{z}$, et formons l'équation differentielle que vérifie z:

$$(1)' \qquad z'' = z^2 \left[\frac{z'^2}{z^3} - R\left(\frac{-z'}{z^2}, \frac{1}{z}, x\right)\right] \equiv R'(z', z, x) \equiv \frac{P'(z', z, x)}{Q'(z', z, x)}.$$

Nous pouvons répéter pour l'équation (1)' tout ce qui a été dit pour l'équation (1). Nous ajoutons aux points ξ énumérés plus haut, tous les points analogues ξ' attachés à (1)': on voit bien aisément que les seuls points ξ' qui ne fassent pas partie des ξ sont les points ξ' pour lesquels $Q'(z', 0, \xi')$ est nul quel que soit z'.

Si $z = 0$ annule Q' quelque soient z', x, je conviens de dire que $y = \infty$ est un des points singuliers $y = G(x)$ de l'équation (1).

Si $Q'(z', 0, x)$ n'est pas identiquement nul, toute solution $z(x)$ de (1)' répondant aux conditions initiales x_0, $z = 0$, z'_0 (où x_0 n'est pas un des points ξ, ξ') est algébroïde pour $x = x_0$, et par suite $y = \frac{1}{z}$, $y' = \frac{dy}{dx}$ sont algébroïdes et infinies pour $x = x_0$, à moins toutefois que $P'(z'_0, 0, x_0)$, $Q'(z'_0, 0, x_0)$ ne soient nuls simultanément; dans ce dernier cas, x_0 peut être un point transcendant de $z(x)$, mais si z'_0 n'est pas nul, l'égalité $y' = -\frac{z'}{z^2}$ montre que $y'(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers x_0; si z'_0 est nul, il n'est pas certain que $y'(x)$ tende vers une limite ou vers l'infini

quand x tend vers x_0. — Si $P'(0,0,x)$, $Q'(0,0,x)$ sont tous deux identiquement nuls, je conviens encore de dire que $y = \infty$ est un des points singuliers $y = G(x)$ de (1); sinon, le point $y = \infty$ du plan des y est dit point ordinaire de l'équation (1).

Plaçons-nous dans l'hypothèse où $y = \infty$ est un point ordinaire de (1), et où on a en même temps: $p > q + 2$. Nous savons que x tendant vers un point x_0 (distinct des points ξ), toute solution $y(x)$ de (1) tend soit vers l'infini, soit vers une limite finie y_0. Je dis que, si y tend vers l'infini, y' tend nécessairement vers l'infini.[1]

En effet, la solution $z = \frac{1}{y}$ de (1)' tend vers zéro quand x tend vers x_0; et comme le point $z = 0$ du plan des z est un point ordinaire de (1)', z' tend nécessairement soit vers l'infini, soit vers une limite z'_0. Il suit de là que y' ou $-\frac{z'}{z^2}$ tend vers l'infini, à moins toutefois que z'_0 ne soit nul; mais comme, par hypothèse, $P'(0, 0, x_0)$, $Q(0, 0, x_0)$ ne sont pas nuls tous les deux, la solution $z(x)$ qui correspond aux conditions initiales x_0, $z_0 = 0$, $z'_0 = 0$ est algébroïde pour $x = x_0$, par suite $y(x)$ et $y'(x)$ sont infinis pour $x = x_0$. C. Q. F. D.

D'après cela, quand x tend vers x_0, $y'(x)$ ne peut être indéterminé que si $y(x)$ tend vers une des valeurs $Y_0 = G(x_0)$. Si de telles valeurs n'existent pas, y' tend nécessairement soit vers l'infini, soit vers une limite. D'où ce théorème :

Théorème. — « Quand p est supérieur à $q+2$, et quand « il n'existe pas, pour l'équation (1), de valeurs singulières $y = G(x)$ [finies ou non], « toute solution $y(x)$ de (1) et sa dérivée $y'(x)$ tendent nécessairement vers des « valeurs déterminées y_0, y'_0 (finies ou non) quand x tend vers x_0. Il n'y a d'exception « que si x_0 coïncide avec certains points fixes ξ qui se mettent en évidence sur « l'équation (1). »

---

[1] La proposition est en défaut si $y = \infty$ n'est pas un point ordinaire (1); quand y tend vers l'infini (x tendant vers x_0), $y'(x)$ peut être <u>indéterminée</u>: son module dépasse toute limite pour certaines valeurs de x qui tendent vers x_0 et peut au contraire être très petit pour d'autres valeurs.

Convenons de dire dorénavant que deux fonctions analytiques $y(x)$, $y'(x)$, pour lesquelles x_0 est un point transcendant, admettent ce point comme point <u>essentiel</u> dans le seul cas où il existe des chemins L[1] tels que, x tendant vers x_0 sur L, une au au moins des fonctions $y(x)$, $y'(x)$ ne tende vers aucune limite. Le théorème précédent exprime que [moyennant les hypothèses faites sur (1)] l'intégrale générale $y(x)$, $y'(x)$ de (1) ne saurait présenter de singularités essentielles mobiles.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où p étant au plus égal à $q+2$, $y=\infty$ est encore un point ordinaire de (1). Je dis dans ce cas que si, x tendant vers x_0, la solution $y(x)$, $y'(x)$ ne tend pas vers y_0, y'_0 (valeurs déterminées, finies ou infinies), le plus petit module $\eta(x)$ des quantités $\frac{1}{y'}, \ldots y - G(x_0) \ldots$ tend vers zéro quand x tend vers x_0.

Nous savons, en effet, que le plus module η_1 des quantités $\frac{1}{y'}, \frac{1}{y_\cdot}, \ldots \ldots y - G(x_0) \ldots$ tend vers zéro quand x tend vers zéro (voir page 407). Si, pour une valeur de x, η_1 et η ne coïncident pas, c'est que η coïncide avec $\left|\frac{1}{y}\right|$. Montrons que cela est impossible : pour cela, revenons à l'équation (1)'; si la solution $z=\frac{1}{y}$, $z'=\frac{dz}{dx}$ de (1)' tend vers z_0, z'_0, les valeurs z_0, z'_0 sont nécessairement nulles, autrement y et y' tendraient vers $\frac{1}{z_0}$, $\frac{-z'_0}{z_0^2}$; mais la solution $z(x)$ qui correspond à x_0, $z_0=0$, $z'_0=0$, est algébroïde pour $x=x_0$ [puisque $y=\infty$ est un point ordinaire de (1)]; il en serait donc de même de $y(x)$, ce qui est contre l'hypothèse. Il faut donc que $z(x)$, $z'(x)$ admettent $x=x_0$ comme singularité essentielle : mais nous savons que, dans ce cas, le module minimum $\eta_2(x)$ des quantités $\frac{1}{z'}, \frac{1}{z}, \ldots \left(z - \frac{1}{G(x_0)}\right) \ldots$, tend vers zéro quand x tend vers x_0[2]. Si pour une valeur de x voisine de x_0, $\left|\frac{1}{y}\right|$ est très petit,

---

(1) Le chemin L est assujetti à ne rencontrer aucune discontinuité de $y(x)$ (autre que x_0), en particulier à ne pas franchir de coupures de $y(x)$ dans le cas où x_0 ferait partie d'une ligne singulière.

(2) Il est loisible de supposer (en changeant s'il est nécessaire y en $y+h$) qu'aucune des valeurs $G(x_0)$ n'est nulle ; si $G(x_0)$ est infinie, x_0 fait partie des points ξ' qui annulent $Q'(z',0,\xi')$ quel que soit z' ou des points ξ.

$|z|$, ... $\left|z - \frac{1}{G(x_0)}\right|$..... sont plus grands qu'un certain nombre positif fini, $\left|\frac{1}{z'}\right|$ est donc très petit, et on a $\left|\frac{y^2}{y'}\right| < 1$, donc $\left|\frac{1}{y'}\right| < \frac{1}{|y^2|} < \eta^2 < \eta$; η n'est donc pas le module minimum des quantités $\frac{1}{y'}$, $\frac{1}{y}$, ... $y - G(x_0)$ ..... C. Q. F. D.

En particulier, – s'il n'existe pas de valeur $y = G(x)$, – quand x tend vers x_0, y' tend nécessairement soit vers une valeur finie, soit vers l'infini.

– Introduction de la transformation homographique. –

En effectuant sur y une transformation homographique dont les coëfficients sont des fonctions de x arbitrairement choisies, il nous est loisible de faire en sorte que $y = \infty$ devienne un point ordinaire de l'équation différentielle considérée.

Partons en effet d'une équation (1) entièrement quelconque

$$(1) \qquad y'' = \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)} .$$

Soit $y = h(x)$ une fonction de x qui ne vérifie pas l'équation (1), et n'annule pas Q quel que soit y' : si on remplace y par $y + h$, dans la nouvelle équation (1) $P(0, 0, x)$ n'est pas identiquement nul, et $y = 0$ n'est pas un pôle de y'' quel que soit y'. Si on pose ensuite $y = \frac{1}{y_1}$, l'équation différentielle en y_1 sera une équation pour laquelle $y_1 = \infty$ sera un point ordinaire.

Si donc nous effectuons dans (1) une transformation homographique $y = \frac{u(x)\, y_1 + v(x)}{u_1(x)\, y_1 + v_1(x)}$, la nouvelle équation admettra le point à l'infini du plan des y comme point ordinaire (du moment que les coëfficients u, v, u_1, v_1 ne seront pas choisis d'une manière exceptionnelle). Un calcul tout élémentaire montre qu'après une telle transformation, la forme générale de l'équation (1) est la suivante :

$$(A) \qquad y'' = \frac{\Pi_{q+2+m}\, y'^{\,q+2+m} + \dots + \Pi_1\, y' + \Pi_0}{K_q\, y'^{\,q} + \dots + K_1\, y' + K_0} \qquad (m \geqq 0) ;$$

si r_i, ρ_j désignent les degrés en y des polynômes Π_i, K_j, et si Π_i^0, K_j^0 désignent le coëfficient de y^{r_i}, y^{ρ_j} dans Π_i, K_j, on a :

$$2q + \rho_q = 2(q-1) + \rho_{q-1} = \ldots\ldots = 2 + \rho_1 = \rho_0 \, ;$$

$$2q + \rho_q + 2 = 2r_0 = 2 + r_1 = 2(q+2+l) + r_{q+2+l} \, , \qquad [l = 1, 2, \ldots\ldots m] \, ;$$

$$2q + \rho_q + 3 = 2(2+k) + r_{2+k} \, , \qquad [k = 1, 2, \ldots\ldots q] \, ;$$

avec $$2K_j^0 \equiv \Pi_{j+2}^0 \, , \qquad [j = 1, 2, \ldots q] \, .$$

— Conclusions — Admettons donc qu'on ait effectué dans (1) sur y une transformation homographique quelconque, les théorèmes établis plus haut se résument ainsi :

Dans l'étude de l'équation (A), quatre cas sont à distinguer, suivant que p est ou non supérieur à q. $[m > 0$ ou $m = 0]$, et qu'il existe ou non des valeurs $y = G(x)$, pôles de y'' quel que soit y'.

1er Cas. — Le coëfficient différentiel y'' n'admet pas de pôle $y = G(x)$ indépendant de y', et p est plus grand que $q+2$, $[m > 0]$

L'intégrale générale $y(x)$ de (A) ne peut alors présenter de singularités essentielles mobiles : quand x tend vers x_0, [x_0 ne faisant pas partie de certains points fixes ξ], toute solution $y(x)$ de (A) et sa dérivée tendent vers des valeurs déterminées y_0, y'_0 [qui peuvent être infinies].

2e Cas. — Le coëfficient différentiel y'' admet au moins un pôle $y = G(x)$ indépendant de y, mais p est plus grand que $q+2$.

La fonction $y(x)$ ne peut présenter de singularités essentielles mobiles, mais $y'(x)$ peut en présenter. Si x_0 est une telle singularité de $y'(x)$, $y(x)$ tend nécessairement vers une des valeurs $G(x_0)$ (quand x tend vers x_0).

3e Cas. — Le coëfficient différentiel y' n'admet pas de pôle $y = G(x)$ indépendant de y', mais p est égal à $q+2$, $[m = 0]$

La fonction $y(x)$ peut présenter des singularités essentielles mobiles, mais la fonction $y'(x)$ n'en présente pas. Si x_0 est une telle singularité de $y(x)$, y' tend nécessairement vers l'infini (quand x tend vers x_0).

4e Cas — y'' admet au moins un pôle $y = G(x)$ indépendant

de y', et p est égal à $q+2$, $(m=0)$.

Les deux fonctions $y(x)$, $y'(x)$ peuvent présenter l'une et l'autre des singularités essentielles mobiles ; si x_0 est une telle singularité, le module minimum $\eta(x)$ de $\frac{1}{y'}$ et des différences $(y-G)$ tend vers zéro quand x tend vers x_0.

— De l'intégrale $y(x, y'_0, y_0, x_0)$ considérée comme fonction des constantes —

Dans les quatre cas énumérés plus haut, l'intégrale générale $y(x)$, $y'(x)$ de (A) peut présenter des points transcendants mobiles ; dans les trois derniers cas seulement, ces points peuvent être essentiels. Considérons maintenant la fonction $y = \varphi(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ qui définit la solution $y(x)$ correspondant aux conditions initiales $\bar{x}_0, y_0, y'_0$, [x_0 représente une valeur numérique choisie une fois pour toutes en dehors des valeurs ξ]. Si nous donnons à x, y_0 par exemple des valeurs numériques quelconques $\bar{x}$, $\bar{y}_0$, la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ présente-t-elle dans le champ des y'_0 des singularités transcendantes ? De même, la fonction $y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}'_0, y_0, \bar{x}_0)$ présente-t-elle dans le champ des y_0 des singularités transcendantes ?

Tout d'abord, si l'intégrale générale $y(x)$ de (A) présente des singularités transcendantes mobiles, il est clair que la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ présente dans le champ des y_0, y'_0, des singularités transcendantes variables avec x. Soit en effet $\bar{x}$ un point singulier transcendant de la solution $y = \varphi(x, \bar{y}'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$, x variant avec $\bar{y}'_0$, $\bar{y}_0$: un raisonnement tout élémentaire(1) de la théorie des fonctions montre que la fonction $\varphi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ ne saurait être algébroïde pour $y_0 = \bar{y}_0, y'_0 = \bar{y}'_0$

Mais quand l'intégrale $y(x)$ ne présente comme singularités mobiles, que des points singuliers algébriques, quelles singularités peuvent

(1) Je n'insiste pas sur la démonstration de cette proposition bien évidente (et d'ailleurs négative) dont nous n'aurons pas besoin par la suite.

affecter la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$? Pour répondre à cette question, il nous faut distinguer quatre cas, à savoir les quatre cas de la page 413

Dans le premier cas, les deux fonctions $y = \varphi(\bar{x}, y'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ et $y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}'_0, y_0, \bar{x}_0)$ ne peuvent présenter dans chacun des plans y'_0 et y_0, à distance finie ou infinie, que des points singuliers algébriques.

Dans le second cas, la proposition est encore vraie pour la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$; tandis que la fonction $y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}'_0, y_0, \bar{x}_0)$ peut admettre des points transcendants fixes, à savoir certains des points $y_0 = G(\bar{x}_0)$.

Dans le troisième cas, la première proposition subsiste pour $y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}'_0, y_0, \bar{x}_0)$, tandis que la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ peut admettre le point $y'_0 = \infty$ comme point transcendant.

Dans le quatrième cas, les fonctions $\varphi(\bar{x}, y'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ et $\varphi(\bar{x}, \bar{y}'_0, y_0, \bar{x}_0)$ peuvent admettre comme points transcendants, la première le point $y'_0 = \infty$, la seconde les points $y_0 = G(x_0)$.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de répéter avec quelques complications de rigueur le raisonnement déjà employé pour le premier ordre (pages 36 - 38). Soit $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0$ un système de conditions initiales où $\bar{y}_0, \bar{y}'_0$ sont finis et n'annulent pas à la fois $P(\bar{y}'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$, $Q(\bar{y}'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ et où $\bar{y}_0$ est distinct des points $G(\bar{x}_0)$. L'intégrale générale $y = \varphi(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ de (A) est algébroïde pour $x = \alpha$, $y'_0 = \bar{y}'_0$, $y_0 = \bar{y}_0$, du moment que α est suffisamment voisin de α_0. Allons du point $\bar{x}_0$ au point $\bar{x}$ quelconque du plan des x sur un chemin L qui ne rencontre aucun des points ξ : on montre que $\varphi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ est encore algébroïde pour $x = \alpha$, $y'_0 = \bar{y}'_0$ $y_0 = \bar{y}_0$, quel que soit le point α sur le chemin L, en particulier pour $\alpha = \bar{x}$.

Le même raisonnement peut se répéter pour $y_0 = \infty$ (en changeant y en $\frac{1}{y_1}$), et, dans le cas $p > q + 2$, pour $y'_0 = \infty$ (en changeant y' en $\frac{1}{z}$)

Je me borne à ces indications qui permettent de reconstituer le raisonnement dans ses détails. Nous ne nous appuierons pas plus loin sur ce théorème, si ce n'est dans un cas particulier où il sera établi directement.[1]

J'ajoute que le même raisonnement montre que dans aucun cas

[1] Voir pages 446 - 453.

l'intégrale $y = \varphi(x, y_0', y_0, \bar{x}_0)$ ne peut présenter[1] dans le plan des y_0 et dans le plan des y_0' de points essentiels ou critiques indépendants de x autres que les points $y_0 = G(x_0)$ dans le plan des y_0, et (dans l'hypothèse $p = q+2$) le point $y_0' = \infty$ du plan des y_0'.

Remarque. – L'intégrale $y(x)$ de (A) ne peut présenter de singularités essentielles mobiles que si une au moins des conditions $p = q+2$, et $\mathcal{Q}[y', G(x), x] \equiv 0$ est remplie [G étant une certaine fonction de x]. Mais ces conditions ne suffisent pas pour qu'il existe sûrement des singularités essentielles mobiles. Par exemple, l'équation

$$y'' = \frac{y'^2}{y}$$

vérifie les deux conditions, et son intégrale $y = y_0 e^{\frac{y_0'}{y_0}(x - x_0)}$ est holomorphe dans tout le plan des x.

---

[1] Il peut se faire qu'une fonction de deux variables $\varphi(y_0', y_0)$ ne soit pas algébroïde pour des valeurs isolées $y_0 = b$, $y_0' = \beta$ des deux variables indépendantes, bien que la fonction $\varphi(y_0', \bar{y}_0)$ soit algébroïde pour $y_0' = \beta$, quand $\bar{y}_0$ a reçu une valeur numérique égale à b ou voisine de b, et, bien que de même $\varphi(\bar{y}_0', y_0)$ soit algébroïde pour $y_0 = b$, la valeur numérique $\bar{y}_0'$ étant égale à β ou voisine de β. Considérons par exemple la fonction :

$$\varphi(y_0, y_0') = \int_{y_0=1,\, y_0'=1}^{y_0, y_0'} \frac{y_0'\, dy_0 - y_0\, dy_0'}{\sqrt{(y_0'^2 - y_0^2)(y_0'^2 - k^2 y_0^2)}} \;;$$

Cette fonction qui admet une infinité de valeurs permutables dans le domaine de $y_0 = 0$, $y_0' = 0$, n'est donc point algébroïde dans ce domaine, mais la fonction :

$$\varphi(\bar{y}_0', y_0) = -\int_1^{\bar{y}_0'} \frac{dy_0'}{\sqrt{(y_0'^2 - 1)(y_0'^2 - k^2)}} + \bar{y}_0' \int_1^{y_0} \frac{dy_0}{\sqrt{(\bar{y}_0'^2 - y_0^2)(\bar{y}_0'^2 - k^2 y_0^2)}}$$

est holomorphe pour $y_0 = 0$, si petit que soit $\bar{y}_0'$ et en particulier pour $\bar{y}_0' = 0$; une remarque analogue s'applique à $\varphi(y_0', \bar{y}_0)$. Nous laissons de côté, dans la discussion précédente, les singularités isolées de cette nature : dans la fonction $y = \varphi(x, y_0, y_0', x_0)$ nous donnons à toutes les variables, sauf à une seule, des valeurs numériques arbitraires, et nous étudions les singularités de la fonction, dans le champ de cette seule variable.

De même, quand les singularités transcendantes ou essentielles de $y(x)$ sont fixes, la fonction $y = \varphi(x, y_0, y'_0, x_0)$ ne peut présenter, dans le plan des y_0 ou dans le plan des y'_0, de singularités transcendantes, que si une au moins des deux mêmes conditions est remplie. Mais, là non plus, ces conditions ne sont pas suffisantes : c'est ainsi que l'équation

$$y'' = \frac{-y'^2 + Ay'y_1 + By^2 + C}{y}$$

satisfait aux deux conditions énoncées, bien que son intégrale puisse s'écrire : $y^2 = cf + c_1 f_1 + f_2$, f, f_1, f_2 étant des fonctions de x, et c, c_1 deux constantes arbitraires, et que y soit par suite une fonction algébrique de y_0, y'_0.

C'est là un point sur lequel je reviendrai dans la leçon prochaine. Je vais maintenant étendre les résultats obtenus aux équations du second ordre les plus générales algébriques en y'', y', y.

— Equations différentielles $F(y'', y', y, x) = 0$ algébriques en y'', y', y. —

Soit :

(1) $$0 = F(y'', y', y, x) \equiv P_m\, y''^m + P_{m-1}\, y''^{m-1} + \dots + P_1\, y'' + P_0$$

une équation du second ordre où F est un polynôme e y'', y', y, irréductible pour une valeur quelconque de x (exception faite de certaines valeurs singulières ξ que je marque immédiatement dans le plan des x). Je marque également, dans le plan des x, tous les points $x = \xi$ qui sont des singularités des coëfficients $a(x)$ du polynôme F, ou qui annulent tous les coëfficients du polynôme P_m en y', y. Je considère de plus la relation $P_m(y', y, x) = 0$: si, quel que soit x, elle est vérifiée par des valeurs de y indépendantes de y', je représente par $Y = G(x)$ une quelconque de ces valeurs. Je peux toujours mettre P_m sous la forme :

$$P_m = P'_m(y, x)\, P''_m(y', y, x),$$

P'_m étant un polynôme en y, P''_m un polynôme en y', y et les racines y de l'équation $P''_m(\bar{y}', y, \bar{x}) = 0$ dépendant toutes de $\bar{y}'$, si ce n'est pour des valeurs exceptionnelles de $\bar{x}$, que j'ajoute aux points ξ. Enfin, si les inégalités

(2) $$P_m(y', y, x) = 0, \qquad P_{m-1}(y', y, x) = 0, \dots, P_0(y', y, x) = 0$$

sont compatibles quel que soit x, je représente par $y = g(x)$, $y' = h(x)$ une quelconque de leurs solutions communes. Quand, pour des valeurs exceptionnelles de x, les égalités (2) admettent des solutions distinctes des précédentes, j'ajoute ces valeurs exceptionnelles aux valeurs ξ.

Passons aux valeurs y', y, x dans le voisinage desquelles plusieurs déterminations de y'' se permutent. J'ajoute d'abord aux points ξ les points x qui sont points critiques de y'' quels que soient y', y. S'il existe, pour $\bar{x}$ quelconque, des valeurs y indépendantes de $\bar{y}'$, qui soient points critiques de la fonction $y''(y', y, x)$, je représente par $Y = H(x)$ une quelconque de ces valeurs. Si, pour des valeurs exceptionnelles de $\bar{x}$, la fonction $y''(\bar{y}', y, \bar{x})$ admet des points critiques indépendants de $\bar{y}'$, qui ne coïncident pas avec les valeurs $Y = H(x)$, j'ajoute ces valeurs $\bar{x}$ exceptionnelles aux valeurs ξ.

Ceci posé, je considère la fonction algébrique $y''(y')$ définie par l'égalité $F(y'', y', \bar{y}, \bar{x}) = 0$, où $\bar{x}, \bar{y}$ ont été choisis arbitrairement, et soit $\bar{y}' = K(\bar{y}, \bar{x})$ un point critique d'une certaine branche de la fonction $y''(y')$. Si nous posons $y' - K(y, x) = z^{\nu}$, ν désignant un certain entier positif, la branche considérée de la fonction $y''(y', y, x)$ pourra s'écrire :

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{r} y'' = \\ \text{ou} \quad \dfrac{1}{y''} = \end{array}\right\} \alpha_{\mu}(y, x) z^{\mu} + \alpha_{\mu+1}(y, x) z^{\mu+1} + \ldots\ldots ,$$

le second membre de (3) étant holomorphe pour $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = 0$. – Il n'y a d'exception que pour des valeurs $\bar{x}, \bar{y}$ singulières. D'une façon précise, la fonction $y' = K(y, x)$ est définie par la relation $S(y', y, x) = 0$, où S est le résultant obtenu en éliminant y'' entre $F = 0$, et $\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$. Nous ajoutons aux valeurs ξ les valeurs x pour lesquelles l'équation $S = 0$ en y' a (quel que soit y) une racine infinie ou deux racines égales ; nous ajoutons aux valeurs $y = g(x)$ les valeurs $y = g_1(x)$ pour lesquelles l'équation $S = 0$ en y' a (quel que soit x) une racine infinie ou deux racines egales $y' = h_1(x)$. La forme (3) est sûrement valable, du moment que $\bar{x}$ diffère des points ξ, et $\bar{y}$ des valeurs $H(\bar{x})$, $g(\bar{x})$.

Soit maintenant $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ des valeurs quelconques de x, y (assujetties aux seules restrictions que nous venons de dire), et y'_0 la valeur $K(y_0, x_0)$. Pour étudier l'intégrale $y(x)$ de (1) qui correspond aux conditions initiales $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0$, je pose : $y' = K(y,x) + z^\nu$, et je substitue à (1) le système

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = K(y,x) + z^\nu, \qquad \nu z^{\nu-1} \frac{dz}{dx} = -\left[\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} K + \frac{\partial K}{\partial y} z^\nu\right] + y''$$

où y'' est remplacé par le développement (3). Deux cas sont possibles, suivant que l'expression $-\left(\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} K\right) + y''$ renferme ou non $z^{\nu-1}$ en facteur : dans le premier cas (qui ne peut se présenter si $y''(\bar{y}'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ est infini), la solution $y(x), z(x)$ de (4), qui correspond aux conditions initiales $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0 = 0$, est holomorphe pour $x = \bar{x}_0$. Dans le second cas, on a :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b(y,x) + z\, b_1(y,x) + \dots\dots}{z^i \left[\beta(y,x) + z \beta_1(y,x) + \dots\right]} \qquad (i > 0),$$

et en prenant z comme variable indépendante on voit que la solution étudiée $y(x), z(x)$ est algébroïde pour $x = \bar{x}_0$, du moment que $b(\bar{y}_0, \bar{x}_0)$ n'est pas nul.[1] [On ajoute aux points ξ les valeurs de x qui annulent $b(y, x)$ quel que soit y, et aux valeurs $y = g(x)$ les valeurs $y = g_1(x)$ qui annulent b pour x quelconque]. Il suit de là que l'intégrale $y = \varphi(x, y'_0, y_0, x_0)$ de (3) est algébroïde pour $x = \bar{x}_0$, $y'_0 = \bar{y}'_0$, $y_0 = \bar{y}_0$, $x_0 = \bar{x}_0$.

Examinons maintenant les valeurs $y = H(x)$ qui sont critiques pour une branche au moins de y'', (quel que soit y'). La branche considérée de y'' se laisse développer suivant les puissances croissantes de $(y-H)^{\frac{1}{\nu}} = z$, et on peut remplacer (1) par le système :

$$(1)' \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{y' - H'(x)}{\nu z^{\nu-1}}, \quad \frac{dy'}{dx} = a(y', x)\, z^\lambda + b_1(y', x) z^{\lambda-1} + \dots\dots$$

λ étant un certain entier positif, nul ou négatif. Si λ est supérieur à $-\nu$,

---

[1] Les coëfficients $\beta, \beta_1, \dots\dots$ ne peuvent être tous nuls pour x_0, y_0 que si y'' est infini quel que soit z, donc quel que soit y', pour x_0, y_0 ; x_0 est donc un point ξ, ou y_0 un point $G(x_0)$.

on voit aussitôt, en prenant z comme variable, que (1)' admet une solution $z(x)$, $y'(x)$ répondant aux conditions initiales x_0, $z_0 = 0$, y'_0, solution qui est algébroïde pour $x = x_0$, (du moment que x_0, y'_0 ne sont pas exceptionnels). Au contraire, si λ est égal ou inférieur à $-\nu$, il n'y a pas de solution $z(x)$, $y'(x)$ telle, que, x tendant vers x_0, z tende vers zéro, y' vers y'_0. La valeur $y = H(x)$ est alors un pôle du premier ordre au moins de y'', et fait partie des valeurs $y = G(x)$. On voit qu'il nous suffit de garder comme valeurs exceptionnelles les valeurs $y = G(x)$ qui sont pôles du premier ordre au moins de y'' (pour y' quelconque). Les valeurs exceptionnelles de x_0, y'_0 pour lesquelles la discussion qui précède est en défaut, donnent lieu à de nouveaux points ξ et à de nouveaux couples $y' = h(x)$, $y = H(x) \equiv g(x)$.

Pour étudier les grandes valeurs de y' on remarque qu'une branche quelconque de y'' pourra se mettre dans le domaine de $y' = \infty$ sous la forme :

$$(5) \qquad y'' = a_\mu(y,x)\, y'^{\frac{\mu}{\nu}} + a_{\mu-1}(y,x)\, y'^{\frac{\mu-1}{\nu}} + \cdots\cdots$$

ν étant un entier positif, μ un entier positif, négatif, ou nul. Si on pose : $y' = \frac{1}{z^\nu}$, on voit, comme à la page 404, que, dans le cas $\mu \leqq 2\nu$, il n'existe pas de solution $y(x)$ de (5) répondant aux conditions initiales x_0, y_0, $y'_0 = \infty$, et que dans le cas $\mu > 2\nu$, il existe une telle solution (qui est algébroïde pour $x = x_0$)[1].

Enfin, pour étudier les grandes valeurs de y, on a recours à la transformation $y = \frac{1}{z}$. Cette étude ne donne lieu à des difficultés que si, pour l'équation en z, $z = 0$ est un pôle du premier ordre au moins, pour une branche de z'' (quels que soient z', x), ou si $z = 0$, $z' = 0$ coïncident avec un des couples $z = g(x)$, $z' = h(x)$.

---

[1] Du moment que x_0, y_0 sont quelconques, Il n'y a d'exception que pour des valeurs fixes de x_0 qu'on ajoute aux ξ et des valeurs $y_0 = g_1(x_0)$ qu'on ajoute aux valeurs $y = g(x)$.

En effectuant dans (1) sur y une transformation homographique, on peut toujours faire en sorte qu'aucune des deux conditions précédentes ne soit réalisée : nous dirons qu'alors $y = \infty$ est un point ordinaire pour l'équation (1).

Quand on a effectué sur y une transformation homographique dont les coëfficients sont des fonctions quelconques de x, quatre cas sont à distinguer, comme pour les équations où $m = 1$.

— 1er Cas. — Aucune branche de la fonction $y''(\bar{y}', y, \bar{x})$ n'admet de pôles, du premier ordre au moins, $y = G(\bar{x})$, qui soient indépendants de y', et aucune branche de la fonction $y''(y', \bar{y}, \bar{x})$ n'est infinie comme y'^2 pour $y' = \infty$.

2e Cas. — Il existe des pôles $y = G(x)$, mais aucune branche de la fonction $y''(y')$ n'est infinie comme y'^2 pour $y' = \infty$.

3e Cas. — Il n'existe pas de pôles $y = G(x)$, mais une branche au moins de la fonction $y''(y')$ est infinie comme y'^2 pour $y' = \infty$.

4e Cas. — Il existe au moins un pole $y = G(x)$, et une branche au moins de la fonction $y''(y')$ devient infinie comme y'^2 pour $y' = \infty$.

Le théorème énoncé page 413 sur les singularités essentielles de $y(x)$, $y'(x)$ peut dès lors se répéter mot pour mot, ainsi que sa démonstration. Il en va de même pour le théorème énoncé page 415 sur les singularités de la fonction $\varphi(x, y_0', y_0, x_0)$ dans le champ des y_0', y_0.

— Systèmes différentiels quelconques du second ordre. —

Au lieu d'une équation du second ordre, considérons un système de deux équations du premier ordre :

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X},$$

où X, Y, Z sont des polynômes en y, z, dont les coëfficients dépendent analytiquement de x.

Il nous est loisible d'effectuer sur y, z une transformation homographique quelconque (à deux variables) dont les coefficients dépendent de x, et en remplaçant y par $\frac{y}{t}$, z par $\frac{z}{t}$, de donner au système (1) la forme :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} t\,\dfrac{dy}{dx} - y\,\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{tA - yC}{X}, \\ y\,\dfrac{dz}{dx} - z\,\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{yB - zA}{X}, \\ z\,\dfrac{dt}{dx} - t\,\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{zC - tB}{X}, \end{cases}$$

où $X(y, z, t, x)$, A, B, C sont des polynomes homogènes en y, z, t, le premier de degré q, les autres de degré $q+1$. Si on fait $t \equiv 1$ dans (B), il vient :

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{A - yC}{X} \equiv \frac{Y}{X}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{B - zC}{X} \equiv \frac{Z}{X}.$$

La transformation linéaire la plus générale :

$$y = ay_1 + bz_1 + ct_1, \quad z = a_1 y_1 + b_1 z_1 + c_1 t_1, \quad t = a_2 y_2 + b_2 z_2 + c_2 t_2$$

conserve au système (α) sa forme. On peut toujours (moyennant une telle transformation) admettre que X ne renferme pas t en facteur. De plus, si les équations (homogènes en y, z, t) $X = 0$, $tA - yC = 0$, $yB - zC = 0$, $zC - tB = 0$, sont compatibles, quel que soit x, pour des valeurs de y, z, t qui ne sont pas toutes nulles, on peut admettre aussi que pour aucune de leurs solutions : $\frac{y}{g(x)} = \frac{z}{h(x)} = \frac{t}{k(x)}$, $k(x)$ n'est identiquement nul.

Ces remarques faites, faisons $t \equiv 1$ dans (α), et considérons la solution $y(x), z(x)$ de (1) qui correspond aux conditions initiales $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$. Si $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ n'annulent pas X, la solution $y(x), z(x)$ est holomorphe[1] pour $x = \bar{x}_0$,

[1] Je suppose ici, comme dans toute la discussion qui suit, que $\bar{x}_0$ est un point quelconque du plan des x, et ne coïncide pas, par suite, avec certains points exceptionnels ξ qu'on n'a aucune peine à énumérer.

et les fonctions $y=\varphi(x, y_0, z_0, x_0)$, $z=\psi(x, y_0, z_0, x_0)$, qui définissent l'intégrale générale de (1) sont holomorphes pour $x=\bar{x}_0$, $y_0=\bar{y}_0$, $z_0=\bar{z}_0$, $x_0=\bar{x}_0$. Si $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ annulent X mais n'annulent pas à la fois Y et Z [soit $Y(\bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{x}_0)\neq 0$], on prend y comme variable indépendante et on étudie le système :

$$(1)' \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{X}{Y}, \qquad \frac{dz}{dy}=\frac{Z}{Y};$$

ce système admet une solution unique $x(y), z(y)$ répondant aux conditions y_0, x_0, z_0, solution qui est holomorphe et donne pour $y(x), z(x)$ deux fonctions algébroïdes pour $x=x_0$. Il n'y a d'exception que si la solution $x(y), z(y)$ de (1)' se réduit à $x\equiv x_0$, $z=\chi(y)$; autrement dit, si une des branches (égales à $\bar{z}_0$ pour $y=\bar{y}_0$) de la fonction $z=G(y, \bar{x}_0)$ définie par $X(y, z, \bar{x}_0)=0$, vérifie aussi la relation :

$$Y(y, z, \bar{x}_0)\frac{\partial X}{\partial y}(y, z, \bar{x}_0)+Z(y, z, \bar{x}_0)\frac{\partial X}{\partial z}(y, z, \bar{x}_0)=0.$$

Deux cas sont ici à distinguer : ou bien la condition précédente n'est remplie que pour des valeurs exceptionnelles de $\bar{x}_0$ (qu'on ajoute aux points ξ); ou bien elle est remplie, quel que soit x, c'est-à-dire que X, — ou un polynôme en y, z, soit $X_1(y, z, x)$, diviseur de X — est une intégrale première particularisée[1] du système :

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$$

Cette discussion entraîne plusieurs conséquences : 1° une solution $y(x), z(x)$ qui, quand x tend vers x_0 sur un chemin L, tend vers les valeurs finies y_0, z_0, est algébroïde pour $x=x_0$, du moment que X, Y, Z ne sont pas nuls tous trois pour $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, et que x_0 n'est pas un point exceptionnel ξ.

2° - Si, quand x tend vers x_0, $y(x)$ et $z(x)$ ne tendent pas vers des valeurs finies y_0, z_0, le module minimum $\eta(x)$ des trois quantités $X_1(y, z, x), \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ tend vers zéro avec $|x-x_0|$. — Ce théorème s'établit exactement comme à la page 407.

Étudions maintenant les valeurs infinies de y, z. Admettons

---

(1) L'expression : $X\frac{\partial X_1}{\partial x}+Y\frac{\partial X_1}{\partial y}+Z\frac{\partial X_1}{\partial z}$ (ou, par suite, si l'on veut, $Y\frac{\partial X_1}{\partial y}+Z\frac{\partial X_1}{\partial z}$) renferme X_1 en facteur.

que, x tendant vers x_0, $y(x)$ tende vers l'infini, et montrons que $y(x)$ et $z(x)$ sont algébroïdes pour $x = x_0$. Posons $y = \frac{1}{t}$, $z = \frac{z_1}{t}$, ce qui revient à faire $y \equiv 1$, $z = z_1$ dans (α) : quand x tend vers x_0, t tend vers zéro ; qu'advient-il de $z_1(x)$? A priori, trois hypothèses sont possibles : ou bien z_1 tend vers une limite finie z_1^0, et $y(x)$, $z_1(x)$ sont alors algébroïdes pour $x = x_0$ [puisque, x_0 étant quelconque, les coëfficients différentiels de (α) ne sont pas de la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = x_0$, $y = 1$, $t = 0$, $z = z_1^0$] ; ou bien, $z_1(x)$ tend vers l'infini et en permutant y et z, on voit que $y(x)$, $z(x)$ sont algébroïdes pour $x = x_0$; ou bien enfin $z_1(x)$ ne tend vers aucune limite ; mais cette hypothèse est à rejeter parce qu'elle exigerait d'après le théorème 2° du paragraphe précédent que t fût en facteur dans x, ce qui n'est pas.

Admettons seulement que, x tendant vers $\bar{x}_0$, le module maximum $M(x)$ des deux quantités $y(x)$, $z(x)$ tende vers l'infini, et montrons que $y(x)$, $z(x)$ sont encore algébroïdes pour $x = x_0$.

Pour cela, nous nous appuierons sur un lemme : soit $X_1(y, z, t, x)$ l'intégrale particularisée contenue dans X, [X_1 peut se réduire identiquement à l'unité] ; faisons $y \equiv 1$ dans (α) et soit $(\alpha)'$ le système obtenu ; marquons dans le plan des z les points $z = b$ racines de l'équation $X_1(1, z, 0, \bar{x}_0) = 0$, et de ces points comme centres décrivons de petits cercles γ, en même temps que de l'origine comme centre, un cercle Γ de rayon plus grand que 1 : représentons par A l'aire du plan des z intérieure à Γ et extérieure aux γ. Le lemme en question s'énonce ainsi :

« L'intégrale générale $z = \Psi(x, z_0, t_0, x_0)$, $y = X(x, z_0, t_0, x_0)$ « de $(\alpha)'$ est algébroïde pour $|x - x_0| < \lambda$, λ étant une quantité fixe, quand « x_0, t_0 varient dans le voisinage de $\bar{x}_0$, $\bar{t}_0 = 0$, et z_0 dans l'aire A. » — La démonstration est la même qu'à la page 400, et le lemme s'applique évidemment au système (α) où on fait $z \equiv 1$.

D'après cela, écrivons l'équation (homogène en y, z) $X_1(y, z, 0; \bar{x}_0) = 0$, qu'on peut supposer de même degré en y et en z, et soit k_i un des rapports $\frac{z}{y}$ qu'elle définit : si, x tendant vers $\bar{x}_0$,

$\frac{z}{y}$ tend vers k_i, le système (α) où on fait $y \equiv 1$ admet une solution $t(x), z(x)$ telle que t tende vers zéro et z vers k_i quand x tend vers x_0, ce qui est impossible ; si $\frac{z}{y}$ ne tend pas vers un des k_i, pour des valeurs $\bar{x}$ de x (aussi voisines qu'on veut de x_0) $\frac{1}{y}$ est très petit et $\frac{z}{y}$ est extérieur aux cercles γ ; il suit de là que, si $\left|\frac{z(\bar{x})}{y(\bar{x})}\right|$ ne dépasse pas 1, y et z sont algébroïdes pour $x = x_0$; en permutant y et z, on voit qu'il en est encore de même si $\left|\frac{z(\bar{x})}{y(\bar{x})}\right|$ dépasse l'unité.

Cette discussion entraîne les conséquences suivantes : Considérons un système (1) dans lequel on a fait subir aux fonctions y, z une transformation homographique quelconque :

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{A - yC}{X} \equiv \frac{Y}{X} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{zC - B}{X} \equiv \frac{Z}{X}$$

où X, A, B, C sont des polynômes en y, z, le premier de degré q, les trois autres de degré $q+1$, qui dépendent de x.

Théorème. — Si les polynômes X, A, B, C sont quelconques, l'intégrale générale $y(x) = \varphi(x, y_0, z_0, x_0)$, $z(x) = \psi(x, y_0, z_0, x_0)$ de (1) n'admet pas de singularités transcendantes mobiles. Les fonctions φ et ψ de y_0, z_0 ne présentent, dans chacun des plans y_0 et z_0 que des singularités algébriques.

2°. Pour que l'intégrale générale $y(x), z(x)$ de (1) présente des singularités transcendantes mobiles, il faut que les trois courbes en y, z

$$X(y, z, x) = 0, \quad A(y, z, x) - y\,C(y, z, x) = 0, \quad z\,C(y, z, x) - B(y, z, x) = 0$$

se coupent, pour x quelconque, en des points $y_0(x)$, $z_0(x)$ à distance finie.

3°. — Pour que l'intégrale générale $y(x), z(x)$ de (1) présente des singularités essentielles mobiles, il faut que le polynôme X en y, z, ou un de ses diviseurs $X_1(y, z, x)$, soit une intégrale première particularisée du système :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

Cette dernière condition est loin d'être suffisante.

et il est facile de la compléter par d'autres conditions nécessaires. Mais le problème qui consiste à former les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale de (1) ait des singularités essentielles mobiles est un problème de la plus profonde difficulté, qui est intimement lié à l'étude des intégrales dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0 qui annulent X, Y, Z.

Observons à ce propos que quand la condition 3° est remplie, la condition 2° l'est à fortiori. Car on a :

$$X \frac{\partial X_1}{\partial y} + Z \frac{\partial X_1}{\partial z} \equiv X_1 P,$$

$P(x, y, z)$ étant un certain polynôme en y, z. Soit $y = g(x)$, $z = h(x)$, ou M un point d'intersection des courbes algébriques $X_1 = 0, Y = 0$: si ce point n'est pas aussi point d'intersection de $X_1 = 0$, $\frac{\partial X_1}{\partial z} = 0$, ou plus généralement (i et j désignant le nombre d'intersections confondues en ce point des deux courbes $X_1 = 0, Y = 0$ d'une part, $X_1 = 0$, $\frac{\partial X_1}{\partial z} = 0$ d'autre part) si i est plus grand que j, Z est nécessairement nul en ce point. Comme le degré de Y est supérieur au degré de X_1, le nombre des intersections de $Y = 0$, $X_1 = 0$ (intersections qu'on peut supposer toutes à distance finie) est supérieur au nombre d'intersections de $X_1 = 0$, $\frac{\partial X_1}{\partial z} = 0$; pour un au moins des points M, i est supérieur à j, ($j \geq 0$) et la courbe $Z = 0$ passe par M. C.Q.F.D.

Quand l'intégrale $y(x)$, $z(x)$ de (1) présente effectivement des singularités essentielles mobiles, une importante condition est toujours remplie dans le voisinage d'une telle singularité. Représentons y par $\frac{y_1}{t}$, z par $\frac{z_1}{t}$, t étant la quantité réelle $\frac{1}{1+|y|+|z|}$, et soit $X_1(y_1, z_1, t, x)$ le polynôme X_1 rendu homogène. Si $x = a$ est une singularité essentielle de la solution $y(x)$, $z(x)$ de (1), singularité variable avec la solution considérée, quand x tend vers a l'expression $X_1[y_1(x), z_1(x), t(x), x]$ tend vers zéro.

Lorsque l'intégrale générale $y = \varphi(x, y_0, z_0, x_0)$ $z = \psi(x, y_0, z_0, x_0)$ de (1) présente des singularités transcendantes mobiles, les fonctions φ et ψ de y_0, z_0 présentent, dans le plan de

chacune de ces variables, des singularités transcendantes variables avec x. Mais elles ne peuvent présenter de singularités transcendantes y_0, z_0 indépendantes de x que si la condition 3° est remplie, et ces singularités doivent alors vérifier la relation $X_1(y_0, z_0, x_0) = 0$.

En particulier, si l'intégrale générale $y(x), z(x)$ n'a comme singularités mobiles que des singularités algébriques, les fonctions $y = \varphi(x, y_0, z_0, x_0)$, $z = \psi(x, y_0, z_0, x_0)$ ne peuvent présenter, dans le champ de chaque variable y_0, z_0, que des singularités algébriques, à moins que la condition 3° ne soit remplie : dans ce dernier cas, les valeurs y_0, z_0 qui vérifient $X_1(x, y_0, z_0, x_0) = 0$ peuvent être (mais ne sont pas nécessairement) des singularités transcendantes de φ, ψ.

Systèmes (1) algébriques en y, z. — La théorie précédente s'étend sans aucune difficulté aux systèmes (1) dont les coëfficients différentiels sont, non plus rationels, mais algébriques en y, z. Il est loisible d'écrire un tel système ainsi :

(1) $$\frac{dy}{dx} = R(x, y, z, u), \quad \frac{dz}{dx} = R_1(x, y, z, u), \text{ avec } S(x, y, z, u) = 0,$$

R et R_1 étant rationnels en y, z, u, et u s'exprimant rationnellement en $y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$. Nous pouvons admettre enfin qu'on a effectué sur y, z, u la transformation homographique la plus générale (à trois variables) et donner au système (1) la forme :

$$(\beta) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y, z, u)}{X(x, y, z, u)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z(x, y, z, u)}{X(x, y, z, u)}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{U(x, y, z, u)}{X(x, y, z, u)}, \quad S(x, y, z, u) = 0$$

avec la condition : $\frac{dS}{dx} X + \frac{dS}{dy} Y + \frac{dS}{dz} Z + \frac{dS}{du} U \equiv 0$

La discussion développée plus haut peut se répéter sans modification pour toute solution $y(x), z(x), u(x)$ de (β) répondant aux conditions initiales x_0, y_0, z_0, u_0 à moins que x_0, y_0, z_0, u_0 n'annulent à la fois $\frac{\partial S}{dy}, \frac{\partial S}{dz}, \frac{\partial S}{du}$. D'où ces conséquences :

L'intégrale $y(x), z(x)$ d'un système (β) ne présente pas en général de singularités transcendantes mobiles. Pour que de telles singularités puissent exister, il faut que la surface $S=0$ possède, quel que soit x, des points multiples $(y, z, u,)$ ou des points qui annulent à la fois $X=0, Y=0, Z=0, U=0$. — Pour qu'il puisse exister des singularités essentielles mobiles il faut, soit que l'égalité $X(x, y, t, u)=0$ définisse une intégrale première particularisée du système (β) (ou se décompose en égalités dont une au moins, $X_1=0$, réponde à la condition); soit que la surface $S=0$ possède (quelque soit x) des courbes de rebroussement.

Soit $z=G(x,y)$ une courbe de rebroussement de S. En remplaçant z par $z-G$, on peut supposer G identiquement nul : les coëfficients différentiels se développent alors suivant les puissances croissantes de $\zeta = z^{\frac{1}{\nu}}$ (ν étant un certain entier) et le système (β) peut s'écrire :

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a(y,x)\zeta^{\lambda} + b(y,x)\zeta^{\lambda+1} + \dots \\[2ex] \nu\zeta^{\nu-1}\dfrac{d\zeta}{dx} = a_1(y,x)\zeta^{\mu} + b_1(y,x)\zeta^{\mu+1} + \dots \end{cases}$$

(λ, μ étant des entiers positifs, négatifs, ou nuls). Si λ est positif ou nul, ou si λ est négatif, mais n'est pas moindre que $\mu+1-\nu$, l'intégrale $y(x), \zeta(x)$ de (γ) qui correspond aux conditions initiales $x_0, y_0, \zeta_0=0$, est algébroïde pour $x=x_0$: la chose est évidente si λ et $\mu+1-\nu$ sont positifs ou nuls ; elle le devient en prenant z comme variable indépendante, si $\mu+1-\nu$ est négatif $[\lambda \geqslant \mu+1-\nu]$. Au contraire si λ est négatif et moindre que $\mu+1-\nu$, on voit, en prenant y comme variable indépendante, que (γ) n'admet aucune solution $y(x), \zeta(x)$ telle que y tende vers y_0, ζ vers 0 quand x tend vers x_0 (x_0 et y_0 étant quelconques)

De là résulte (à l'aide des raisonnements déja employés) ce théorème :

Théorème. — Considérons un système (1) quelconque :

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = M(y,z,x) \qquad \frac{dz}{dx} = N(y,z,x).$$

où M, N, sont algébriques en y, z, et dans lequel on a effectué sur y, z

une transformation homographique quelconque.

Soit $z = G(y, x)$ un quelconque des systèmes de valeurs x, y, z qui rendent infinie une branche au moins d'un des coëfficients différentiels M, N, et soit

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0(y,x) + (z-G)^{\frac{1}{\nu}} a_1(y,x) + \dots}{(z-G)^{\frac{\lambda}{\nu}}} \equiv \frac{Y_1}{(z-G)^{\frac{\lambda}{\nu}}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{b_0(y,x) + (z-G)^{\frac{1}{\nu}} b_1(y,x) + \dots}{(z-G)^{\frac{\lambda}{\nu}}} \equiv \frac{Z_1}{(z-G)^{\frac{\lambda}{\nu}}}$$

$$(\lambda > 0 \quad a_0 \text{ ou } b_0 \neq 0)$$

la forme de cette branche des fonctions M, N, dans le voisinage de $z = G$.

Pour qu'il puisse exister des singularités essentielles mobiles, il faut que, pour une au moins des fonctions $z = G$, l'expression

$$(z-G)^{\frac{\lambda}{\nu}} \frac{\partial G}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial G}{\partial y} - Z_1$$

renferme $(z - G)$ en facteur à une puissance au moins égale à 1. Cette condition exige que $z - G = 0$ soit une intégrale première particularisée du système :

$$(1) \quad \frac{dx}{(z-G)^{\frac{\lambda}{\nu}}} = \frac{dy}{Y_1} = \frac{dz}{Z_1}$$

Cette condition est nécessaire également pour que les fonctions $y = \varphi(x, y_0, z_0, x_0)$, $z = \psi(x, y_0, z_0, x_0)$ (qui définissent l'intégrale générale de (1)) présentent (dans le plan d'une des variables y_0, z_0 des singularités transcendantes indépendantes de x. En particulier, si l'intégrale générale $y(x)$, $z(x)$ de (1) ne présente comme singularités mobiles que des points algébriques, les fonctions φ, ψ ne peuvent présenter dans le plan de chaque variable y_0, z_0 que des singularités algébriques, à moins que la condition énoncée ne soit remplie : les singularités transcendantes x, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ de $\varphi(\bar{x}, y_0, z_0, \bar{x}_0)$, $\psi(\bar{x}, y_0, z_0, \bar{x}_0)$ vérifient alors une des relations $z_0 = G(y_0, \bar{x}_0)$.

Une conséquence immédiate des théorèmes précédents est relative aux systèmes (1) algébriques en y, z, x : on voit de suite que si on effectue sur x, y, z, un changement algébrique quelconque (soit homographique), les nouvelles fonctions y_1, z_1 de la nouvelle variable x_1 ne présentent plus de singularités essentielles. On n'a donc plus à

discuter que les singularités transcendantes x_1°, pour lesquelles $y_1(x), z_1(x)$ ont des valeurs déterminées

Remarques. — Si on prend en particulier un système (1) de la forme $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{dz}{dx} = N(z, y, x)$
où N est algébrique en y, z, on retrouve les résultats démontrés directement sur les équations uniques du second ordre.

Tout ce qui précède s'applique aussi bien à un système différentiel quelconque, portant sur plusieurs fonctions de plusieurs variables, et algébrique par rapport aux fonctions et à leurs dérivées ; du moment que l'intégrale générale de ce système ne dépend que de deux constantes. Comme exemple d'un tel système, citons le système étudié dans des leçons antérieures :

$$du = P\,dy + Q\,dz$$
$$dv = P_1\,dy + Q_1\,dz$$

où les deux seconds membres sont des différentielles algébriques totales, y et z les fonctions, u, v, les variables indépendantes.

Systèmes différentiels d'ordre quelconque.

La discussion développée plus haut pour les systèmes du second ordre s'étend aux systèmes d'ordre quelconque. Soit par exemple $y_1, \dots y_m$, m fonctions de x qui vérifient le système :

(1) $$\frac{dy_i}{dx} = \frac{A_i - y_i A_0}{X} \equiv \frac{Y_i}{X}, \quad (i = 1, 2, \dots\dots m),$$

où X, $A_m, A_{m-1} \dots\dots A_0$ sont des polynomes en $y_1, y_2 \dots y_m$ (qui dépendent de x), le premier de degré q, les autres de degré $q+1$. On peut toujours, en effectuant sur les y une transformation homographique quelconque, donner cette forme à un système où les $\frac{dy_i}{dx}$ sont rationnels en $y_1, \dots y_m$.

Si les polynomes X, A_i sont quelconques, l'intégrale générale $y_i(x) = \varphi_i(x, y_1^\circ, \dots y_m^\circ, x^\circ)$, $(i = 1, 2 \dots m)$, de (1) ne peut présenter de singularités transcendantes mobiles, et les fonctions φ_i de $y_1^\circ \dots y_m^\circ$ n'admettent dans tout le champ de chaque variable y_i° que des singularités algébriques.

Pour que les $y_i(x)$ puissent présenter des singularités essentielles mobiles il faut que le système

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{Y_1} = \dots\dots = \frac{dy_m}{Y_m}$$

et l'égalité :

$$(2) \qquad X_1(y_1, \dots\dots x) = 0$$

soient compatibles et définissent entre les $y_1, \dots y_m, x$, m relations dépendant au moins d'une constante arbitraire.

Quand les singularités transcendantes ou essentielles de l'intégrale générale $y_i(x)$ sont fixes, les fonctions $\varphi_i(x, y_1^0 \dots y_m^0, x_0)$ ne présentent dans le plan de chaque variable y_i^0 que des singularités algébriques, à moins que le polynome X, ou un de ses diviseurs X_1, ne soit une intégrale première particularisée de (1). Dans ce cas, les valeurs $y_1^0, \dots y_m^0$, qui vérifient la relation $X_1(y_1^0, \dots y_m^0, x_0)$ peuvent être des singularités transcendantes des φ_i (quelque soit x).

Des propositions analogues s'appliquent à tout système (1) où les coëfficients différentiels sont non plus rationels, mais algébriques en $y_1 \dots y_m$. Elles s'étendent plus généralement à tout système différentiel algébrique par rapport aux fonctions inconnues $y_i(x_1 \dots x_p)$, $[i = 1, 2 \dots\dots m]$ et à leurs dérivées, du moment que l'intégrale générale de ce système ne dépend que d'un nombre fini de constantes

Equations différentielles dont une classe d'intégrales particulières présente des points essentiels mobiles, alors que l'intégrale générale en est dépourvue.

Je terminerai ces généralités en insistant sur un fait assez inattendu qui peut se produire dès que l'ordre différentiel du système dépasse 2 : il arrive que seule une classe particulière d'intégrales présente des singularités essentielles alors que l'intégrale générale en est dépourvue.

Considérons par exemple le système :

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{z^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y\, z^2 + u y^3 - z y^2}{z^2}, \quad \frac{du}{dx} = 0.$$

La dernière équation donne u = constante ; il reste à étudier les deux premières équations (1) où on fait $u = c$. Ces équations peuvent s'écrire en remplaçant y par $\frac{y}{t}$, z, par $\frac{z}{t}$:

$$(\alpha) \begin{cases} t \dfrac{dy}{dx} - y \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{t y^3}{z^2} \\ y \dfrac{dz}{dx} - z \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 [z^2 + c y^2]}{z^2} \\ z \dfrac{dt}{dx} - t \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{t y\, [z y - z^2 - c y^2]}{z^2} \end{cases}$$

c'est la forme générale de la page 422, où on fait :

$$A = 0, \quad B = y z^2 + c y^2, \quad C = t y^2.$$

Pour que l'intégrale générale du système (α) [où on fait $t \equiv 1$] ait des singularités essentielles mobiles, il faut que $z = 0$ soit une intégrale première particularisée du système :

$$\frac{dx}{z^2} = \frac{dy}{y^3} = \frac{dz}{y z^2 + c y^3 - z y^2},$$

autrement dit que $y z^2 + c y^3 - z y^2$ contienne z au facteur, ce qui n'a lieu que pour $c = 0$.

Pour $c = 0$, l'intégrale de (α) est :

$$y = b e^{\frac{1}{x-a}}, \qquad z = (x-a)\, e^{\frac{1}{x-a}},$$

a, b, désignant deux constantes arbitraires ; cette intégrale présente donc un point essentiel mobile $z = a$. — On voit ainsi que l'intégrale générale $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$, de (1) ne présente pas de singularités essentielles mobiles, mais qu'une classe d'intégrales particulières dépendant de deux constantes arbitraires est affectée d'une telle singularité.

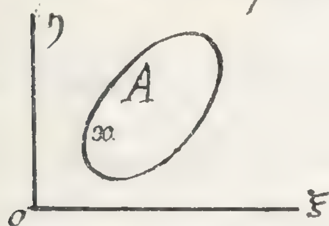
Les conditions nécessaires énoncées plus haut (voir pages 425 et 431) pour que l'intégrale générale d'un système présente des singularités essentielles mobiles, sont encore nécessaires pour qu'une classe seulement d'intégrales particulières présentent de telles singularités. En effet, quand ces conditions

ne sont pas remplies, aucune solution $y_1(x) \dots y_m(x)$ ne peut devenir indéterminée en un point $x = \alpha$ distinct de certains points fixes ξ.

Dix-neuvième Leçon.

Singularités des équations différentielles à points critiques fixes.

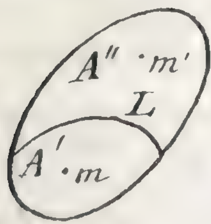
Digression sur les singularités des fonctions analytiques uniformes. - Pour appliquer les généralités développées dans la leçon précédente aux équations dont l'intégrale a ses points critiques fixes, nous aurons besoin de préciser certaines notions relatives aux ensembles de points, et aux singularités des fonctions uniformes.



Considérons, dans le plan de la variable complexe $x = \xi + i\eta$, une aire limitée quelconque A et soit E un ensemble donné de points x_i à l'intérieur de A.

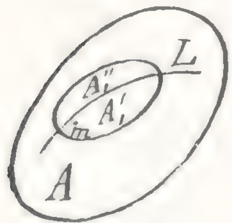
Représentons par $y(x)$ une expression analytique uniforme dans l'aire A et n'admettant pas dans A d'espace lacunaire, par E l'ensemble de tous les points singuliers (non polaires) x_i de cette expression contenus dans A. Appelons point limite de l'ensemble E tout point $x = X$ dans le voisinage duquel il existe une infinité de points x_i : j'entends par là que tout cercle de centre X, (si petit que soit son rayon) renferme des points x_i. Le point X est aussi un point singulier de $y(x)$: autrement dit, l'ensemble E renferme tous ses points limites X.

Je dirai que l'ensemble E décompose A en plusieurs domaines distincts, s'il existe dans A deux points m, m', tels qu'on ne puisse passer de m en m' à l'intérieur de A sans rencontrer de points de E.



Représentons alors par A' le continuum formé par tous les points de A qu'on peut atteindre en partant du point m sans

rencontrer de points E : l'aire A est ainsi décomposé en deux portions A', A'', séparées par des points de E, qui, par définition, forment une ligne L.



Plus généralement, je dirai que l'ensemble E comprend une ligne, ou est linéaire, s'il existe des aires A_1 intérieures à A, que l'ensemble E décompose en plusieurs domaines distincts. Si de telles aires A_1 n'existent pas, je dirai que E est un ensemble ponctuel. — Dans le premier cas, considérons la portion A' de A, qu'on obtient en partant du point m sans sortir de A, ni rencontrer aucun point de E : la fonction $y(x)$ ne présente dans A' qu'un ensemble ponctuel de points singuliers x_i, (points qui peuvent admettre comme points limites tous les points de la ligne L).

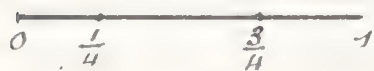
Ces définitions adoptées, supposons d'abord que la fonction $y(x)$ ne présente dans A qu'un ensemble ponctuel de singularités (soit x_0 un des points singuliers de $y(x)$), deux hypothèses sont possibles :

1ère Hypothèse : — Le point x_0 est isolé, ou il existe dans son voisinage une infinité de points x_i isolés. (Le point x_0 est dit isolé si un cercle de centre x_0 et de rayon suffisamment petit ne renferme aucun point singulier de $y(x)$ autre que x_0).

Si x_0 est isolé, c'est un point singulier essentiel au sens de Mr Wererstruss ; il suit de là que dans la première hypothèse $y(x)$ et toutes ses dérivées sont complètement indéterminées pour $x = x_0$.

2ème Hypothèse. — x_0 n'est pas isolé et un cercle de centre x_0 et de rayon suffisamment petit ne renferme aucun point x_i isolé.

Il semble, au premier abord, qu'une telle hypothèse soit inadmissible quand les points x_i ne forment pas de ligne. Aussi convient-il de la réaliser sur un exemple :



Prenons sur Ox l'intervalle 0 ...... 1, marquons les points $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ entre lesquels nous n'introduirons aucun point de division : répétons sur chacun des segments 0 ..... $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ ..... 1 la construction faite sur le segment 0 .... 1, (c'est-à-dire marquons

les points $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$ et $\frac{13}{16}$, $\frac{15}{16}$), et ainsi de suite. On voit immédiatement que chaque point x_i de l'ensemble E_0 ainsi obtenu est point limite d'une infinité de points de E_0 situés tous à droite (ou tous à gauche) de x_i : par exemple, le point $\frac{1}{4}$ est point limite d'une infinité de points x_i ($x_i < \frac{1}{4}$), mais entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ il n'existe pas de points x_i. Aucun point de l'ensemble E_0 n'est isolé : si on représente par E l'ensemble de tous les points limites de E_0 (c'est-à-dire l'ensemble dérivé de E_0 au sens de M. Cantor), E comprend tous les points de E_0 et en comprend d'autres. Cet ensemble E est parfait, c'est-à-dire coïncide avec son dérivé : aucun de ses points n'est isolé et néanmoins cet ensemble ne remplit nulle part un segment de 0ξ. Je renvoie pour la démonstration de ces propriétés de E au mémoire de M. Bendixson qui a formé le premier exemple d'un ensemble parfait purement ponctuel [1].

Il est facile de construire, à l'aide de séries, des fonctions analytiques uniformes $y(x)$ qui admettent comme points singuliers tous les points E_0, par suite tous les points E, et aucun autre. Mais on peut se demander si de telles fonctions se présentent naturellement : la réponse est fournie par la classe des fonctions fuchsiennes que M. Poincaré appelle de la troisième famille [2]. Ces fonctions $y(x)$ existent et sont uniformes dans tout le plan ; et elles admettent un ensemble parfait (non linéaire) de points singuliers. Deux de ces fonctions correspondant au même groupe sont liées par une relation algébrique dont le genre peut être quelconque. Elles se laissent définir enfin comme l'intégrale générale d'une équation :

$$\frac{y'''}{y'^3} - \frac{3}{2}\,\frac{y''^2}{y'^4} = G(y)$$

où G est algébrique en y.

---

(1) Acta mathematica, Tome II, 1883, pages 417-420. Cet ensemble parfait F est mal enchaîné au sens de M. Cantor.

(2) (Acta mathematica, Tome II, pages 404-407). Je me borne ici aux indications strictement nécessaires sur la Théorie des ensembles : elles suffisent toutefois à montrer l'utilité de cette théorie dans l'étude des fonctions analytiques. Voir à ce sujet le mémoire de M. Mittag-Leffler sur la représentation des fonctions uniformes (Acta mathematica, 1884).

Il suit de là que quand nous étudierons les équations différentielles à points critiques fixes, quatre hypothèses seront à envisager :

1°. L'intégrale générale ne présente pas de singularités (non polaires) mobiles ;

2°. L'intégrale présente des points singuliers (non polaires) mobiles, tous isolés, ou dont certains sont isolés ;

3°. L'intégrale présente un ensemble parfait (non linéaire) de points singuliers (non polaires) mobiles ;

4°. L'intégrale présente des lignes singulières mobiles.

— Étude du cas où les points singuliers x_i de $y(x)$ forment un ensemble parfait non linéaire. —

Soit x_0 un point singulier non isolé de $y(x)$, dans le voisinage duquel n'existe aucun point singulier isolé — Si nous décrivons de x_0 comme centre un cercle C de rayon suffisamment petit, tous les points singuliers x_i contenus dans C seront points limites d'autres points x_i : l'ensemble E des points x_i dans C est parfait[1] et par hypothèse n'est pas linéaire. Si donc m et m' sont deux points intérieurs à C, qui ne font pas partie de E, on peut aller de m en m' sans sortir de C ni rencontrer aucune singularité (non polaire) de $y(x)$.

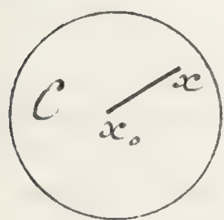
Quand $y(x)$, $y'(x)$ sont continus dans C, la fonction $y(x)$ est, comme on le sait, holomorphe dans C. Il faut donc que l'une au moins des fonctions $y(x)$, $y'(x)$ soit discontinue en certains des points de C. Je vais montrer que $y(x)$ est nécessairement indéterminée quand x tend vers certains des points x_i

Tout d'abord, si $y(x)$ peut s'approcher autant qu'on le veut de toute valeur y_0 pour des valeurs de x intérieures à C (et cela si petit qu'on ait pris le rayon r de C), $y(x)$ est complètement indéterminée

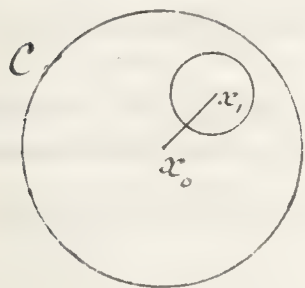
---

[1] En effet, d'une part tous les points limites de E font partie de E ; le dérivé E' de E est donc contenu dans E. D'autre part, tous les points de E sont des points limites et par suite font partie de E' ; E et E' coïncident donc ; E est parfait.

quand x tend vers x_0. Dans le cas contraire, la fonction $z(x) = \frac{1}{y - y_0}$ reste en module inférieure à un certain nombre α (dès que r a été choisi suffisamment petit). Si la fonction $z(x)$ est continue dans toute l'aire C, nous allons voir qu'elle est nécessairement holomorphe dans C.



En effet, partons du point x_0 et effectuons l'intégrale $Z(x) = \int_{x_0}^{x} z(x)\,dx$ le long du segment $\overline{x_0 x}$. La fonction $z(x)$ est une fonction uniforme et continue de x dans l'aire C, qui de plus, pour toute valeur x distincte des x_i, admet comme dérivée $y(x)$: c'est donc une fonction holomorphe de x, sauf peut-être aux points x_i; je dis qu'elle est holomorphe aussi aux points x_i; considérons, en effet un des points x_i, soit x_1, et un petit cercle c décrit de x_1 comme centre, et posons



$$Z_1(x) = Z(x_1) + \int_{x_1}^{x} z(x)\,dx,$$

l'intégrale étant prise le long du segment $\overline{x_1 x}$. Les deux fonctions $Z(x)$ et $Z_1(x)$ coïncident : en effet pour toute valeur de x distincte des x_i, la différence $\frac{dZ}{dx} - \frac{dZ_1}{dx} \equiv z - z$ est nulle, elle est donc identiquement nulle, et Z, Z_1 (qui coïncident pour $x = x_1$) coïncident identiquement. D'autre part l'égalité :

$$Z(x) - Z(x_1) = \int_{x_1}^{x} z(x)\,dx$$

montre que le rapport $\frac{Z(x) - Z(x_1)}{x - x_1}$ tend vers $z(x_1)$ quand x tend vers x_1. La fonction $Z(x)$ admet donc encore la dérivée $z(x)$ aux points x_i : elle est uniforme, continue et admet une dérivée continue dans l'aire C; elle est par suite holomorphe, ainsi que sa dérivée $z(x)$ dans cette aire. La fonction $y(x)$ est méromorphe dans C, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il faut donc que $z(x)$ soit discontinue au moins en un point x_i; comme son module reste inférieur à une limite, il faut que, x tendant vers un des points x_i, $z(x)$ et par suite $y(x)$, ne tende vers aucune limite.

La proposition précédente est vraie, si petit que soit le rayon r de C. Appelons donc <u>point essentiel</u> de $y(x)$ tout point x_0

tel que (x tendant vers x_0 sans rencontrer de points singuliers) $y(x)$ ne tende vers aucune limite finie, ni vers l'infini ; — on peut énoncer le théorème suivant.

Quand les points singuliers de $y(x)$ forment un ensemble parfait non linéaire, tout point singulier x_i de l'ensemble est soit un point essentiel, soit un point limite de points essentiels [1].

On peut dire encore que tout point singulier (non polaire) d'une fonction uniforme $y(x)$ qui n'est pas un point d'une ligne singulière est soit un point essentiel, soit un point limite de points essentiels.

Remarque. — La démonstration précédente établit évidemment une proposition plus générale et très importante :

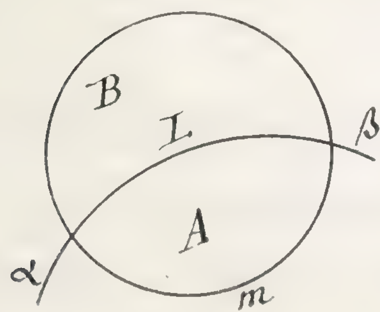
Soit $y(x)$ une expression analytique uniforme dans l'aire A, et holomorphe sauf peut-être en certains points formant un ensemble

---

[1] J'insiste sur ce fait que le raisonnement précédent ne démontre pas que tout point x_i est point essentiel. D'une façon précise, entourons un point x_i d'un petit cercle c_i et considérons tout le domaine D_i du plan des y que parcourt $y(x)$ quand x varie dans c_i ; quand le rayon de c_i tend vers zéro, D_i ne peut que diminuer : s'il tend vers un point, $y(x)$ est continue pour $x = x_i$ qui n'est pas un point essentiel ; s'il tend vers un domaine ou une ligne limite Δ_i, x_i est un point essentiel de $y(x)$, et Δ_i sera dit le domaine d'indétermination du point x_i. Pour un point essentiel x_i isolé (ou limite de points isolés) Δ_i comprend tout le plan. Quand x_i fait partie d'un ensemble parfait, on ne sait rien à priori sur le domaine Δ_i. Si pour x_0, Δ_0 se réduit à un point y_0, nous savons qu'il existe dans le voisinage de x_0 une infinité de points x_i pour lesquels Δ_i n'est pas réduit à un point ; mais quand ces points x_i tendent vers x_0, les Δ_i doivent tendre vers le point y_0.

En réalité, on peut montrer que cette dernière circonstance ne peut se présenter et que, pour tout point x_i, Δ_i comprend tout le plan. Je ne m'appuierai pas ici sur ce théorème dont la démonstration est minutieuse ; j'indique seulement le principe de cette démonstration. Supposons que Δ_i ne se réduise pas à un point et ne comprenne pas tout le plan : la fonction $x = X(y)$ inverse de $y(x)$, admet alors pour toute valeur de y intérieure à Δ une infinité de branches $X_1(y), X_2(y)$ .... voisines de x_i qui doivent tendre toutes vers une des valeurs numériques x_j quand y tend d'une façon quelconque vers un point de la limite L de Δ et par suite doivent prendre toutes la même valeur numérique x_i quand x tend vers la ligne L d'une façon quelconque. On voit que cette dernière conclusion est absurde en s'appuyant sur la propriété bien connue des fonctions harmoniques réelles $V(\xi, \eta)$ de ne présenter ni maximum ni minimum dans tout domaine où elles sont régulières. Le raisonnement est analogue à un raisonnement que nous emploierons plus loin [Voir la note de la page 451].

ponctuel ou linéaire. Si $y(x)$ est continue dans toute l'aire A, elle est holomorphe dans cette aire.



D'après cela, supposons qu'une expression analytique $y(x)$ soit holomorphe dans un domaine A et s'annule le long d'une portion L de la ligne limite de A; je dis que $y(x)$ est identiquement nulle dans A. En effet, considérons une aire B attenant à L du côté opposé à A; la fonction $Y(x)$ égale à zéro dans B et à $y(x)$ dans A, est holomorphe dans l'aire A + B, donc identiquement nulle.

Cette proposition est évidente quand la ligne L a une tangente continue et par suite une longueur finie car la formule de Cauchy:

$$y(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{y(z)\,dz}{z-x},$$

où s désigne un contour voisin du contour de A, donne

$$y(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha m \beta} \frac{y(z)\,dz}{z-x}$$

quand on fait tendre s vers le contour de A, et montre que $y(x)$ est holomorphe des deux côtés de L, donc identiquement nulle. — Mais quand nous appliquerons le théorème aux intégrales des équations différentielles, nous ne serons pas sûrs qu'une ligne-coupure d'une intégrale admette une tangente continue. Une classe de fonctions fuchsiennes déjà signalées (voir pages 14-16), fonctions qui intègrent une équation très simple du troisième ordre, offre l'exemple de coupures essentielles mobiles, qui admettent en chaque point une tangente, mais point de courbure. Il faut donc prévoir le cas où la tangente à la ligne-coupure ne serait pas continue et même le cas ou cette ligne[1] serait sans tangente.

Fonctions à n déterminations — Tout ce que nous venons de dire pour les fonctions uniformes, peut se répéter pour les fonctions

---

[1] Observons que la définition générale du mot ligne a été donnée au début de la leçon, (page 434).

à n déterminations : si l'expression $y(x)$ admet n valeurs dans A, il suffit d'appliquer les résultats obtenus aux n fonctions symétriques

$$(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n), \ldots\ldots\ldots (y_1 \cdot y_2 \ldots\ldots y_n),$$

qui sont uniformes dans A, pour obtenir toutes les propriétés de $y(x)$ analogues à celles qui ont été établies pour les fonctions uniformes.

Conclusions. — Je termine cette discussion en signalant les différences profondes qui existent entre les transcendantes uniformes suivant qu'elles possèdent ou non des singularités (non polaires) isolées.

Quand la transcendante uniforme $y(x)$ admet un point essentiel isolé, $y(x)$ peut prendre toutes les valeurs, sauf deux au plus, pour une infinité de valeurs de x.

Quand les transcendantes uniformes $y(x)$, $z(x)$ possèdent un point essentiel isolé et sont liées par une relation algébrique, le genre de cette relation est zéro ou l'unité.

Ce sont là deux propositions fondamentales démontrées par M. Picard. Aucune d'elles ne subsiste quand les singularités forment un ensemble parfait, que cet ensemble soit purement ponctuel ou comprenne des lignes. Il existe des transcendantes uniformes $y(x)$, dénuées de lignes singulières, (par exemple les fonctions fuchsiennes de la troisième famille), qui ne deviennent en aucun point du plan égales à $a_1, a_2 \ldots a_n$ [les a_i étant n quantités données à l'avance] et deux telles fonctions peuvent vérifier une relation algébrique de genre quelconque.

C'est une vérité courante qu'un abîme sépare les transcendantes uniformes affectées de coupures essentielles et celles qui en sont dénuées. Sans doute, de grandes différences subsistent entre les fonctions qui possèdent un ensemble parfait ponctuel de points singuliers, et celles qui possèdent des lignes singulières : c'est ainsi que les premières sont nécessairement indéterminées en une infinité de points, et (d'après la note de la page 438) peuvent s'approcher autant qu'on veut de

toute valeur donnée à l'avance : au contraire, une fonction à coupure peut être continue dans tout son domaine d'existence et jusque sur la limite de ce domaine, et rester inférieure en module à une quantité donnée. On peut dire néanmoins que la différence entre les transcendantes uniformes qui possèdent des points singuliers (non polaires) isolés et celles qui n'en possèdent pas est au moins aussi profonde que la différence entre les fonctions qui présentent un ensemble parfait ponctuel de points singuliers et les fonctions à lignes singulières.

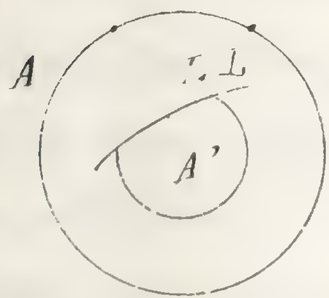
Application aux équations différentielles.

Considérons un système différentiel :

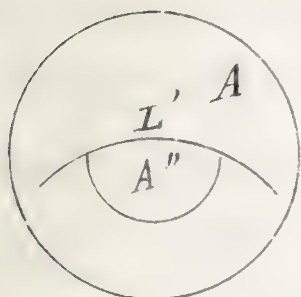
$$(1) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i\,(y_1, \ldots\ldots y_m, x) \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots m)$$

où les f_i sont algébriques en $y_1, \ldots\ldots y_m$. Supposons que dans une aire A du plan des x (qui ne renferme aucun des points singuliers fixes de (1)) une solution $y_1(x), \ldots\ldots y_m(x)$ de (1) soit uniforme. Si les fonctions $y_1 \ldots\ldots y_m$ ne sont pas toutes méromorphes dans A, je dis qu'une au moins des fonctions $y_i(x)$ devient indéterminée quand x tend vers certains points a de A.

Tout d'abord, si une des fonctions $y_i(x)$ présente dans A des points singuliers (non polaires) qui ne fassent pas partie d'une ligne singulière, la proposition est établie. Si maintenant tous les points singuliers des $y(x)$ appartiennent à des coupures; considérons une aire A' intérieure à A attenante à une de ces coupures L, et dans laquelle les $y_i(x)$ existent :



Quand le point x (intérieur à A') tend d'une façon quelconque vers un point a quelconque de L, par hypothèse tous les points singuliers (non polaires) des $y_i(x)$ qu'on rencontre, appartiennent à des coupures; il existe donc dans A' des aires A'' attenantes à une de ces coupures L' et dans lesquelles les $y_i(x)$ existent et sont méromorphes : Si quand le point x (intérieur à A'') tend d'une façon quelconque vers un point quelconque



$x = a$ de L', les $y_i(x)$ tendent respectivement vers des valeurs finies $y_i(a)$; la solution $y_1(x)$...... $y_m(x)$ est holomorphe pour $x = a$, à moins que les valeurs $y_1(a)$...... $y_m(a)$, a, ne satisfassent à une certaine condition $X(y_1, \ldots y_m, x) = 0$ qui définit les singularités des f_i : la fonction $X[y_1(x), \ldots y_m(x), x]$ méromorphe dans A'' doit donc s'annuler sur L' et par suite est identiquement nulle : si on tire y_1 par exemple de la relation $X = 0$, on voit que la solution $y_1(x)$.... $y_m(x)$ étudiée vérifie un système différentiel d'ordre $(m-1)$ pour lequel on peut répéter le raisonnement précédent, et ainsi de suite, en sorte qu'il est impossible qu'aucune solution $y_1(x)$...... $y_m(x)$ de (1) présente une ligne singulière L telle que les $y_i(x)$ soient méromorphes dans une aire A attenante à L et prennent sur L des valeurs finies déterminées.

D'autre part, si les fonctions $y_i(x)$, quand x tend vers un point de L, tendent les unes y_j vers l'infini, les autres y_k vers une limite finie, il suffit de remplacer les y_j par $\frac{1}{y_j}$ pour que le raisonnement précédent s'applique.

En définitive, si dans A les fonctions $y_i(x)$ ne présentent comme singularités non polaires que des coupures, quand x tend vers un point d'une de ces coupures (sans en traverser aucune), une au moins des fonctions $y_i(x)$ ne tend vers aucune limite (finie ou non).

Les mêmes résultats subsistent si les fonctions $y_i(x)$ admettent dans A un nombre fini de déterminations.

Si l'intégrale générale $y_1(x), \ldots y_m(x)$ de (1) a ses points critiques fixes (ou ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, ou bien ses singularités non algébriques sont fixes, ou bien elle admet des singularités essentielles proprement dites, qui sont mobiles (j'entends des points $x = a$ où une au moins des fonctions $y_i(x)$ est indéterminée). Lors donc que l'intégrale générale d'un système (1) ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, elle ne peut présenter de singularités non algébriques mobiles que si les conditions nécessaires énoncées page 431 sont remplies.

Une conséquence remarquable de ces propositions est la suivante : on connaît des exemples de trancendantes uniformes $y(x)$ qui n'existent que dans une région A du plan où elles sont holomorphes (ou méromorphes), et qui sont continues, ainsi que toutes leurs dérivées $y'(x)$, $y''(x)$, ..., sur le contour de A. Par exemple la transcendante signalée par M. Fredholm

$$y(x) = \sum_{\nu=0} a^{\nu} x^{\nu^2}, \quad |a| < 1,$$

est holomorphe dans le cercle C de rayon 1 qui a l'origine pour centre et n'est pas prolongeable au-delà. Elle prend pourtant, sur la circonférence de C, une suite continue de valeurs, et il en va de même pour toutes ses dérivées successives. Il est impossible d'après ce qui précède qu'une telle fonction $y(x)$ vérifie une équation différentielle

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}) = 0$$

algébrique en $x, y, \ldots\ldots y^{(n)}$, si grand qu'on prenne l'entier n [1]. Plus généralement, une telle fonction $y(x)$ ne peut vérifier aucune équation différentielle algébrique en $y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}$ et dont les coëfficients sont des fonctions analytiques de x dénuées de coupures.

Equations du second ordre.

Limitons-nous maintenant aux systèmes du second ordre que nous prenons sous la forme d'une équation unique

(1) $$F(y'', y', y, x) = 0$$

où F est algébrique en y'', y', y.

Si dans une aire A (qui ne renferme pas de points ξ), une solution $y(x)$ est uniforme, sans être méromorphe, je dis que chacune des deux fonctions $y(x)$, $y'(x)$ présente dans cette aire des points où elle est indéterminée. Tout d'abord, si les points singuliers (non polaires)

---

[1] On sait que la fonction $y = \Gamma(x)$ ne saurait, non plus, vérifier aucune équation différentielle algébrique.

de $y(x)$ n'appartiennent pas tous à des coupures, chaque fonction $y(x)$, $y'(x)$ admet des points d'indétermination (isolés ou non). Si tous les points singuliers de $y(x)$, $y'(x)$ appartiennent à des coupures, je considère, comme plus haut, une aire A attenante à une coupure L, aire dans laquelle $y(x)$ (et par suite $y'(x)$) est méromorphe. Si quand le point x (intérieur à A) tend vers un point quelconque a de L, $y(x)$ tend vers une limite $y(a)$ deux hypothèses sont possibles : ou bien $y(a)$ coïncide le long de L (ou d'un segment de L) avec une des valeurs $Y = G(a)$ qui définissent les pôles de y'' indépendants de y' ; mais dans ce cas $y(x) - G(x)$ est une fonction (méromorphe d'un certain côté d'un segment L' de L) qui s'annule sur L', et $y(x)$ coïncide identiquement avec $G(x)$, ce qui est absurde ;
ou bien $y(a)$ ne coïncide pas avec $G(x)$ le long du segment L' de L, et dans ce cas $y'(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers un point de L' ; $\frac{1}{y'} = z(x)$ est par suite identiquement nul, ce qui est absurde.

Il faut donc que $y(x)$ soit indéterminé le long d'un segment quelconque de L si petit qu'il soit : j'entends par là que, si petit que soit le segment L' de L, il existe sur L' des points $x = a$ tels que $y(x)$ ne tende vers aucune limite quand x tend vers a sans franchir la coupure.

Comme $z = y'(x)$ vérifie aussi une équation du second ordre $F_1(z'', z', z, x) = 0$ algébrique en z'', z', z, le même théorème s'applique à $y'(x)$.[1]

Ces résultats s'étendent immédiatement au cas où la fonction $y(x)$ admet n déterminations dans A.

Lors donc que l'intégrale générale d'une équation (1) n'acquiert que n déterminations autour des points critiques mobiles, pour qu'elle puisse présenter des singularités non polaires mobiles, il faut que l'équation (1) (où y a subi une transformation homographique

---

[1] On peut montrer d'ailleurs qu'une solution $y(x)$ de (1) uniforme (ou à n valeurs) dans

quelconque] satisfasse à la fois aux deux conditions suivantes :

1°. Il existe des pôles $y = G(x)$ de la fonction $y''(y', y, x)$ qui sont d'ordre au moins égal à 1 et ne dépendent pas de y'.

2°. Il existe au moins une branche de la fonction $y''(y', y, x)$ telle que pour $y' = \infty$, $\frac{y''}{y'^2}$ tendent vers une limite finie ou nulle [1].

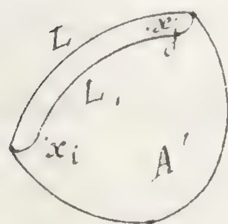
— De l'intégrale considérée comme fonction des constantes.

Quand l'équation

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0$$

---

[1] (Suite), l'aire A, n'y pourrait présenter de lignes singulières. Je me borne à indiquer l'esprit du raisonnement, en supposant pour fixer les idées, F du premier degré en y'', et la solution $y(x)$ uniforme. S'il existe dans A des lignes singulières de $y(x)$, on peut trouver une certaine aire A', attenante à une certaine coupure L et dans laquelle $y(x)$ ne présente qu'un ensemble ponctuel de singularités non polaires (admettant ou non des points de L comme points limites) : $y(x)$ n'est pas prolongeable au delà de L ; la méthode



consiste à montrer que, dans ce cas, si petite que soit la quantité positive ε il existe des chemins L_1 voisins de L, le long desquels la fonction $u(x) = \frac{P(y,x)}{(y'-c)^p}$ est moindre en module que ε, [L_1 tendant vers L quand ε tend vers zéro] : $P(y, x)$ est le polynôme en y (de degré p) qui, annulé, donne les pôles $y = G(x)$ de y'' ; c est une constante quelconque distincte (le long de L et dans le voisinage) des valeurs $y' = h(x)$ qui, associées à une des valeurs $y = G(x)$ donnent à y'' la forme $\frac{0}{0}$.

Pour établir cette proposition, on remarque d'abord que, quand le point x de A' tend vers un point x_0 de L ou vers un point singulier non algébrique x_i de $y(x)$, ou bien $|P(y, x)|$ ou bien $\frac{1}{|y'|}$ est très petit : si y est très grand, comme par hypothèse $z = 0$ est un point ordinaire de la transformée en $\frac{1}{y} = z$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$ est très grand : il suit de là que, x tendant vers x_0 ou vers x_i, $\frac{P(y,x)}{(y'-c)^p}$ est très petit en module (moindre que ε) sauf pour les valeurs de x qui donnent à $y'(x)$ une valeur voisine de c. Mais d'autre part nous savons que x tendant vers x_0 (ou vers x_i) sur un certain chemin continu λ, il est impossible que y' tende vers c, y vers une des valeurs $G(x_0)$ [ou $G(x_i)$], et cela quelque soit λ. Il suit de là que les points de A' où $|y'-c|$ est moindre que α, (dès que la quantité positive α a été prise suffisamment petite) forment des *continuums séparés* B qui peuvent tendre vers des points x_i ou vers L, mais dont aucun n'a un point commun (limite ou non) avec les points x_i ou L. Il existe donc dans A' des lignes L_1 aussi voisines de L qu'on veut *entièrement extérieures aux continuums* B et aux points x_i ; sur ces lignes $|u(x)|$ est moindre que ε, ε tendant vers zéro quand L_1 tend vers L.

Une autre conséquence des théorèmes démontrés sur les singularités essentielles des équations du second ordre est la suivante, que j'énonce seulement : Soit une équation $y'' = R(y', y, x)$ où R est rationnel en y' y. Si une solution $y(x)$ est uniforme dans le domaine d'un point $x = \alpha$ (distinct des points ξ) et admet ce point comme point essentiel isolé, le nombre des valeurs <u>singulières</u> $y = G(x)$ est au plus égal à 2.

D'une manière générale, on peut beaucoup préciser l'étude des singularités essentielles à l'aide des principes de la 18e Leçon.

a ses points critiques fixes, l'intégrale générale $y(x) = \varphi(x, y''_0, y'_0, y_0, x_0)$ est une fonction uniforme des constantes y''_0, y'_0, y_0 liées par la relation

(2) $$F(y''_0, y'_0, y_0, \overline{x}_0) = 0.$$

Si cette fonction ne présente, dans le champ de chaque variable indépendante y_0, y'_0 que des singularités algébriques, φ est rationelle en y''_0, y'_0, y_0 ; les singularités non polaires de $y(x)$ sont fixes. La nature de l'intégrale a été étudiée dans la 17e Leçon.

D'après cela, quand l'intégrale $y(x)$ présente des singularités (non polaires) mobiles, la fonction $\varphi(\overline{x}, y''_0\, y'_0, y_0\, \overline{x}_0)$ présente sûrement dans le champ au moins d'une des variables y_0, y'_0, des singularités non algébriques. C'est une fonction uniforme des variables y''_0, y'_0, y_0 liées par (2), qui ne saurait être rationnelle.

Quand les points critiques de $y(x)$ d'une part, et ses singularités non algébriques d'autre part, sont fixes, je vais montrer que la fonction $\varphi(\overline{x}, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x}_0)$ ne peut admettre, dans le plan des y_0, d'autres singularités transcendantes que les points $y_0 = G(x_0)$, et dans le plan des y'_0 d'autres singularités transcendantes que $y'_0 = \infty$ [1]. Les points $y_0 = G(\overline{x}_0)$ et $y'_0 = \infty$ peuvent être, mais ne sont pas nécessairement, des points essentiels de φ.

Soit $\overline{x}_0$ une valeur numérique (distincte des valeurs ξ) que nous choisissons une fois pour toutes; soit $\overline{y}_0, \overline{y}'_0$ des valeurs finies telles que $\overline{y}_0$ ne coïncide avec aucun des points $y_0 = G(x_0)$, et que $\overline{y}_0, \overline{y}'_0$ ne coïncident avec aucun des couples exceptionnels $y_0 = g(\overline{x}_0)$, $y_0 = h(\overline{x}_0)$. Nous savons que la fonction $\varphi(\overline{x}, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x}_0)$ est algébrique pour $y_0 = \overline{y}_0$, $y'_0 = \overline{y}'_0$, tant que $\overline{x}$ reste voisin de $\overline{x}_0$, et cela quelle que soit celle des m déterminations possibles de y''_0 qu'on adopte.

Ceci rappelé, joignons dans le plan des x les points ξ par des coupures et soit A une aire fermée comprenant $\overline{x}_0$ qui n'a aucun point commun avec les coupures. La fonction $y''(y', y, x)$ est une fonction

[1] Ce théorème est un cas particulier du théorème énoncé page 415 et dont je n'ai fait qu'esquisser la démonstration.

à m branches quand x varie dans A, et $\varphi(x, y_0'', y_0', y_0, \bar{x}_0)$ est une fonction méromorphe de x. Les valeurs $\bar{y}_0'$, $\bar{y}_0$ étant soumises aux restrictions précédentes, soit $y = \varphi_0(x)$ la solution de (1) qui répond aux conditions initiales $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{y}_0', \bar{y}_0''$. Marquons dans l'aire A les points $\bar{a}$ (en nombre limité) pour lesquels $\varphi_0(x)$ et $\varphi_0'(x)$ coïncident avec un couple exceptionnel $g(x), h(x)$. Soit $\bar{x}$ un point de A distinct des points $\bar{a}$; au point x, $\varphi_0(x)$ a une valeur distincte des valeurs $G(\bar{x})$, valeur qu'on peut supposer finie (sinon on changerait y en $\frac{1}{z+c}$). Allons du point x_0 au point $\bar{x}$ en évitant les points a et les pôles (en nombre limité) de $\varphi_0(x)$. Il suffit de répéter identiquement le raisonnement de la page 73, pour voir que $\varphi(x, y_0'', y_0', y_0, x_0)$ est algébroïde et continu pour $x = \bar{x}$, $y_0'' = \bar{y}_0''$, $y_0' = \bar{y}_0'$, $y_0 = \bar{y}_0$.

Ce premier résultat montre que $\varphi(\bar{x}, y_0'', y_0', \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ ou $\psi(y_0')$ ne peut présenter de singularités transcendantes y_0' indépendantes de $\bar{x}$, autres que $y_0' = \infty$. De même $\varphi(\bar{x}, y_0'', \bar{y}_0', y_0, \bar{x}_0)$ ou $\chi(y_0)$ ne peut présenter de singularités transcendantes indépendantes de $\bar{x}$, en dehors des points $y_0 = G(\bar{x}_0)$.

De plus, si les valeurs $\bar{y}_0'', \bar{y}_0', \bar{y}_0$ (distinctes des valeurs exceptionnelles qui viennent d'être mentionnées) sont singularités transcendantes de $\varphi(\bar{x}, y_0'', y_0', y_0, \bar{x}_0)$, c'est que $\bar{x}$ est un des points $\bar{a}$ [où $\varphi_0(x)$, $\varphi_0'(x)$ se confondent avec un couple exceptionnel $g(x), h(x)$]. Nous voulons montrer que $\varphi(\bar{a}, y_0'', y_0', y_0, \bar{x}_0)$ est encore algébroïde pour $\bar{y}_0'', \bar{y}_0', \bar{y}_0$. A cet effet, laissant à y_0 la valeur numérique $\bar{y}_0$, nous allons voir que la fonction $\varphi(\bar{a}, y_0'', y_0', \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ est algébroïde pour $y_0' = \bar{y}_0'$. Le même raisonnement appliqué à $\varphi(\bar{a}, y_0'', \bar{y}_0', y_0, \bar{x}_0)$ prouverait que cette fonction est algébroïde pour $y_0 = \bar{y}_0$. — Observons que les points critiques Y_0' de la fonction algébrique $y_0'' = y''(y_0', \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ sont des points fixes (en nombre fini) du plan des y_0'; ces points ne peuvent être transcendants pour la fonction $\varphi(x, y_0'', y_0', \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ que si x est une des valeurs (en nombre fini) pour lesquelles $\bar{\varphi}(x)$ ou $\varphi(x, Y_0'', Y_0', \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ et $\bar{\varphi}'(x)$ coïncident avec un couple $g(x), h(x)$. Si donc on donne à $\bar{a}$ une valeur quelconque (distincte de ces

valeurs exceptionnelles de x), la fonction $y''_0(y'_0)$ aura ses différentes branches rationnelles dans le voisinage de $y'_0 = \overline{y}'_0$ et $\varphi(x, y''_0, y'_0, \overline{y}_0, \overline{x}_0)$ sera une fonction uniforme de y'_0 dans le voisinage de y'_0 : je représenterai par $\Phi(x, y'_0)$ cette fonction $\varphi(x, y''_0, y'_0, \overline{y}_0, \overline{x}_0)$.

Lemmes. — Marquons dans l'aire A tous les points $\overline{a}$: il nous est loisible d'admettre que toutes les valeurs $\varphi_0(\overline{a})$ sont finies, que A ne renferme aucun pôle de $\varphi_0(x)$ et que son contour l ne rencontre ni de points $\overline{a}$, ni de pôles de $\varphi_0(x)$. De chaque point $\overline{a}$ comme centre, décrivons un cercle C de rayon r très petit. La fonction $\Phi(x, y'_0)$ est algébroïde et continue pour $x = \overline{x}$, $y'_0 = \overline{y}'_0$, $\overline{x}$ désignant un point quelconque de l'aire A' intérieure à A et extérieure aux cercles C (ou un point du contour de A') : il suit de là [1] que Φ est algébroïde et continue quand x varie dans A' et y'_0 dans un cercle Γ_0 de centre $\overline{y}'_0$ et de rayon ρ suffisamment petit.

Soit maintenant b une valeur quelconque de y, telle qu'aucune des fonctions $g(x)$ ne devienne égale à b quand x varie dans un cercle C et sur son contour : le module minimum des différences $b - g(x)$ reste par exemple, dans les C, supérieur à une quantité positive que je représente par $\rho + 2\eta$. Marquons dans l'aire A les points $\overline{x}_i$ racines de l'égalité $b - \varphi_0(x) = 0$; de ces points (qui sont en nombre fini) comme centres, décrivons des cercles C' de rayon r. Dans la portion A'' de A extérieure aux cercles C, C', la différence $\varphi_0(x) - b$ garde un module supérieur à une certaine quantité M, et comme $\Phi(x, y'_0)$ est continue quand x varie dans A'' (et sur son contour) et y'_0 dans Γ_0, la différence $\Phi(x, y_0) - b$ reste supérieure en module

---

[1] Quel que soit le point $\overline{x}$ dans A', Φ est algébroïde dans un domaine

(3) $$|x - \overline{x}| < r', \qquad |y'_0 - \overline{y}'_0| < \rho',$$

r' et ρ' pouvant varier avec $\overline{x}$; mais quand x ne sort pas de A', r' et ρ' admettent une limite inférieure positive r et ρ. Autrement, en décomposant A' en carrés de plus en plus petits [comme à la page 401] on définirait un point x_1 de l'aire A' ou de son contour, tel que Φ ne serait pas algébroïde et continu pour $x = x_1$, $y'_0 = \overline{y}'_0$.

à $\frac{M}{2}$ dans le même domaine (du moment que le rayon ρ de Γ_0 a été pris assez petit). Les valeurs x_k (y, y'_0) du domaine A qui vérifient l'équation

(4) $$0 = y - \varphi(x, y''_0, y'_0, \overline{y}_0\, \overline{x}_0) \equiv y - \Phi(x, y'_0)$$

sont donc intérieures aux cercles C, C', quand y et y'_0 restent respectivement voisins de $b, \overline{y'_0}$:

(Δ) $$|y - b| < \rho, \qquad |y'_0 - \overline{y'_0}| < \rho.$$

De plus, admettons que pour des valeurs $\underline{y}, \underline{y'_0}$ du domaine Δ, l'équation (4) admette une racine x_1 comprise dans le cercle C de centre $\bar{a}$. Je dis que $\frac{d\Phi}{dx}(x, y'_0)$ a pour $x = x_1$, $y'_0 = \underline{y'_0}$ un module très grand (du moment que r est très petit). En effet, si on a :

$$|\bar{x} - \bar{a}| < r, \ |\bar{y} - b| < \rho, \ |\bar{y}'| < M,$$

(M étant un nombre fixe aussi grand qu'on veut), la solution $y(x)$ de (1) qui correspond aux conditions initiales $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$ est algébroïde dans un cercle C de centre $\bar{x}$ et de rayon fixe λ, qu'on peut prendre assez petit pour que $|y(x) - \bar{y}|$ reste dans C moindre que η, et par suite, pour que $|y(x) - g(\bar{a})|$ reste, dans C, supérieur à η.

D'autre part, il est loisible d'admettre que nous avons pris le rayon r de C inférieur à $\frac{\lambda}{2}$: soit a' un point intérieur à C pour lequel $|\varphi_0(a') - \varphi_0(\bar{a})|$ est inférieur à $\frac{\eta}{2}$. La fonction $\Phi(x, y'_0)$ est algébroïde et continue pour $x = a'$, $y'_0 = \overline{y'_0}$ et $|\Phi(a', y'_0) - \varphi_0(a')|$ est moindre que $\frac{\eta}{2}$ du moment que ρ a été pris assez petit ; le module $|\Phi(a', y'_0) - g(\bar{a})|$ reste donc inférieur à η quand y'_0 varie dans Γ_0. Mais pour des valeurs $\underline{y}, \underline{y'_0}$ du domaine Δ, une racine x_1 de (4) est intérieure à C ; si $\left|\frac{d\Phi}{dx}(x_1, \underline{y'_0})\right|$ est inférieur à M la solution $y(x) = \Phi(x, \underline{y'_0})$ et la valeur $g(\bar{a})$ diffèrent dans C' (et en particulier au point a') d'une quantité supérieure en module à η, ce qui est absurde. Il faut donc que $\left|\frac{d\Phi}{dx}\right|$ soit, pour $x = x_1$, $y'_0 = \underline{y'_0}$, supérieur à M. Si on veut encore, la fonction $x_1(y, y'_0)$ a sa dérivée $\frac{dx_1}{dy}$ inférieure en module à $\frac{1}{M}$ [si y, y'_0 appartiennent au domaine Δ et x_1 au domaine C]. C. Q. F. D.

Remarques. — Soit n le nombre des racines $\overline{x}_i$ (intérieures à A) de l'égalité $b = \varphi_0(x)$, racines comptées avec leur degré de multiplicité. L'égalité (4) admet exactement n racines $x_h(y, y'_0)$ intérieures aux cercles C [1]. Ces fonctions $x_h(y, y'_0)$ sont algébroïdes et continues pour $x = b$, $y_0 = \overline{y}'_0$, et coïncident, pour ces valeurs, avec les valeurs $\overline{x}_i$. La chose est évidente, puisque $\Phi(x, y'_0)$ est algébroïde et égale à b pour $x = \overline{x}_i$, $y_0 = \overline{y}'_0$. Il n'y a d'exception que si $\varphi_0(x)$ se réduit à la constante b; mais comme φ_0 doit coïncider alors avec $\overline{y}_0$, il suffit de prendre b différent de $\overline{y}_0$. [soit $|\overline{y}_0 - b| > \rho$], pour échapper à l'exception.

De plus, je dis que (y'_0 étant un point du domaine Γ'_0) le nombre des racines $x(y)$ de l'équation (4) intérieures à A est indépendant de y quand y varie dans le cercle Γ de centre b et de rayon ρ. En effet, l désignant le contour de A, considérons l'intégrale $J = \frac{1}{2i\pi}\int_l \frac{\varphi'(x, y'_0)\,dx}{\varphi(x, y'_0) - \beta}$; les fonctions φ et $\frac{d\varphi}{dx}$ sont algébroïdes et continues pour tout système x, y'_0 où x fait partie du contour l et y'_0 du domaine Γ'_0, et φ est différent de β pour les mêmes valeurs, si β fait partie du domaine Γ. L'intégrale J ne peut donc varier avec β que d'une manière continue, et par suite est indépendante de β quand β varie Γ; $J(\beta) - J(b)$ est nul; l'équation (4) en x a le même nombre de racines pour $y = b$ et pour $y = \beta$.

Observons encore que, d'après ce qui précède, le nombre des racines $x_h(y, y'_0)$ de (4) (intérieures à A) pour lesquelles $\left|\frac{dx_h}{dy}\right|$ est supérieur à $\frac{1}{M}$, est au plus égal à n et ces racines sont algébroïdes et continues pour $y = b$, $y'_0 = \overline{y}'_0$.

En définitive, y, y'_0 appartenant au domaine Δ, l'égalité (4) admet, dans l'aire A, n racines $x(y, y'_0)$ qui tendent vers les points $\overline{x}_i$ quand y, y'_0 tendent vers $b, \overline{y}'_0$; s'il existe d'autres racines, ces racines

---

[1] On suppose qu'on a pris le rayon r des cercles C, C' assez petit pour que ces cercles soient tous intérieurs à A et extérieurs les uns aux autres.

$x(y, y'_0)$ tendent vers les points $\bar{a}$ et leurs dérivées $\frac{dx}{dy}$ tendent vers zéro, quand y tend vers b, y'_0 vers y'_0.

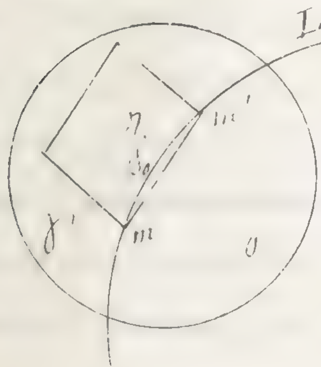
Ces lemmes établis, soit y, y'_0 deux valeurs quelconques appartenant au domaine A, et soit N le nombre des racines $x_k(y, y'_0)$ [intérieures à A] de l'équation (4). Ce nombre ne s'abaisse [1] que pour –

---

[1] En toute rigueur, il faudrait démontrer que ce maximum N existe. Voici comment on peut faire cette démonstration :

Nous savons d'abord que les racines $x_k(y, y'_0)$ comprises dans l'aire A sont intérieures aux cercles C, C' et que les racines intérieures aux C' sont en nombre invariable. Il nous suffit donc d'établir la proposition pour les racines x_k intérieures à un des cercles C, soit le cercle C de centre $\bar{a}$. Nous savons de plus que le nombre des racines $x(y)$ de l'équation (4) (où y'_0 est un point de Γ_0) est indépendant de y, quand y varie dans le cercle Γ de centre b et de rayon ρ : je représente par $n(y'_0)$ ce nombre. Je vais montrer en premier lieu qu'il existe dans Γ_0 une aire finie telle que y'_0 variant dans cette aire, $n(y'_0)$ garde constamment la même valeur N. En effet, si pour $y = b$, $y'_0 = b_1$, l'équation (4) admet n_1 racines, elle admet au moins n_1 racines quand y'_0 varie dans le voisinage de b_1, soit $|y'_0 - b_1| < \rho_1$; $n(y'_0)$ est au moins égal à n_1 quand y'_0 reste intérieur au cercle Γ_1 de centre b_1 et de rayon ρ_1. Si $n(y'_0)$ est exactement égal à n_1 dans ce domaine, le lemme est démontré. Sinon, il existe dans Γ_1 un point $y'_0 = b_2$ pour lequel $n(y'_0)$ est égal à n_2 [$n_2 > n_1$] et dans un cercle Γ_2 de centre b_2, on a : $n(y'_0) \geq n_2$, etc.. Je dis qu'ainsi on arrive à un cercle Γ_i en tout point duquel $n(y'_0)$ est égal à n_i ; autrement, les cercles Γ_1 Γ_2 .... dont chacun renferme le suivant, contiennent au moins un point fixe Y'_0 pour lequel $n(y'_0)$ est supérieur à n_1, n_2 ....., ce qui est absurde puisque $n(Y'_0)$ a une valeur finie et que les n_i croissent indéfiniment. Représentons n_i par N, Γ_i par Γ' : les N fonctions $X_k(y'_0) \equiv x_k(b, y'_0)$, $X'_k(y'_0) \equiv \frac{dx_k}{dy}(b, y'_0)$ sont les N branches de deux fonctions algébroïdes dans Γ', d'après le raisonnement développé dans le texte. Si, dans tout le cercle Γ_0 le nombre $n(y'_0)$ ne dépasse pas N, les X_k, X'_k sont encore les N branches de deux fonctions algébroïdes dans Γ_0.

Si, au contraire, il existe dans Γ_0 des points y'_0 pour lesquels $n(y'_0)$ dépasse N, $n(y'_0)$ dépasse aussi N pour tous les points y'_0 voisins. Appelons γ l'ensemble des points de l'aire Γ_0 qu'on peut atteindre en partant du centre de Γ' et en suivant dans Γ_0 un chemin continu sans jamais rencontrer de points y'_0 pour lesquels $n(y'_0)$ dépasse N ; γ forme à l'intérieur de Γ_0, une aire qui comprend Γ' ; soit γ' la portion restante de Γ_0, L la ligne frontière de γ et γ'. Les N fonctions X'_k algébroïdes dans γ ne peuvent s'annuler le long de L ; soit donc β_0 un point de L où aucune des fonctions X'_i n'est nulle ; à l'intérieur d'un cercle δ de



des valeurs exceptionnelles de y, y'_0. Donnons à y la valeur b, et suivant chacune des N fonctions $x_k(b, y'_0) \equiv X_k(y'_0)$ et $\frac{dx_k}{dy'}(b, y'_0) \equiv X'_k(y'_0)$ en faisant parcourir à y'_0 un chemin continu dans le cercle Γ_0 ; on ne rencontre que des singularités algébriques de X_k et de X'_k tant qu'on atteint pas un point Y'_0, tel que, y'_0 tendant vers Y'_0, X'_k tende vers zéro et X_k vers une des valeurs $\bar{a}$ (pour lesquelles $\Phi(x, Y'_0) \equiv \overline{\Phi}(x)$ est égale à une des fonctions $g(x)$): il suit de là que les X_k et les X'_k ne peuvent présenter dans Γ_0 de points essentiels. Les X'_k ne peuvent davantage admettre de lignes singulières ; car le long d'une telle ligne L certaines des fonctions X'_k, soit $X'_1, \dots X'_j$ $(j \geq 1)$

---

centre β_0 et de rayon suffisamment petit, les fonctions X'_k sont encore les N branches d'une fonction algébroïde. Mais en un point $y'_0 = \eta$ de l'aire γ', aussi voisin de β_0 qu'on veut, l'équation (4) admet plus de N racines $x(y, y'_0)$, et il existe par suite, dans le voisinage de η des fonctions $\frac{\partial x}{\partial y}(b, y'_0)$, soit $\xi_i(y'_0)$, différentes de zéro et des N fonctions X'_k. Quand y'_0, partant de η, décrit un chemin continu qui franchit L, on rencontre sûrement un point pour lequel $\xi_i(y'_0)$ tend vers zéro. Enfin les ξ_i gardent un module inférieur à $\frac{1}{M}$ dans γ'.

Ceci posé, soit m, m' deux points de L équidistants de η, tels que l'angle $m\hat{\eta}m'$ soit égal à une partie aliquote $\frac{2\pi}{l}$ de 2π, et que le polygone régulier de centre η et de coté mm' soit intérieur au cercle δ. Admettons que η soit l'origine du plan des y'_0, et faisons tourner toute la figure autour de l'origine de l'angle $\frac{2\pi}{l}$, puis de l'angle $\frac{4\pi}{l}$ etc. Les différentes aires occupées ainsi par γ' ont une partie commune S, renfermant l'origine, et limitée par des portions de la ligne L et des lignes qui s'en déduisent par les l rotations. Soit maintenant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{l}}$ et $U_i(y'_0) \equiv \xi_i(y'_0)\,\xi_i(\omega y'_0) \dots \xi_i(\omega^{l-1} y'_0)$. Les fonctions U_i gardent dans S un module inférieur à $\left(\frac{1}{M}\right)^l$ pour $y'_0 = \eta = 0$, une d'entre elles est égale à $[\xi_i(0)]^l$, quantité différente de zéro ; enfin y'_0 ne peut sortir de S sans rencontrer un point pour lequel $U_i(y'_0)$ tend vers zéro. Si R est la limite supérieure des $|U_i|$ dans S, je dis qu'un au moins des $|U_i(y'_0)|$ est égal à R pour un point y'_0 de S : en effet en décomposant l'aire S en carrés de plus en plus petits, on voit qu'il existe dans S ou sur son contour s, un point Y'_0 tel que, dans tout cercle de centre Y'_0 si petit qu'il soit, la limite supérieure des $|U_i|$ soit R. Or l'équation (4) n'admet qu'un nombre fini de racines $x_k(y, y'_0)$ telles que $\left|\frac{\partial x_k}{\partial y}(b, y'_0)\right|$ soit supérieur à $\left|\frac{R}{2}\right|^{\frac{1}{l}}$ quand y'_0 varie dans le voisinage de $\omega^j Y'_0$ $(j = 1, 2 \dots l)$ et ces fonctions $\frac{\partial x_k}{\partial y}(b, y'_0)$ sont algébroïdes pour $y'_0 = \omega^j Y'_0$. Il n'existe donc qu'un nombre fini de fonctions U_i dont le module surpasse $\frac{R}{2}$ pour des points voisins de Y'_0 ; et ces fonctions U_i sont algébroïdes pour $y'_0 = Y'_0$. Une au moins de ces fonctions, soit U_1, a donc son module égal à R au point Y'_0 ; de plus Y'_0 ne fait pas partie du contour de S ; autrement, on pourrait franchir s sans rencontrer de point où U_1 s'annule. Si enfin on pose $y'_0 - Y'_0 = z_0^{\nu}$, de façon à rendre U_1 holomorphe pour $z = 0$, dans un petit cercle entourant l'origine $U_1(z_0)$ est holomorphe et son module ne dépasse pas $|U_1(0)|$, ce qu'on sait absurde, d'après les propriétés des fonctions harmoniques. L'entier $n(y'_0)$ est donc au plus égal à N quand y'_0 varie dans Γ_0, et le raisonnement du texte s'applique en toute rigueur.

tendraient vers zéro quand y'_0 tendrait vers un point de cette ligne ; le produit $X'_1 \ldots X'_j$ serait donc une fonction holomorphe de y'_0 dans une certaine aire attenante à L et s'annulerait sur L, il serait donc identiquement nul (voir page 439). L'égalité $X_h(y, y'_0) = x$ définirait une fonction $y(x)$ non uniforme pour $x = x_h(b, y'_0)$ à moins que $x_h(y, y'_0)$ ne fût indépendant de y ce qui est absurde. Les fonctions X_h sont donc algébroïdes dans Γ_0, leurs zéros sont des points isolés y'_0, et comme ces points (seuls points singuliers transcendants que puissent admettre les X_h) ne sauraient être des points essentiels des X_h, les X_h sont aussi algébroïdes dans Γ_0. Les combinaisons symétriques : $u_1 = X_1 + \ldots + X_N$, ... $u_N = X_1 \ldots X_N$, sont donc des fonctions méromorphes de y'_0 dans Γ_0, et comme les valeurs X font partie de l'aire A, les fonctions $u_1 \ldots u_N$ sont holomorphes dans Γ_0.

Comme $y = \infty$ est un point quelconque de l'équation (1), il nous est loisible de faire, dans ce qui précède $b = \infty$. Les pôles de la fonction $\Phi(x, y'_0)$ où y'_0 a une valeur numérique quelconque sont donnés par la relation :

$$x^N + u_1 x^{N-1} - u_2 x^{N-2} + \ldots \pm u_N = 0$$

Considérons le produit :

$$\Psi(x, y'_0) = \left[x^N + u_1 x^{N-1} - u_2 x^{N-2} + \ldots \pm u_N\right] \Phi(x, y'_0) ;$$

pour toute valeur y'_0 appartenant au cercle Γ_0, la fonction $\Psi(x)$ est holomorphe dans l'aire A. Je dis que son module maximum dans A reste (quand y'_0 varie dans Γ'_0) inférieur à une quantité finie R

En effet, la fonction $\Psi(x, \overline{y'_0}) \equiv \Psi_0(x)$ est holomorphe dans A et sur son contour, et reste, dans A, inférieur en module à une certaine quantité $\frac{R}{2}$. L'intégrale définie $\frac{1}{2i\pi} \int_l \frac{\Psi'_0(x)\,dx}{\Psi_0(x) - \beta}$ étendue au contour L de A, est donc nulle, si $|\beta|$ est supérieur à R. D'autre part, la fonction $\Psi(x, y'_0)$ et sa dérivée $\frac{d\Psi}{dx}(x, y'_0)$ sont continues quand x varie sur le contour l (ou dans le voisinage) et y'_0 dans Γ_0, et $\Psi(x, y'_0)$ diffère de $\Psi_0(x)$ de moins de $\frac{R}{2}$, (du moment que le rayon ρ de Γ_0 est suffisamment

petit). L'intégrale $J = \frac{1}{2i\pi}\int_l \frac{\psi'_x \, dx}{\psi'(x,y'_0)-\beta}$ ne peut donc varier avec y'_0 que d'une façon continue et par suite est indépendante de y'_0. Comme elle nulle pour $y'_0 = \overline{y}'_0$, elle est nulle quel que soit y'_0 dans Γ_0, et comme $\psi'(x,y'_0)$ n'a pas de pôles dans A, l'égalité $\psi'(x,y'_0)-\beta = 0$ $[|\beta| > R]$ n'a pas de racines x dans l'aire A (si y'_0 est un point du domaine Γ_0) La fonction $\psi'(x,y'_0)$ garde un module inférieur à R quand x varie dans A et y'_0 dans Γ_0.

Ceci posé, développons la fonction $\psi'(x,y'_0)$ en série de Taylor procédant suivant les puissances de $x-\overline{a}$:

(5) $\quad \psi'(x,y'_0) = \psi'(\overline{a},y'_0) + (x-\overline{a})\frac{\partial\psi'}{\partial x}(\overline{a},y'_0) + \frac{(x-\overline{a})^2}{1.2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}(\overline{a},y'_0) + \ldots$

Cette série converge (quel que soit y'_0 dans Γ_0) à l'intérieur d'un cercle C de centre $\overline{a}$ et de rayon r, et d'après la démonstration classique de la convergence de la série de Taylor, elle converge uniformément quand les deux variables x, y'_0 varient, la première dans C, la seconde dans Γ_0 (cela parce que $|\psi'|$ reste inférieur à R). Les coëfficients de la série (5) sont des fonctions uniformes de y'_0, et la somme de cette série est, dans C et Γ_0, une fonction holomorphe de x, y'_0, sauf aux points Y'_0 qui sont des pôles ou des singularités transcendantes des coefficients de (5). Mais de tels points Y'_0, s'ils existent, sont nécessairement, d'après (5), des pôles ou des points transcendants de la fonction $\psi(x,y'_0)$ quel que soit x, ce que nous savons absurde. La fonction ψ' est donc holomorphe en x, y'_0 dans C, Γ_0 et par suite $\Phi(x,y'_0)$ se laisse mettre sous la forme :

$$\Phi(x,y'_0) = \frac{U(x,y'_0)}{V(x,y'_0)}$$

U et V procédant suivant les puissances croissantes de $x-\overline{a}$, $y'_0 - \overline{y}'_0$. La fonction $\Phi(x,y'_0)$ est donc algébroïde pour $x = \overline{a}$, $y' = y'_0$.

C. Q. F. D.

Le même raisonnement s'applique avec des modifications insignifiantes aux équations (1) dont l'intégrale générale $y(x)$ a ses singularités essentielles fixes et n'acquiert autour des points critiques mobiles qu'un nombre limité de valeurs.

La fonction $\varphi(\bar{x}, y''_0, \bar{y}'_0, y_0, \bar{x}_0)$ est donc algébroïde pour $y_0 = \bar{y}_0$ et la fonction $\varphi(\bar{x}, y''_0\, y'_0\, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ est algébroïde pour $y'_0 = \bar{y}'_0$ du moment que y_0; y'_0 sont finis, distincts des couples exceptionnels $y_0 = g(\bar{x}_0)$, $y'_0 = h(\bar{x}_0)$, et que y_0 diffère des valeurs $G(\bar{x}_0)$ Si m désigne le degré de F en y'' et n le nombre des valeurs de $y(x)$ qui se permutent autour des points critiques mobiles, φ est une fonction à $m\,n$ valeurs de y_0, y'_0 et vérifie une relation de la forme:

$$B_{mn}(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)\,\varphi^{mn} + B_{mn-1}(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)\,\varphi^{mn-1} + \cdots + B_0(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0) = 0$$

où les B sont holomorphes pour $\bar{y}_0, \bar{y}'_0$. Les valeurs $y_0 = g(\bar{x}_0)$, $y'_0 = h(\bar{x}_0)$ peuvent annuler tous les coëfficients B; les valeurs $y_0 = G(\bar{x}_0)$ peuvent être points essentiels des B.

Etudions la valeur $y_0 = \infty$. Pour cela, posons $y = \frac{1}{z}$ et admettons que [dans l'équation (1)' en z] z'' n'admette pas $z = 0$ comme pôle au moins du premier ordre (1); je dis que $y_0 = \infty$ est un point algébrique de φ. En effet, soit $z = \psi(\bar{x}, z''_0, z'_0, z_0, \bar{x}_0)$ l'intégrale de (1)': ψ est algébroïde pour $z_0 = 0$, $z'_0 = \bar{z}'_0$, (en particulier pour $z_0 = 0$, $z'_0 = 0$); si on pose $z'_0 = -z_0^2\, y'_0$, ψ devient une fonction de z_0, y'_0 algébroïde pour $z_0 = 0$, $y'_0 = \bar{y}'_0$; si enfin on change z_0 en $\frac{1}{y_0}$, la fonction ainsi obtenue, qui n'est autre que φ, est algébroïde pour $y_0 = \infty$, $y'_0 = \bar{y}'_0$. — Nous dirons dorénavant que $y = \infty$ est une des valeurs $y = G$ dans le seul cas où $z = 0$ est un pôle (au moins du premier ordre) de z'' dans la transformée de (1) en $\frac{1}{y} = z$.

Passons à la valeur $y'_0 = \infty$; si toutes les branches de la fonction $y''(y', y)$ sont telles que $\frac{y''}{y'^2}$ devienne infini pour $y' = \infty$ le raisonnement précédent s'applique à $y'_0 = \infty$ parce que $\varphi(\bar{x}, y''_0, y'_0\, \bar{y}_0, \bar{x}_0)$ est algébroïde [voir page 404] pour $y'_0 = \infty$ [du moment que $\bar{x}$ est voisin de $\bar{x}_0$]

Nous sommes donc en état d'énoncer ce théorème:

---

(1) Cette supposition est vérifiée si $y = \infty$ est un point ordinaire de (1).

« Quand l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation (1) a ses singularités essen-
« tielles fixes et ne prend qu'un nombre fini n de valeurs autour des points
« critiques mobiles, cette intégrale vérifie une relation algébrique de degré
« n en y.

$$0 = y^n + A_{n-1}(x, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0)\, y^{n-1} + \dots + A_1(x, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0)\, y + A_0(x, y''_0, y'_0, y_0, x_0)$$

« où les A sont des fonctions uniformes du point analytique (y_0, y'_0, y''_0) de
« la surface $F(y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) = 0$ et ne peuvent admettre comme singularités
« essentielles que les valeurs $y_0 = G(\bar{x}_0)$, $y'_0 = \infty$. »

Si on veut encore, l'intégrale $y = \Phi(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ est une fonction à mn branches de y_0, y'_0, dont les seules singularités essentielles possibles sont, dans le plan des y_0 les points $y_0 = G(\bar{x}_0)$, et dans le plan des y'_0 le point $y'_0 = \infty$.

Quand il n'existe pas de points $y = G(x)$, Φ est algébrique en y_0. Quand il n'existe pas de branche $y''(y', x)$ telle que $\frac{y''}{y'^2}$ soit finie pour $y' = \infty$, Φ est algébrique en y'_0.

Corollaire du théorème précédent

Complétons ce théorème en montrant que si Φ est algébrique par rapport à une des variables y_0, y'_0, il est aussi algébrique par rapport à l'autre.

Considérons en effet une équation (1) entièrement quelconque, et admettons que son intégrale générale $y = \Phi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ soit une fonction algébrique de y'_0. Je dis que Φ est une fonction algébrique de y_0. En effet, écrivons les égalités:

(a) $\qquad y = \Phi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0), \qquad y' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0),$

et les égalités symétriques:

(b) $\qquad y_0 = \Phi(\bar{x}_0, y, y', x), \qquad y'_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}(\bar{x}_0, y, y', x).$

Tirons y'_0 de la première égalité (a) et portons dans la seconde ; il vient :

(c) $\qquad y' = \Psi(x, y_0, y, \bar{x}_0)$

où Ψ est algébrique en y ; mais la première équation (b) nous

montre[1] que $y'(x, y_0, y, \bar{x}_0)$ est algébrique en y_0, y, et par suite la fonction $y_0 = \Phi(\bar{x}_0, y, y', x)$, est algébrique en y, y'. C.Q.F.D.

Admettons maintenant que $\Phi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ soit algébrique en y_0. Si nous tirons y_0 de la première équation (a) pour porter dans la 2e, il vient : $y' = X(x, y, y'_0, \bar{x}_0)$ où X est algébrique en y, mais la seconde égalité (b) montre que $y'(x, y, y'_0, \bar{x}_0)$ est algébrique en y'_0, donc X est algébrique en y, y'_0, et $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ est algébrique en y_0, y'_0. D'autre part, si on pose $\frac{dy}{dx} = z$, z vérifie une équation du second ordre (à moins que y ne figure pas dans F) et y s'obtient algébriquement en fonction de z, $\frac{dz}{dx}$, d'où cette conclusion :

Quand $\Phi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ est fonction algébrique d'une seule des deux variables y_0, y'_0, cette variable est sûrement y_0 et l'équation $F = 0$ ne renferme pas y explicitement. La fonction $y'(x)$ vérifie alors l'équation du premier ordre $F'\left(\frac{dy'}{dx}, y', x\right) = 0$, et on a : $y' = \Phi'(x, y'_0, \bar{x}_0)$, la fonction Φ' n'admettant dans le champ des y'_0 que des singularités algébriques ; y est ensuite donné par la quadrature $y = y_0 + \int_{\bar{x}_0}^{x} \Phi'(x, y'_0, \bar{x}_0)\,dx \equiv \Phi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ et Φ ne présente non plus dans le champ des y'_0 que des singularités algébriques. Si la fonction $y(x)$ ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles ;[2] $\Phi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ est une fonction à mn valeurs de y_0, y'_0 qui n'a que des singularités algébriques ; c'est donc une fonction algébrique de y_0, y'_0. C.Q.F.D.

En définitive, quand l'intégrale $y = \Phi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ de (1) a ses singularités essentielles fixes et ne prend que n valeurs autour

---

[1] La fonction $\Phi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ dépend sûrement de y'_0 (autrement $y(x)$ ne renfermerait qu'une constante arbitraire y_0) ; on peut donc tirer y' de la première équation (b). De même $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ dépend de y'_0 ; autrement $y'(x)$ vérifierait une équation du premier ordre, F serait indépendant de y, et $y'(x)$ serait de la forme $\Phi'(x, y'_0, x_0)$, donc dépendrait de y'_0.

---

[2] En effet, l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \Phi'(x, y'_0, \bar{x}_0)\,dx$ n'a pas de points logarithmiques variables avec y'_0.

des points critiques mobiles, ou bien P est une fonction algébrique de y_0, y'_0 ou bien P admet dans le plan des y'_0 le point $y'_0 = \infty$ comme point essentiel et dans le plan des y_0 un au moins des points $y_0 = G(\bar{x}_0)$ comme point essentiel. Pour que ce dernier cas puisse se présenter, il faut: 1° qu'il existe des valeurs $y = G(x)$; 2° qu'une branche au moins de $y''(y', y, x)$ soit telle que $\frac{y''}{y'^2}$ reste finie pour $y' = \infty$

Remarque sur les valeurs infinies de y — Supposons qu'une équation (1) donnée ne possède aucune valeur $y = G(x)$ finie, et que son intégrale $y(x)$ ne prenne dans une aire A qu'un nombre fini de valeurs et présente dans cette aire des singularités essentielles mobiles. Je dis que, dans ce cas, $z = 0$ est nécessairement un pôle (du premier ordre au moins) de z'' dans la transformée de (1) en $\frac{1}{y} = z$.

Tout d'abord, si le couple $y = 0$, $y' = 0$ ne coïncide pas (quel que soit x) avec un des couples singuliers $y = g(x)$, $z = h(x)$ de (1), la chose est évidente: en effet, l'équation $F_1(z'', z', z, x) = 0$ admet le point $z = \infty$ comme point ordinaire (au sens de la page 421) et elle ne peut posséder d'autre point $z = G(x)$ que $z = 0$. Si donc $z = 0$ n'est pas pôle (du premier ordre au moins) d'une branche de z'', la dérivée $z'(x)$ de l'intégrale $z(x)$ ne peut admettre de singularités essentielles, mobiles, et par suite $y(x)$, $y'(x)$ ne possèdent pas dans A de telles singularités.

Si maintenant $y = 0$, $y' = 0$ définissent un couple exceptionnel de (1), je pose: $y + c = \frac{1}{\xi}$, c désignant une constante telle que le couple $y = c$, $y' = 0$ ne coïncide pas (pour x quelconque) avec un des couples $y = g(x)$, $z = h(x)$. D'après le raisonnement précédent, l'équation $F_2(\xi'', \xi', \xi, x) = 0$ doit admettre $\xi = 0$ comme un point $G(x)$. Soit donc $\xi'' = f_2(\xi', \xi, x)$ une branche de ξ'' pour laquelle $\xi = 0$ est pôle d'ordre au moins égal à 1 (quels que soient ξ', x), et soit $z'' = f_1(z', z, x)$ la branche de z'' correspondante; comme on a:

$$z = \frac{\xi}{1 - c\xi}, \quad z' = \frac{\xi'}{1 - c\xi} + \frac{c\xi\xi'}{(1 - c\xi)^2}, \quad z'' = \frac{\xi''}{1 - c\xi} + \frac{3c\xi'^2}{(1 - c\xi)^2} + \xi(\ldots\ldots),$$

on voit aussitôt que $z=0$ est un pôle de $f_1(z', z, x)$ du même ordre que le pôle $\xi=0$ de $f_2(\xi', \xi, x)$. C. Q. F. D.

Division des équations du second ordre en une classe générale et une classe singulière

Les résultats de la discussion développée dans cette leçon se résument ainsi:

Quand l'intégrale générale $y=\Phi(x, y'_0, y_0, x_0)$, d'une équation:

(1) $$F(y'', y', y, x)=0$$

algébrique en y'', y', y, ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, ou bien Φ est algébrique en y_0, y'_0, ou bien la fonction $y''(y', y, x)$ définie par (1) satisfait à la fois aux deux conditions suivantes:

1° elle possède des branches telles que $\frac{y''}{y'^2}$ reste fini pour $y'=\infty$ [y et x étant arbitraires.]

2° elle admet des pôles $y=G(x)$, du premier ordre au moins indépendants de y', [$G(x)$ pouvant être l'infini[1]].

Ces deux conditions ne sont pas d'ailleurs suffisantes pour que $\Phi(x, y'_0, y_0, x_0)$ [fonction de y'_0, y_0 à un nombre fini $m.n$ de branches] soit une fonction transcendante [voir page 416]. Supposons notamment que, les conditions 1° et 2° étant remplies pour l'équation (1), on aperçoive une transformation

(2) $$z=\varrho(y', y, x)$$

algébrique en y', y, telle que la fonction $z(x)$ vérifie une équation du second ordre $F_1(z'', z', z, x)=0$ pour laquelle une au moins des conditions

---

[1] Par définition (voir page 455), $y=\infty$ est un des pôles $y=G(x)$ si, dans la transformée de (1) en $\frac{1}{y}=z$, la fonction $z''(z', z, x)$, admet le point $z=0$ comme pôle du premier ordre au moins [z' et x étant arbitraires].

1° et 2° ne soit pas remplie : puisque, par hypothèse, l'intégrale $y(x)$ de (1) ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, il en est de même de l'intégrale $z(x)$ de l'équation $F_1 = 0$ et $z(x) \equiv \Psi_1(x, z'_0, z_0, \bar{x}_0)$ renferme nécessairement z'_0, z_0 sous forme algébrique ; mais comme y s'exprime algébriquement en fonction de z, z' [soit $y = \rho_1(z', z, x)$] ainsi que y', la fonction $y = \Phi(x, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ est algébrique en y'_0, y_0.

Nous appellerons transformées algébriques de l'équation (1) toutes les équations *du second ordre* qui se déduisent de l'équation (1) par un changement de variables (2) où ρ est algébrique en y', y.[1]

Ces remarques faites, je dirai qu'une équation (1) est de la classe *singulière* si elle satisfait à la fois aux conditions 1° et 2°, ainsi que toutes ses transformées algébriques. Sinon, je dirai que l'équation (1) appartient à la classe *générale*.

D'après cette définition, une équation (1) et toutes ses transformées algébriques appartiennent à la même classe. Pour qu'une équation (1) soit de la classe générale, il faut et il suffit qu'une au moins de ses transformées algébriques ne satisfasse pas à une des conditions 1° et 2°.

La question de reconnaître si une équation donnée (1) est de la classe générale ou de la classe singulière est, dans les cas les plus défavorables, une question difficile qui se relie étroitement à l'étude des intégrales $y(x)$ de (1) dans le domaine des couples singuliers $y = g(x)$, $y' = h(x)$. Mais elle se résout immédiatement quand une au moins des conditions 1° et 2° n'est pas remplie pour

---

[1] Il peut arriver que pour un certain choix de la fonction $\rho(y', y, x)$, la fonction $z(x)$ vérifie une équation du premier ordre ; nous excluons ici ces transformations particulières en exigeant que l'équation transformée soit du second ordre.

l'équation donnée, ou encore quand on aperçoit une transformation algébrique (2) telle que la transformée de (1) échappe à une des deux conditions. Par exemple, l'équation $y''=0$ est de la classe générale, parce que la fonction $z = xy'-y+(y'+x)^{\frac{1}{2}}$ vérifie l'équation $z''=-2z'^3$, qui ne satisfait pas à la condition 1°.

J'arrive maintenant à une propriété fondamentale pour notre objet et qui résulte aussitôt de ce qui précède.

Théorème — Quand l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation donnée (1) ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, elle renferme les constantes y_0, y'_0 sous forme algébrique ou transcendante suivant que l'équation (1) est de la classe générale ou de la classe singulière.

Tout d'abord, si l'équation (1) est de la classe générale, la fonction $y = \Phi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$ à mn branches est nécessairement algébrique.

Inversement, si $\Phi(\bar{x}, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$, est algébrique, les deux fonctions $\Phi(\bar{x}_0, y', y, x) \equiv \psi(y', y, x)$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial x_0}(\bar{x}_0, y', y, x) \equiv \psi'(y', y, x)$, sont deux intégrales premières distinctes de (1), algébriques en $y'y$. Posons:

$$z = x\,\psi(y', y, x) + \psi'(y', y, x)\;;$$

l'équation que vérifie $z(x)$ a comme intégrale générale $z = cx + c_1$, (c et c_1 désignant deux constantes arbitraires); cette équation se confond donc avec l'équation de la classe générale $z''=0$.

Dans les deux leçons prochaines, nous étudierons les équations de la classe singulière dont l'intégrale générale ne prend, autour des points critiques mobiles, qu'un nombre fini de valeurs[1].

---

[1] Je me borne ici à un exposé sommaire des principes qui sont utiles à l'étude du cas où l'intégrale $y(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles: la classification

En terminant cette leçon, j'étendrai aux systèmes différentiels quelconques la classification que je viens d'indiquer.

– Systèmes différentiels quelconques.

Considérons un système différentiel du second ordre:

(1) $$\frac{dy}{dx} = f_1\,(y,z,x), \qquad \frac{dz}{dx} = f_2\,(y,z,x),$$

où f_1, f_2 sont algébriques en y, z. Tout système:

(1)' $$\frac{dY}{dx} = F_1\,(Y,Z,x), \qquad \frac{dZ}{dx} = F_2\,(Y,Z,x)$$

tel qu'on puisse de (1) à (1)' par une transformation

(2) $$y = \varrho\,(Y,Z,x), \qquad z = \varrho_1\,(Y,Z,x)$$

algébrique en y, z, et résoluble par rapport à ces variables est dit transformé algébrique du système (1).

---

précédente demanderait à être complétée en vue de l'étude de l'intégrale $y(x)$ d'une équation (1) quelconque. – J'observe encore que les conditions 1° et 2° sont toujours vérifiées quand l'équation (1) a ses points critiques fixes; en effet, si une branche $y''(y', y, x)$ devient infinie d'ordre supérieur à y'^2 pour $y' = \infty$, l'intégrale $y(x)$ possède des points critiques algébriques mobiles; la condition 1° est donc remplie pour toutes les branches de y''. De plus, $y(x)$ possède des points critiques algébriques mobiles si y'' devient infini pour des valeurs $y' = K(y,x)$ ou si y'' devient infini d'ordre inférieur à 1, pour $y = H(x)$. Il faut donc que $F = 0$, soit de la forme: $P_m(y,x)\,y''^m + P_{m-1}(y',y,x)\,y''^{m-1} + \dots + P_0(y',y,x) = 0$, où P_m est un polynôme en y dont toutes les racines $y = H(x)$ sont pôles au moins du premier ordre d'une branche de y''. La condition 2° est remplie, à moins que P_m ne soit indépendant de y, mais, dans ce dernier cas, l'équation en $z = \frac{1}{y}$ s'écrit: $z''^m - \frac{2m\, z''^{m-1} z'^2}{z} + \dots$, le 2e terme ne pouvant être détruit par aucun autre; $z = 0$ est un pôle (du premier ordre au moins) de z''. Mais l'équation (1) peut être néanmoins de la classe générale.

Regardons y, z comme les coordonnées d'un point (réel ou imaginaire) du plan des yoz. — Considérons (pour une valeur quelconque de x) toutes les courbes polaires indécomposables de y', z', soit $X_1(y,z,x)=0$ ou C_x, qui sont en même temps des intégrales premières particularisées de (1). D'une façon plus précise, chaque branche y', z' qui devient infinie le long de la courbe C_x se laisse mettre sous la forme :

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{Y_1}{X_1^{\frac{\lambda}{\nu}}} \,, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z_1}{X_1^{\frac{\lambda}{\nu}}} \,, \quad \begin{pmatrix} \lambda > 0 \\ \nu > 0 \end{pmatrix}$$

Y_1, Z_1 restant finis et n'étant pas tous deux identiquement nuls en un point arbitraire de C_x ; je considère seulement les courbes C_x telles que, pour une au moins des branches (1)', l'expression :

$$X_1^{\frac{\lambda}{\nu}} \frac{\partial X_1}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial X_1}{\partial y} + Z \frac{\partial X_1}{\partial z}$$

renferme X_1 en facteur à une puissance au moins égale à 1. (voir page 428) Je donne à ces courbes C_x le nom de courbes remarquables attachées au système (1). Si le système (1)' qui se déduit de (1) en changeant y en $\frac{1}{Y}$, z en $\frac{Z}{Y}$, admet la courbe $Y=0$ comme courbe C_x, je dis que la droite de l'infini du plan yoz est une des courbes C_x attachées à (1).

Ces définitions admises, je dis qu'un système (1) est de la classe singulière, si ce système possède au moins une courbe C_x (à distance finie ou infinie) et s'il en est de même de tous ses transformés algébriques. Au cas contraire le système (1) est dit de la classe générale.

Quand l'intégrale générale $y(x)$, $z(x)$ de (1) ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, les fonctions $y = \varphi(x, y_0, z_0, x_0)$, $z = \psi(x, y_0, z_0, x_0)$ sont algébriques ou transcendantes en y_0, z_0 suivant que le système (1) appartient à la classe générale ou à la classe singulière.

Observons qu'il existe des systèmes (1) à points critiques fixes qui ne possèdent pas de courbes C_x et par suite sont sûrement

de la classe générale. Considérons, par exemple, un système (1) où f_1, f_2 sont rationnels en y, z, et écrivons ce système sous la forme :

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{A - yC}{X}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{B - zC}{X},$$

où X est un polynôme en y, z, de degré q et A,B,C, des polynômes en y, z de degré $q+1$. Pour qu'il n'existe pas de points critiques algébriques mobiles, il faut que toutes les courbes $X=0$ soient des courbes C_x. Si donc il n'existe pas de courbes C_x, il faut que q soit nul, et par suite qu'on ait :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 z - y(c_0 + c_1 y + c_2 z) \\ \dfrac{dz}{dx} = b_0 + b_1 y + b_2 z - z(c_0 + c_1 y + c_2 z) \end{cases}$$

où les a, b, c sont des fonctions de x. Inversement, un système de la forme (3) ne possède aucune courbe C_x, à distance finie ou infinie, [car le transformée (3)' de (3) en $\frac{1}{y} = Y$, $\frac{z}{y} = Z$ est encore de l'espèce (3)]. Les coëfficients différentiels de (3) ne sont pour aucun couple $y = g(x)$, $z = h(x)$ de la forme $\frac{0}{0}$, [non plus que les coëfficients du transformé (3')]. L'intégrale générale $y(x)$, $z(x)$ de (3) ne présente aucun point critique algébrique mobile ; elle ne peut être affectée de singularités transcendantes mobiles. Les points critiques sont donc fixes et $y(x)$, $z(x)$ dépendent rationnellement des constantes y_0, z_0. D'après les théorèmes de la 17e leçon, le système (3) doit se ramener à une équation linéaire, et en effet on voit immédiatement qu'une transformation homographique convenable effectuée sur y, z ramène le système (3) à une forme où c_1, c_2, sont nuls, c'est à dire à la forme linéaire. Il est facile de même de former tous les systèmes (1) où f_1, f_2 sont des fonctions algébriques de y, z à deux (ou trois, ...) branches, qui ne possèdent aucune courbe C_x et dont les points critiques sont fixes. L'intégrale $y(x)$, $z(x)$ d'un tel système dépend algébriquement de y_0, z_0.

Sous sa dernière forme, la classification précédente et ses conséquences s'étendent d'elles-mêmes à un système différentiel d'ordre quelconque (voir page 431).

Vingtième Leçon.

Équations du second ordre à points critiques fixes dont l'intégrale dépend algébriquement d'une seule des constantes.

Nous allons étudier, dans cette leçon et la suivante, les équations du second ordre :

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0$$

dont l'intégrale $y(x)$ ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour des points critiques mobiles, mais renferme sous forme transcendante les constantes y_0, y'_0.

Quand il en est ainsi, il est impossible de substituer aux constantes y_0, y'_0, d'autres constantes c, c' telles que l'intégrale $y(x)$ soit une fonction algébrique de c, c'. Car si on avait :

$$y = \Psi(x, c, c') \qquad y' = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, c, c'),$$

Ψ (et par suite $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$) étant algébrique en c, c', on aurait :

$$y_0 = \Psi(\bar{x}_0, c, c'), \qquad y'_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(\bar{x}_0, c, c'),$$

équations algébriques en c, c' et résolubles par rapport à c, c'. En remplaçant c, c' dans Ψ en fonction de y_0, y'_0, on voit que y serait algébrique en y_0, y'_0.

Mais il peut arriver qu'en substituant à y_0, y'_0 des constantes nouvelles c, c' convenablement choisies, l'intégrale $y = \Psi(x, c, c')$

soit une fonction transcendante de c, mais algébrique de c'.

Nous sommes amenés ainsi à distinguer trois cas:

1er Cas. — L'intégrale $y(x)$ de (1) est une fonction algébrique des deux constantes c, c' (convenablement choisies): il est toujours loisible alors de prendre, pour c, c', les constantes y_0, y'_0. Ce premier cas a été élucidé dans la 17e leçon.

2e Cas. — L'intégrale $y(x)$ est une fonction transcendante, d'une des constantes c, et algébrique de l'autre constante c', les constantes c, c' étant convenablement choisies; mais on ne peut choisir les constantes de façon qu'elles figurent l'une et l'autre algébriquement dans y.

3e Cas. — L'intégrale $y(x)$ est une fonction transcendante des deux constantes c, c', de quelque façon qu'on les choisisse.

Je dirai que $y(x)$ est dans le premier cas une fonction algébrique, dans le second cas une fonction semi-transcendante, dans le troisième cas une fonction transcendante des deux constantes d'intégration.

J'étudierai dans cette leçon, le cas où $y(x)$ est une fonction semi-transcendante des constantes.

— Equations dont l'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. —

L'intégrale pouvant s'écrire: $y = \Psi(x, c, c')$, où Ψ est algébrique en c', si j'élimine c' entre les deux équations:

$$y = \Psi(x, c, c'), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, c, c'),$$

je forme une relation:

$$(2) \qquad G(y', y, x, c) = 0,$$

où G est un polynôme en y', y, dont les coëfficients dépendent de x, c. Je suppose ce polynôme irréductible pour des valeurs arbitraires de x, c. — L'intégrale générale $y(x)$ de (1) s'obtient en intégrant

(2) pour une valeur arbitraire de c.

Soit q le degré de G en y', r son degré en y. Ecrivons le polynôme G en y', y le plus général qui corresponde à ces degrés en laissant ses coëfficients $\lambda(x)$ indéterminés, (un de ces coëfficients étant pris égal à 1), et exprimons qu'une solution quelconque de l'équation $G = 0$ ou :

$$\sum \lambda(x)\, y^i y'^j = 0 ,$$

est solution de (1) : Autrement dit, écrivons que l'expression $H(y', y, x)$ obtenue en remplaçant, dans F, y'' par : $\dfrac{-\left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} y'\right)}{\frac{\partial G}{\partial y'}}$, contient $G(y', y, x)$ en facteur. Nous formons ainsi un certain nombre de relations algébriques entre les λ, $\dfrac{d\lambda}{dx}$ et les coëfficients de F. Ces relations sont sûrement compatibles et définissent les λ en fonction de x et d'une constante arbitraire au moins. Je dis que leur solution $\lambda(x)$ la plus générale dépend d'un nombre fini de constantes. En effet, autrement on pourrait se donner arbitrairement au moins un des coëfficients $\lambda(x)$, soit $\lambda_0(x)$; prenons par exemple $\lambda_0 = \log(x - a) + c$, a désignant un point fixe distinct des points ξ ; le point $x = a$ sera un point singulier de toutes les solutions $y(x)$ de (2) quel que soit c ; ce sera donc un point singulier de toute solution de (1), ce qui est absurde.

D'après cela, si on pose : $u(x) = \sum \rho\lambda$, ρ désignant des fonctions de x choisies arbitrairement une fois pour toutes, la fonction u vérifiera une certaine équation différentielle d'ordre s, soit :

$$(3) \qquad K\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^su}{dx^s}\right) = 0,$$

où K est un polynôme en $u, \dfrac{du}{dx}, \ldots \dfrac{d^su}{dx^s}$, dont les coëfficients dépendent algébriquement des coëfficients de F et de leurs dérivées. Les fonctions λ s'exprimeront algébriquement en $u, \dfrac{du}{dx}, \ldots \dfrac{d^{s-1}u}{dx^{s-1}}$ soit : $\lambda = l\left[x, u, u', \ldots u^{(s-1)}\right]$, les coëfficients des l dépendant algébriquement de ceux de F et de leurs

dérivées. En définitive, toute solution de l'équation:

$$(4) \qquad 0 = \sum l\left[x, u, u', \dots u^{(s-1)}\right] y'^i y'^j \equiv G\left[y', y, x, u, u', \dots u^{(s-1)}\right],$$

où u vérifie la condition

$$(3) \qquad K\left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots \frac{d^s u}{dx^s}\right) = 0, \qquad (s \geq 1,\ u \equiv \Sigma \varrho l),$$

est solution de (1).

De plus, le système (4), (3) définit toutes les solutions de (1). En effet, soit $\bar{x}_0$ une valeur numérique de x, y_0 et y'_0 des valeurs quelconques de y, y': on peut disposer de $u_0, \dots u_0^{(s-1)}$ de façon qu'on ait: $G(y'_0, y_0, \bar{x}_0, u_0, u'_0, \dots u_0^{(s-1)}) = 0$: la solution générale $y(x)$ de (4), (3) dépend donc de deux constantes arbitraires distinctes. Si on élimine u entre les équations $G = 0$, $\frac{dG}{dx} \equiv G'\left[y'', y', y, x, u, u', \dots u^{(s-1)}\right] = 0$, l'équation $F_1(y'', y', y, x) = 0$ (algébrique en y'', y', y) ainsi obtenue ne doit plus dépendre de $u', \dots u^{(s-2)}$, et doit être une conséquence de (1): comme l'équation (1) est irréductible, les deux équations $F = 0$, $F_1 = 0$ coïncident.

Montrons maintenant que la dérivée d'ordre $(s-1)$ de u figure explicitement dans G. La fonction $y' = g(y, x)$ définie par (4) dépend des s constantes distinctes, soit $a_1, \dots a_s$, valeurs de $u, u', \dots u^{(s-1)}$ pour une valeur numérique de x: car si elle renfermait seulement $(s-i)$ constantes distinctes, il en serait de même des coëfficients l de (4) et par suite de $u \equiv \Sigma \varrho l$. – Pour qu'une solution particulière quelconque de (1), soit $y = Y(x)$, vérifie l'équation (4), il faut et il suffit qu'on ait [$\bar{x}_0$ désignant une valeur numérique, Y_0, Y'_0 les valeurs $Y(\bar{x}_0)$, $\frac{dY}{dx}(\bar{x}_0)$]:

$$Y'_0 = g\left(Y_0, \bar{x}_0, a_1, a_2, \dots a_s\right),$$

d'où une relation et une seule entre les $a_1, \dots a_s$, résoluble par rapport à une quelconque de ces constantes, soit a_s; la fonction u correspondante dépend de $(s-1)$ constantes distinctes $a_1, \dots a_{s-1}$. D'autre part, elle vérifie identiquement la relation:

$$(5) \qquad 0 = G\left[Y', Y, x, u, u', u'', \dots u^{(s-1)}\right] \equiv K_1\left(x, u, u', \dots u^{(s-1)}\right),$$

relation qui n'est pas une identité, si la solution $Y(x)$ n'est pas

choisie d'une manière exceptionnelle. La dérivée $u^{(s-1)}$ de u doit donc figurer dans G. C. Q. F. D.

Observons que la relation (5) ne saurait se réduire à une identité que pour un nombre fini de solutions $y(x)$ de (1). Mettons en effet cette relation sous forme entière par rapport à $y, y', u, u', \ldots u^{(s-1)}$: les coëfficients de cette relation sont des polynômes en y, y', soit $\gamma(y', y, x)$, qui pour x quelconque n'ont pas de facteur commun $h(y', y, x)$[1], et les solutions $y(x)$ de (1) qui annulent tous ces coëfficients, vérifient au moins deux équations distinctes: $\gamma_k(y', y, x) = 0$, $\gamma_l(y', y, x) = 0$.

Ces préliminaires établis, nous allons voir que s est nécessairement égal à 1, si l'intégrale générale $y(x)$ de (1) n'acquiert autour des points critiques mobiles que n déterminations et est une fonction semi-transcendante des constantes.

Supposons en effet $s > 1$ et considérons les équations (4) qui correspondent à une solution $u(x)$ quelconque de l'équation (5), [où $Y(x)$ est une solution de (1) choisie une fois pour toutes]. Si on remplace, dans les l, $u^{(s-1)}$ en fonction de $x, u, u', \ldots u^{(s-1)}$ d'après (5), ces équations (4) s'écrivent :

$$(4)' \qquad 0 = \sum l_1 [x, u, u', \ldots u^{(s-2)}] y'^i y^j \equiv G_1 [y', y, x, u, u', \ldots u^{(s-2)}]$$

avec

$$(5)' \qquad K_1 [x, u, u', \ldots u^{(s-1)}] = 0, \quad [(s-1) > 0, \quad u \equiv \sum \rho l_1],$$

les l_1 étant algébriques en $u, u', \ldots u^{s-2}$ et K_1 en $u, u', \ldots u^{s-1}$.

Si $(s-1)$ est plus grand que 1, raisonnons sur le

---

(1) Autrement, $h(y', y, x) = 0$ serait une conséquence de l'équation (4) en y', y, qui ne serait plus indécomposable.

système (4)', (5)' comme sur le système (4), (5). Les solutions $y(x)$ de (4)', (5)' coïncident avec les solutions de (1) et G_1 dépend explicitement de $u^{(s-2)}$. Soit $y = Y_1(x)$ une solution de (1) telle que $G_1[Y', Y, x, u, u', \dots u^{(s-2)}]$ ou $K_2[x, u, u' \dots u^{(s-2)}]$ ne soit pas identiquement nul, et considérons les équations (4)' qui correspondent à une solution $u(x)$ quelconque de l'équation $K_2 = 0$; nous substituons ainsi au système (4)', (5)' un système (4)'', (5)'' où s est encore diminué d'une unité, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un système

$$(6) \qquad 0 = \sum L(x, u)\, y'^i y^j \equiv \Gamma(y', y, x, u)$$

$$(7) \qquad K(x, u, u') = 0, \qquad [u = \sum \varsigma L],$$

où les L sont algébriques en u et K algébrique en u, u'.(1) L'intégrale générale de (1) s'obtient en remplaçant, dans les L, u par la solution générale $u = \chi(x, u_0)$ de (7) et en intégrant l'équation (6). Après cette substitution, les points singuliers $x = \xi'$ de (6) indépendants de y et de u_0 font nécessairement partie des points singuliers fixes $x = \xi$ de (1) (voir le raisonnement de la page 467); par suite $u(x) \equiv \sum \varsigma l$ n'a pas de points singuliers fixes $x = \xi''$ (indépendants de u_0) en dehors des points ξ. Les points singuliers non polaires des coëfficients de K et des L font donc nécessairement partie des points ξ attachés à l'équation (1).

Je vais montrer maintenant que la solution générale $u(x) = \chi(x, u_0)$ de (7) ne prend que n valeurs au plus autour des points critiques mobiles.

Joignons en effet, dans le plan des x, les points ξ par des coupures, et supposons que, x partant de x_0 pour y revenir

---

(1) Les coëfficients de K et des L ne s'expriment plus algébriquement en fonction des coëfficients de F et de leurs dérivées, mais renferment en outre $(s-1)$ solutions particulières de (1), $y = Y(x)$, arbitrairement choisies (et leurs dérivées premières).

sur $(n+1)$ lacets différents C_k (qui ne franchissent pas les coupures), la solution $u = U(x)$ de (1) acquière, au point x_0, n valeurs $U_1^0, \dots U_n^0$ distinctes entre elles et distinctes de la valeur initiale U^0. Aux $(n+1)$ fonctions $U(x)$, $U_1(x), \dots U_n(x)$ ainsi définies dans le voisinage de x_0 correspondent $(n+1)$ équations (6) distinctes:

(8) $$\Gamma(y', y, x, U) = 0, \quad \Gamma(y', y, x, U_1) = 0, \dots\dots \Gamma(y', y, x, U_n) = 0;$$

car si deux de ces équations se confondaient [pour $u = U_k$, $u = U_l$ par exemple], leurs coëfficients $L(x, U_k)$ et $L(x, U_l)$ se confondraient aussi et par suite les deux fonctions $U_k \equiv \Sigma \varrho L(x, U_k)$, $U_l = \Sigma \varrho L(x, U_l)$. Il n'existe donc qu'un nombre fini de solutions $y = Y(x)$ communes à deux des équations (8).

Ceci posé, soit $y(x)$ une solution quelconque de la première équation (8) [telle qu'aucune de ses n branches ne soit une telle solution exceptionnelle $Y(x)$]. Si nous parcourons les $(n+1)$ lacets C_k, les $(n+1)$ branches $y(x)$ ainsi définies dans le voisinage de x_0 ne sont pas toutes distinctes; $y_k(x)$ et $y_l(x)$, par exemple, coïncident et vérifient les deux équations (8) qui correspondent à U_k et à U_l, ce qui est contre l'hypothèse.

L'intégrale générale $u(x)$ de l'équation du premier ordre (7) acquiert donc au plus n déterminations autour des points critiques mobiles; la fonction $u = \chi(x, u_0)$ est algébrique en u_0. D'où ce théorème:

Théorème – Quand l'intégrale $y(x)$ de (1) n'acquiert que n valeurs autour des points critiques mobiles et est une fonction semi-transcendante des constantes, elle vérifie une équation:

(9) $$0 = \sum M(x, u_0) y^i y'^j \equiv \Delta(y', y, x, u_0),$$

où Δ est algébrique en y', y, u_0.

Je dis de plus que le système (6), (7) est unique. Soit en effet x_0 une valeur de x distincte des ξ et $y(x)$ une solution quelconque de (1) holomorphe pour $x = x_0$; admettons que cette solution

vérifie à la fois le système (6),(7), et un autre système :

(6)' $$0 = \sum L'(x, v) y'^i y^j \equiv \Gamma'(y', y, x, v)$$

(7)' $$K'(x, v, v') = 0 ; \qquad [v \equiv \sum \rho L'] ,$$

système qui entraîne l'équation :

(9)' $$0 = \sum M'(x, v_0) y'^i y^j \equiv \Delta'(y', y, x, v_0) .$$

Soit $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$ les valeurs de u_0 et de v_0 pour lesquelles la solution $y(x)$ vérifie les équations (9) et (9)'. Si pour $u_0 = \bar{u}_0$, $v_0 = \bar{v}_0$, les deux équations (9) et (9)' ne coïncident pas, on en peut tirer y et y' en fonction algébrique de $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$: l'intégrale générale $y(x)$ de (1) est donc une fonction algébrique des deux constantes $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$ (qui sont alors indépendantes). Pour que $y(x)$ soit une fonction semi-transcendante des constantes, il faut donc que (pour $u_0 = \bar{u}_0$, $v_0 = \bar{v}_0$) les équations (9) et (9)' coïncident, par suite que u ou $\sum \rho M(x, u_0)$ et v ou $\sum \rho M'(x, v_0)$ coïncident pour $u_0 = \bar{u}_0$, $v_0 = \bar{v}_0$: les deux équations (7) et (7)' se confondent donc quand on fait $v = u$, et comme on a ensuite $M(x_0, u_0) \equiv M'(x_0, u_0)$ quels que soient x_0, u_0, les deux systèmes (6),(7) et (6)',(7)' ne sont pas distincts.

Nous sommes dès lors en état de montrer que, dans le système (4),(3), s est nécessairement égal à 1. En effet, nous avons substitué au système (4),(3), le système (6),(7), en introduisant $(s-1)$ solutions particulières $y = Y(x)$ de (1), qui vérifient l'équation (9) pour n'importe quelle valeur de u_0. Si nous faisons varier une de ces solutions, il est impossible que le système (6),(7) reste le même : autrement, les deux équations (9) qui correspondent à deux valeurs quelconques de u_0 ne seraient pas distinctes. Comme d'autre part il ne saurait exister qu'un système (6),(7), s est égal à 1. C. Q. F. D.

Dans le cas qui nous occupe, l'intégrale de (1) se laisse donc définir par le système :

(6) $$0 = \sum L(x, u) y'^i y^j \equiv \Gamma(y', y, x, u)$$

(7) $$K(x, u, u') = 0 , \qquad [u \equiv \sum \rho L]$$

et ce système est unique [une fois choisies les fonctions $\rho(x)$], du moment que l'équation (6) en y, y', et l'équation (7) en u, u' sont irréductibles.

Si nous écrivons l'équation (6) sous la forme

(6)' $$0 = \Sigma = \lambda(x)\, y^i y'^j ,$$

et si nous exprimons que toute solution de (6) est solution de (1), le système (A) de relations différentielles algébriques ainsi obtenu entre les λ, $\frac{d\lambda}{dx}$ et les coëfficients de (1) doit définir les λ en fonction algébrique d'une constante et d'une seule ; autrement dit, le système (A) doit être équivalent à un système :

$$\lambda_2 = g_2(\lambda_1, x), \quad \lambda_3 = g_3(\lambda_1, x), \ldots\ldots\ldots \lambda_r = g_r(\lambda_1, x).$$

avec $$\lambda'_1 = g_1(\lambda_1, x),$$

les g étant des fonctions algébriques de λ_1, des coëfficients de (1) et de leurs dérivées. L'équation $\lambda'_1 = g_1(\lambda_1, x)$ ou bien s'intègre algébriquement, ou bien se ramène algébriquement à une des formes :

$$\frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}} \qquad h(x)\,dx, \qquad \frac{dW}{dx} = \alpha + \beta W + \gamma W^2$$

k^2 désignant une constante numérique, et h, α, β, γ des fonctions algébriques de (1) [et de leurs dérivées]. L'intégrale de (1) se laisse donc définir par une relation :

(6)' $$\Sigma\, L(x, W)\, y^i y'^j = 0 ,$$

où les L sont des fonctions algébriques de W et où W désigne soit une constante arbitraire, soit l'intégrale d'une des deux équations :

(7)' $$\frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}} = h(x)\,dx, \qquad \frac{dW}{dx} = \alpha + \beta W + \gamma W^2 ,$$

les coëfficients $b(x)$ des fonctions algébriques L de W s'expriment algébriquement [ainsi que h, α, β, γ] à l'aide des coëfficients de (1) et de leurs dérivées.

D'autre part, l'équation (6)' [où W est remplacé par une constante ou par une intégrale $W(x)$ de l'équation (7)] est une équation dont l'intégrale $y(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs (au plus égal à n) autour des points critiques mobiles [variables avec la constante y_0]. Si le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales

est, pour cette équation, supérieur à l'unité, $y(x)$ est une fonction algébrique de y_0, des coëfficients $\lambda(x) \equiv L[x, W(x)]$ de $(6)'$ et de leurs dérivées; y est alors une fonction algébrique de y_0, W_0; pour que l'intégrale $y(x)$ de (1) soit une fonction semi-transcendante des constantes, il faut donc que ϖ soit égal à 0 ou à 1. Si ϖ est nul, on ramène algébriquement l'équation (G) à une équation de Riccati:

$$\frac{dz}{dx} = A + Bz + Cz^2,$$

par une transformation:

$$z = (y', y, x)$$

où R est une fonction rationnelle de y', y, dont les coëfficients ainsi que A, B, C, dépendent algébriquement des coëfficients $\lambda(x)$ de $(6)'$ et de leurs dérivées. — Si ϖ est égal à 1, nous ramenons algébriquement l'équation $(6)'$ à la forme

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}} = H\,dx,$$

où H et k_1^2 sont des fonctions algébriques de W des coëfficients de (1) et de leurs dérivées: de plus k_1^2 doit être indépendants de x. Si la fonction $k_1^2 = r(w, x)$ ne dépend pas de w, k^2 est une constante numérique; si elle dépend de w, l'égalité $r(w, x) = C^{te}$ définit l'intégrale de $(7)'$. D'où ce théorème:

Théorème. — Quand l'intégrale $y(x)$ de (1) ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles et est une fonction semi-transcendante des constantes, l'équation (1) se ramène algébriquement à un des systèmes suivants.

$$(S_1) \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = -z^2 + A(w, x) \\ \dfrac{dW}{dx} = -W^2 + \alpha(x), \text{ ou } \dfrac{dW}{dx} = h(x)\sqrt{(1-W)^2(1-k^2W^2)} \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = H(x, W)\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)} \\ \dfrac{dW}{dx} = -W^2 + \alpha(x) \text{ ou } \dfrac{dW}{dx} = h(x)\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)} \end{cases}$$

$$(S_3) \quad \left\{ \dfrac{dz}{dx} = -z^2 + A(C, x) \right.$$

$$(S_4) \quad \left\{ \dfrac{dz}{dx} = H(x, C)\sqrt{(1-z^2)(1-Cz^2)} \right. ,$$

où h, h_1 sont des constantes numériques, C une constante arbitraire, A, H des fonctions algébriques de W (ou de C) et des coëfficients de (1) (et de leurs dérivées), h, α des fonctions algébriques des coëfficients de (1) et de leurs dérivées. D'une façon précise, y est défini à l'aide de z par une relation:

(10) $$D(y, z, W, x) = 0,$$

où D est algébrique en y, z, w, ses coëfficients se calculant algébriquement à l'aide de ceux de (1) et de leurs dérivées [W doit être remplacé par C pour les systèmes S_3, S_4].

- Supposons en particulier que x ne figure pas explicitement dans l'équation (1); le système différentiel qui définit les coëfficients $\lambda(x)$ de la relation (6), ne renferme pas non plus <u>x explicitement</u> l'intégrale $\lambda_1(x)$ de l'équation

$$\lambda'_1 = g_1(\lambda_1)$$

est, soit une constante, soit une fonction algébrique de $x + c$, ou de e^{gx+c}, ou de $sn_{k^2} g(x+C)$, [g, k^2 étant numériques et C désignant une constante arbitraire]. L'intégrale de (1) vérifie donc une relation:

(10)' $$D(y, z, W) = 0$$

algébrique en y, z, W, où W représente C, ou $x+C$, ou e^{gx+C}, ou $sn_{k^2} g(x+C)$, et où z est l'intégrale d'une des trois équations:

S' $$\frac{dz}{dx} = -z^2 + A(W),$$

S'' $$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}} = H(W)\,dx,$$

S''' $$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-Cz^2)}} = H(C)\,dx.$$

Inversement, si une fonction $y(x)$ se déduit algébriquement de l'intégrale générale d'un des systèmes (S_1), (S_4), (S'), ... (S''') elle vérifie une équation du second ordre :

$$F(y'', y', y, x) = 0,$$

algébrique en y'', y', y. Mais la fonction $y(x)$ ne prend-elle qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles? Cette fonction $y(x)$ est de la forme $\Psi(x, y_0, w_0, \bar{x}_0)$ où Ψ est algébrique en y_0, elle n'acquiert donc qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques variables avec y_0; mais afin elle n'acquière qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques variables avec w_0, il faut que (pour les systèmes S_1, S_3, S') l'intégrale $z(x)$ de l'équation de Riccati en z ne prenne que ν valeurs autour des points singuliers $x = \xi$ de $A[W(x, w_0, \bar{x}_0), x]$ variables avec w_0 ; pour les systèmes (S_2), (S_4), (S'') il faut que l'intégrale $\int H[w(x, w_0), x]dx$ n'admette qu'un nombre fini de branches qui se permutent autour des points critiques $x = \xi$ de $H[W(x, W_0), x]$ variables avec W_0, et qui ne soient pas congruentes par rapport aux périodes de la différentielle elliptique $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}}$

En particulier, pour le système (S'), il faut que l'intégrale $z(x)$ de (S') soit une fonction à un nombre fini de branches; pour l'équation (S'') il faut que les périodes de l'intégrale $\int H[w(x)]dx$ multipliées par un certain entier ν soient toutes des périodes de la différentielle elliptique $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}}$.

Ces conditions remplies, l'intégrale $y(x)$ ne prend effectivement qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles. Pour qu'elle soit une fonction semi-transcendante des constantes, il faut de plus que l'intégrale $z(x)$ du système (S_1), [ou (S_2), ... ou (S'')], soit $z = X(x, z_0, W_0, \bar{x}_0)$, soit une fonction transcendante de W_0.

L'intégrale $z(x)$ de l'équation (S''') est la fonction $sn_{k^2}[H(k^2)x + C']$, k^2 et C' désignant deux constantes arbitraires; z est toujours une fonction transcendante de k^2.

Corollaires du théorème précédent.

Précisons, sur quelques points, les résultats que nous venons d'obtenir: pour toute valeur de x, les coëfficients $\lambda(x) \equiv L[x, w(x)]$ de (6) et leurs dérivées $\lambda'(x)$ s'expriment algébriquement en fonction d'un des λ, ou encore en fonction de $u \equiv \sum \varrho(x)\lambda$, les fonctions $\varrho(x)$ étant arbitrairement choisies. Les λ, λ' sont donc des fonctions rationnelles de u, $v \equiv \sum(\sigma\lambda + \tau\lambda')$, et u, v vérifient une certaine relation algébrique: $B(u, v, x) = 0$. Je dis qu'on peut prendre pour v la fonction $u' = \sum(\varrho\lambda' + \varrho'\lambda)$![1] tout d'abord, les λ sont rationnels en u, u'; car si à u, u' correspondent deux systèmes λ, soit les systèmes λ et λ_1, on a (quel que soit u):

$$u' = \sum \varrho\lambda'(u) + \varrho'\lambda(u) = \sum \varrho\lambda_1'(u) + \varrho'\lambda_1(u),$$

les λ, λ' et les λ_1, λ_1' étant deux branches du même système de fonctions algébriques λ, λ' de u. Mais cette dernière égalité est impossible si pour $x = x_0$, les valeurs $\varrho(x_0)$ ayant été choisies, les valeurs $\varrho'(x_0)$ ont été prises au hasard; les λ sont donc rationnels en u, u', $\lambda = L(u', u, x)$, et comme on a: $\lambda' = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial u}u' + \frac{\partial L}{\partial u'}u'' \equiv L'(u' u, x)$, on voit que les λ' sont aussi rationnels en u, u'.

Nous pouvons, d'après cela, écrire le système (6), (7) sous la forme:

$$(6)'' \qquad 0 = \sum L(u', u, x) y^i y^j \equiv \Gamma(y', y, x, u, u')$$

$$(7)'' \qquad K(x, u, u') = 0, \qquad [u \equiv \sum \varrho L],$$

les L étant rationnels en u, u', soit

$$L = u'^{q-1} B_{q-1}(u, x) + \dots + u' B_1(u, x) + B_0;$$

les B désignent des fractions rationnelles en u dont un des coëfficients est égal à 1. Enfin un des L est égal à l'unité. Le polynôme

---

[1] Le raisonnement est le même que celui que nous avons déjà employé dans des questions analogues (voir pages 86-87).

K en u', u est irréductible de degré q, en u', et un de ses coëfficients est égal à 1. Dans ces conditions, si on exprime que l'équation du 2ème ordre en y obtenue en éliminant u dans le système (6)'', (7)'', coïncide avec l'équation (1), les relations ainsi obtenues doivent définir un système (6)'', (7)'' et un seul. Les coëfficients de $K(u', u; x)$ et des $L(u', u, x)$ doivent donc se calculer rationnellement en fonction des coëfficients de (1) et de leurs dérivées, [une fois choisies les fonctions $\rho_i(x)$, par exemple $\rho_i \equiv a_i x + b_i$].

Les égalités (6)'', (7)'' définissent u, u' [pour une valeur quelconque de x] en fonction algébrique de y', y: à toute solution $y(x)$ de (1) correspond au moins une solution $u(x)$ de (7)'' donnée par une branche de ces fonctions $u(y', y, x)$, $u'(y', y, x)$, soit $u = U(y', y, x)$, $u' = U'(y', y, x)$ je dis que U et U' sont des fonctions rationnelles du point (y'', y', y) de la surface $F = 0$. En effet, soit U_1, U_1' et U_2, U_2' deux déterminations de U, U' telles que (x restant fixe) on revienne au point (y'', y', y) de $F = 0$ avec la détermination (U_2, U_2') après en être parti avec la détermination (U_1, U_1'): si on remplace y par une solution quelconque $y(x)$ de (1), y' par $\frac{dy}{dx}$, y'' par $\frac{d^2y}{dx^2}$, (U_1, U_1') et (U_2, U_2') deviennent deux couples distincts de fonctions de x, soit $[\bar{U}_1, \bar{U}_1']$ et $[\bar{U}_2, \bar{U}_2']$, et la solution $y(x)$ vérifie les deux équations obtenues en substituant dans (6)'' à (u, u') les couples $(\bar{U}_1, \bar{U}_1')$ et $[\bar{U}_2, \bar{U}_2']$: si ces deux équations sont distinctes, $y(x)$ est une fonction algébrique de U_1, U_2, soit $y = \chi(U_1, U_2, x)$, et comme U_1, U_2 renferment algébriquement la constante dont ils dépendent, y est une fonction algébrique des deux constantes d'intégration. Si au contraire, les deux équations considérées se confondent, les égalités $\bar{U}_1 \equiv \Sigma \rho L[x, \bar{U}_1, \bar{U}_2]$, $\bar{U}_2 \equiv \Sigma \rho L[x, \bar{U}_2, \bar{U}_2']$ montrent que la coïncidence des L entraîne celle de $\bar{U}_1, \bar{U}_2$, c'est-à-dire qu'on a identiquement:[1]

$$U_1(y'', y', y, x) \equiv U_2(y'', y', y, x),$$

---

[1] La relation $U_1(y'', y', y, x) \equiv U_2(y'', y', y, x)$ a lieu

(si y'', y', y, x vérifient la relation $F=0$) La fonction $U(y'', y', y, x)$, doit donc être rationnelle en y'', y', y : mais U' est égal à $\frac{du}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial y'} y'' + \frac{\partial U}{\partial y''} y'''$ et par suite est rationnel en y'', y', y en même temps que U. C. Q. F. D.

Considérons enfin la relation entre les constantes intégrales attachées à l'équation (7)", soit :

(12) $$\sigma \; (c, c_1) = 0$$

cette relation. L'équation (7)" admet deux intégrales premières :

$$c = r(u', u, x), \qquad c_1 = r_1 \; (u', u, x),$$

liées par la relation (12) et où r, r_1, sont rationnels en u', u : toute autre intégrale première de (7)" rationnelle en u, u' s'obtient par une combinaison rationnelle de c, c_1. Si nous remplaçons u, u' en fonction rationnelle de y'', y', y, [$u = U(y'', y', y, x)$, $u' = U'(y'', y', y, x)$], r et r_1' deviennent deux intégrales premières de (1) rationnelles en y'', y', y. Je dis que toutes les intégrales premières de (1) rationnelles en y'', y', y sont des combinaisons rationnelles de r, r_1, en effet, soit $C = R(y'', y', y, x)$ une telle intégrale première ; en exprimant y'' en fonction rationnelle de y, y', u, u', on met R sous la forme :

$$C = R_1 \; (y', y, u', u, x)$$

où R désigne un polynôme en y' de degré $(\mu - 1)$ [si μ est le degré de (6)" en y'] dont les coëfficients sont rationnels en y, u', u. D'autre part R_1 [fonction algébrique de y, u quand on tient compte de (6)", (7)"] doit se réduire à une simple fonction de u : autrement, les égalités $c = r(u, x)$, $C = \overline{R}_1 \; (y, u, x)$; définiraient y en fonction algébrique des deux constantes C, c. Pour des valeurs quelconques de u', u, x [vérifiant (7)"], $R_1(y', y)$ doit être indépendant du point $(y' \; y)$ de la

---

identiquement quand on remplace y par une solution quelconque $y(x)$ de (1), y' et y'' par ses dérivées ; on a par suite :

$$U_1(y''_0, y'_0, y_0, x_0) \equiv U_2(y''_0, y'_0, y_0, x_0),$$

quels que soient y''_0, y'_0, y_0, x_0 [vérifiant $F(y''_0, y'_0, y_0, x_0) = 0$].

courbe (6)', mais l'égalité $R_1 - \gamma(u', u, x) = 0$, de degré $\mu-1$ en y', ne peut être conséquence de (6)'' que si tous les coëfficients de $y'^{\mu-1} \dots y'$ sont nuls, et que si de plus, le terme de R_1 indépendant de y' coïncide identiquement avec $\gamma(u', u, x)$. On a donc :

$$C = \gamma(u', u, x),$$

γ étant rationnel en u', u et par suite C est rationnel en c, c_1. C.Q.F.D.

Ces remarques entraînent des conséquences que j'énonce rapidement et qui servent à reconnaître si une équation (1) donnée rentre dans la classe étudiée.

Tout d'abord, supposons que le genre ϖ_1 de la relation $\sigma(c, c_1)$ attachée à (7)'' soit plus grand que 1. On sait calculer algébriquement un type de toutes les courbes $S(c, c_1)$ de genre plus grand que 1 dont la surface donnée $F = 0$ est la transformée rationnelle,[1] ainsi que toutes les transformations rationnelles de passage. On sait donc calculer, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, sur une équation (1) donnée, toutes les intégrales premières $c = r(y'', y', y, x)$, $c_1 = r_1(y'', y', y, x)$, rationnelles en y'', y', y, et liées par une relation algébrique inconnue $\sigma(c, c_1) = 0$, de genre plus grand que 1.

Si ϖ_1 est égal à 1, il existe une intégrale première de (1) qui est définie par une différentielle totale :

$$\int P(y'', y', y, x)\, dy + Q(y'', y', y, x)\, dy' + R(y'', y', y, x)\, dx = C^{te},$$

où $J = \int P dy + Q dy'$ est une intégrale de première espèce attachée (pour

---

[1] Pour une valeur numérique quelconque donnée à y'', la courbe $F(\bar{y}'', y', y, \bar{x}) = 0$ est une transformée rationnelle de la courbe $\sigma(c, c_1) = 0$, on sait calculer [voir page 115] un type de toutes les courbes $\sigma(c, c_1) = 0$, (indépendantes de $\bar{y}''$, $\bar{x}$) dont la courbe $F = 0$ est la transformée rationnelle, ainsi que toutes les transformations de passage. De là résulte aussitôt la proposition du texte.

x quelconque) à la surface $F=0$, et où R est rationnel en y'', y', y. On sait vérifier algébriquement si cette condition est remplie. De plus, J ne doit avoir que deux périodes.

Soit maintenant p_1 le genre (pour x quelconque) de la courbe (7)'' en u, u' et si p_1 est plus grand que 1, soit $\int N(u', u, x)\,dy$, $\int N_1(u', u, x)\,du$, deux intégrales abéliennes de première espèce attachées à (7)'' Pour une valeur numérique quelconque laissée à x, on a:

$$N\,du = \frac{P(y'',y',y,x)\,dy + Q\,(y'',y',y,x)\,dy'}{F'_{y'}}$$

$$N_1\,du = \frac{P_1\,(y'',y',y,x)\,dy + Q\,(y'',y',y,x)\,dy'}{F'_{y'}},$$

les deux seconds membres étant deux différentielles totales de première espèce attachées à F, et on a:

$$\text{(13)} \qquad \frac{P}{P_1} = \frac{N\,(u,x)}{N_1\,(u,x)}.$$

Comme P, P_1 sont des polynômes de degré $(m-3)$ en y'', y', y [m désignant le degré de la surface $F\,(y'',y',y,x)=0$], on connaît une limite supérieure du degré en y', y de la relation obtenue en éliminant y'' entre $F=0$ et $\frac{P}{P_1}=v$, d'où une limite supérieure du degré en y', y de la relation (6)''. Il suffit donc d'essayer si une relation

$$\Sigma\,\lambda_i\,(x)\,y^i\,y'^j = 0,$$

de degré connu en y', y, définit l'intégrale de (1); les λ_i, dont un est égal à l'unité doivent dépendre d'une constante et d'une seule. On sait reconnaître algébriquement s'il en est ainsi: l'équation (1) est alors ramenée algébriquement à un système (6)'', (7)''. Quand on se donne le nombre n des valeurs de $y\,(x)$ qui se permutent autour des points critiques mobiles, on sait ensuite reconnaître si le système (6)'', (7)'' est réductible algébriquement à un des systèmes S_1, S_2, S_3 ou S_4.

Les remarques précédentes n'indiquent rien sur les cas où on a à la fois $p_1 \leqslant 1$, $\varpi_1 = 0$.

Observons enfin que, si l'équation est de l'espèce étudiée, la surface $F(y'', y', y, \bar{x}) = 0$ possède un faisceau linéaire de courbes de genre zéro ou un, à savoir le faisceau défini par l'intersection de $F=0$ avec la famille de surfaces: $c = r\ (y'', y', y, \bar{x})$.

Equations à points critiques fixes dont l'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes.

Insistons sur le cas où le nombre n des branches de $y(x)$ permutables autour des points critiques mobiles est égal à l'unité. Dans ce cas, l'équation (7)' doit avoir ses points critiques fixes, et il en est de même de l'équation (6)" où on remplace u par une solution de (7)". Les deux nombres p_1 et ϖ_1 sont égaux. Le seul cas qui échappe aux remarques de la page 481, est le cas $p_1 = \varpi_1 = 0$.

L'intégrale de (1)

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \varphi\ (\bar{x}, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) \\ y' &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\ (\bar{x}, y''_0, y'_0\ y_0, \bar{x}_0) \\ y'' &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\ (\bar{x}, y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) \end{aligned}\right.$$

définit une correspondance biuniforme entre les surfaces

$$F(y'', y', y, \bar{x}) = 0, \qquad F_0 \equiv F(y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0) = 0;$$

cette correspondance vérifie la relation:

$$r\,(y'', y', y, \bar{x}) = r\,(y''_0, y'_0, y_0, \bar{x}_0)$$

et par suite conserve le faisceau C des courbes unicursales ou de genre 1 (définie par $F=0$, $r=c$.)

En particulier, quand x ne figure pas dans (1) explicitement, les égalités (14) définissent un groupe continu de transformations biuniformes de la surface $F=0$ en elle-même groupe qui dépend d'un paramètre arbitraire $(x - x_0)$: il existe sur $F=0$ un faisceau de courbes de genre zéro ou 1,

soit $\gamma = \varrho(y'', y', y)$, et le groupe transforme chaque courbe de ce faisceau en une courbe du faisceau: $\gamma_0 = \varrho(y''_0, y'_0, y_0)$, γ_0 et γ ayant en général des valeurs différentes.

C'est dans cette catégorie d'équations que rentrent les exemples de la première leçon (pages 13-14) notamment l'exemple:

$$\frac{yy''}{y'^2} = 1 + 2\sqrt{\frac{-y}{y'}}.$$

équation qui a pour intégrale:

$$y = y_0\, e^{\dfrac{x-x_0}{(x-x_0)\left[\frac{y_0 y''_0}{2y'^2_0} - \frac{1}{2}\right] + \frac{y_0}{y'_0}}}$$

On peut faire une étude complète des transformations biuniformes des surfaces algébriques, dans l'hypothèse où elles conservent une famille de courbes algébriques.[1] Mais je ne développerai pas ici ces considérations.

J'énoncerai enfin un théorème important relatif aux équations:

(1)' $$y'' = f(y', y)$$

où f est une fraction rationnelle en y', y (indépendante de x). On sait former toutes les équations (1)' à points critiques fixes dont l'intégrale $y(x)$ est une fonction semi-transcendante ou algébrique des deux constantes: soit (E) ces équations. Proposons nous maintenant de déterminer toutes les équations (1)' à points critiques fixes: en poussant suffisamment loin l'étude des conditions nécessaires pour que (1)' n'ait pas de points critiques mobiles, on voit que toutes

---

[1] Voir les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (Mars. 1896).

les équations (1)' répondant à ces conditions rentrent nécessairement dans la classe des équations (E). Quand une équation (1)' a ses points critiques fixes, son intégrale $y(x)$ ne peut être une fonction transcendante des deux constantes, mais seulement une fonction algébrique ou semi-transcendante des constantes.

Je me borne à indiquer ici ce résultat dont la démonstration est longue et difficile[1]

Remarque sur les équations dont l'intégrale $y(x)$ possède une nombre fini de branches.

Soit $F(y', y, x) = 0$ une équation du premier ordre (algébrique en y', y) dont l'intégrale $y(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs $y_1, \ldots\ldots y_n$ autour des points critiques mobiles. Nous avons vu que les n combinaisons symétriques

$$R_{n-1} = y_1 + \cdots + y_n, \quad \ldots\ldots \quad R_0 = y_1 y_2 \cdots y_n,$$

vérifient une équation différentielle $\frac{dR_i}{dx} = g_i(R_i, x)$, <u>algébrique</u> en $R_i, \frac{dR_i}{dx}$, dont les points critiques sont fixes. On pourrait être tenté de regarder ce théorème comme évident, et il est évident en effet que les R_i, dépendant d'une constante, doivent vérifier une équation différentielle du premier ordre, $\frac{dR_i}{dx} = g_i(R_i, x)$, et que cette équation a ses points critiques fixes; mais a priori, $g_i(R_i, x)$, pourrait être une fonction transcendante de R_i. C'est parce que $y(x)$, et par suite les R_i, renferment algébriquement la constante, que la proposition se trouve exacte.

---

[1] Voir les Comptes Rendus etc. (Juillet 1893) Voir aussi, à ce sujet, les résultats de M. Picard sur les équations (1)' dont l'intégrale est à apparence uniforme (Mémoires sur les fonctions algébriques de deux variables, p. 143-156) et deux publications de M. Mittag-Leffler (Comptes rendus.... Juillet 1893. Acta Mathematica 1894.

Quand on passe au second ordre, la proposition analogue est en défaut. Il est clair qu'elle subsiste si $y(x)$ renferme algébriquement les deux constantes, et par suite y se calcule algébriquement en fonction de l'intégrale $u(x)$ d'une équation $G(u'', u', u, x) = 0$, algébrique en u'', u', u et à points critiques fixes; y vérifie une relation :

$$y^n + \varrho_{n-1}(u'', u', u, x)\, y^{n-1} + \dots + \varrho_0 (u'', u', u, x) = 0,$$

où les ϱ sont rationnels en u'', u', u [voir page 241]. Quand l'intégrale $y(x)$ est une fonction semi-transcendante des constantes, chaque combinaison symétrique $y_1 + y_2 + \dots y_n = R_{n-1}$, etc, vérifie encore une équation différentielle du second ordre, à points critiques fixes. Mais cette équation est en général transcendante en R_i'', R_i', R_i.

Il nous suffit de le montrer sur un exemple. Considérons pour cela l'intégrale :

$$y = c\, e^{\sqrt{x+c}}$$

de l'équation

$$y^2 y'' = -2y'^3 + y y'^2,$$

intégrale qui peut s'écrire :

$$y = y_0\, e^{-\frac{y_0}{2y_0'}}\, e^{\sqrt{x - x_0 + \frac{y_0^2}{4y_0'^2}}}$$

et est une fonction semi-transcendante des constantes. On a ici :

$$R_0 = y_1 y_2 = c_1^2, \qquad R_1 = y_1 + y_2 = c_1 \left[e^{\sqrt{x+c}} + e^{-\sqrt{x+c}} \right].$$

Si nous éliminons c_1 entre $R_1(x)$, $R_1'(x)$, il vient :

$$\frac{R_1'}{R_1} = \frac{1}{2\sqrt{x+c}}\; \frac{e^{2\sqrt{x+c}} - 1}{e^{2\sqrt{x+c}} + 1}$$

et en posant $u = \frac{R_1'}{R_1}$ et différentiant :

$$u' \equiv \frac{R_1''}{R_1} - \left(\frac{R_1'}{R_1}\right)^2 = \frac{-u}{2(x+c)} + \frac{4e^{2\sqrt{x+c}}u^2}{(e^{2\sqrt{x+c}}-1)^2}.$$

Soit $\xi = \sqrt{x+c}$, $\eta = e^{2\sqrt{x+c}}$; en résolvant par rapport à ξ, η les équations

$$u = \frac{1}{2\xi}\,\frac{\eta+1}{\eta-1}, \qquad u' = \frac{-u}{2\xi^2} + \frac{4\eta u^2}{(\eta-1)^2},$$

on trouve :

(15) $$\eta = \frac{u' - 2u^2(u+1) \pm 2u\sqrt{(u^2-u')(1+2u)}}{u' + 2u^3}, \quad \xi = \frac{1}{2u}, \quad \frac{\eta-1}{\eta+1} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2u}{u^2-u'}}.$$

Si u', u vérifient une relation $u' = h(u,x)$ algébrique en u, ξ et η sont liés par une relation $H(\xi, \eta, x) = 0$ algébrique en ξ, η ; mais cela est impossible, puisque ξ, η vérifient la condition transcendante : $\eta = e^{2\xi}$. L'équation entre R_1, R_1', R_1'' est sous transcendante, et s'obtient en remplaçant, dans la relation $\eta = e^{2\xi}$, ξ et η par les fonctions algébriques $\xi(R_1'', R_1', R_1)$, $\eta(R_1'', R_1', R_1)$ que définissent les égalités (15) quand on y exprime u', u, en R_1'', R_1', R_1. Si on veut encore, y vérifie la relation

$$y^2 - Uy + V = 0$$

où $U(x), V(x)$ représentent l'intégrale générale du système transcendant à points critiques fixes :

$$\frac{dV}{dx} = 0, \qquad \frac{\pm\sqrt{U^2-4V}}{U'} = \log\left[U \pm \sqrt{U^2-4V}\right] - \frac{1}{2}\log V.$$

Ou bien enfin, y vérifie la relation :

$$y^2 - R_1 y + \frac{\eta^2 R_1^2}{(\eta^2+1)^2} = 0,$$

où η désigne la fonction algébrique de $R_1(x)$, $R_1'(x)$, $R_1''(x)$ définie par (15) et où R_1 vérifie l'équation différentielle transcendante :

$$\eta(R_1'', R_1', R_1) = e^{2\xi(R_1'', R_1', R_1)},$$

dont les points critiques sont fixes.

Cet exemple met nettement en évidence la particularité bien remarquable que je voulais signaler.

Vingt et unième Leçon.

De l'irréductibilité des équations différentielles — Équations du second ordre irréductibles et de la classe singulière dont les points critiques sont fixes.

Quand l'intégrale $y(x)$ d'une équation:

(1) $$F\ (y'', y', y, x) = 0,$$

algébrique en y'', y', y, ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles et est une fonction semi transcendante des constantes, nous venons de voir qu'elle s'exprime algébriquement en fonction de u, v, des coëfficients de (1) et de leurs dérivées, u et v vérifiant le système:

$$\frac{du}{dx} + u^2 + A\ (x, v) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2 u^2)}} = A\,(x, v)\, dx,$$

avec:

$$\frac{dv}{dx} + v^2 + B\,(x) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)}} = B(x)\,dx\ , \quad \text{ou}\ v = c;$$

A est une fonction algébrique de v dont les coëfficients, s'expriment algébriquement (ainsi que B) à l'aide des coëfficients de (1) et de leurs dérivées; c est une constante arbitraire, k^2 une constante numérique, k_1^2, une constante ou numérique ou arbitraire: dans ce dernier cas, v est constant et coïncide avec k^2.

Les transcendantes uniformes ou à n branches

va jouer un rôle essentiel dans notre définition de la réductibilité d'une équation (1). C'est ainsi que les deux équations (2) ne seront pas réductibles l'une à l'autre au sens que nous attacherons à ce mot: autrement dit nous distinguerons le point de vue de Legendre et celui d'Abel et de Jacobi qui se trouvent confondus dans l'étude la plus générale de la réduction. De même, considérons l'équation du troisième ordre que vérifie la fonction modulaire $y = \varphi(x)$, (voir page 8):

$$(3) \qquad \frac{y'''}{y'^3} - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^4} = \frac{1}{2(y-1)^2} + \frac{4}{9}\frac{1}{y^2} - \frac{41}{72}\frac{1}{y(y-1)} \equiv G(y);$$

si on prend x comme fonction et y comme variable, $x(y)$ vérifie l'équation:

$$(4) \qquad \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 = G(y);$$

si on pose $x' = \frac{1}{z^2(y)}$, puis $\frac{z'}{z} = t(y)$, t vérifie l'équation de Riccati:

$$\frac{dt}{dy} + t^2 + \frac{1}{2}G(y) = 0.$$

L'équation (3) est donc réductible, par quadratures, à une équation de Riccati et la fonction modulaire $\varphi(x)$ est réductible aux transcendantes engendrées par les équations du premier ordre, si on prend le mot réductible dans son sens le plus général. Au contraire, au sens que nous allons définir, la fonction $y=\varphi(x)$ est irréductible aux transcendantes qui dérivent du premier ordre.

Pour définir ces termes, réductibilité et irréductibilité d'une équation différentielle, je développerai une classification des transcendantes quelconques engendrées par les équations différentielles.

Sur une classification des transcendantes engendrées par les équations différentielles.

Regardons comme connues les seules fonctions algébriques [1] de x, et envisageons l'ensemble des transcendantes (τ) définies par une équation différentielle quelconque:

(1) $$F\ (x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$$

algébrique en $x,\ y,\ y', \ldots\ y^{(n)}$:

Une transcendante quelconque $y(x)$ n'appartient pas en général à l'ensemble (τ): c'est ainsi que la fonction $\Gamma(x)$, que la transcendante de M. Fredholm ne vérifient aucune équation (1) d'ordre si élevé qu'elle soit. Mais quand une fonction $y(x)$ appartient à l'ensemble (τ) il en est de même évidemment de ses dérivées successives: si $y_1(x)$, sont n fonctions τ, il en est de même de $y = R(x, y_1 \ldots y_n)$ où R est algébrique en $x, y_1 \ldots y_n$ et de $y_2[y_1(x)]$, etc. Si l'équation (1), algébrique en $y, y' \ldots y^{(n)}$, a ses coëfficients transcendants en x mais de l'espèce (τ), son intégrale générale est encore de l'espèce (τ).

Transcendantes du premier ordre.

Ces remarques faites, considérons une équation (1) quelconque du premier ordre [algébrique en y', y, x]:

(A) $$F\ (y', y, x) = 0.$$

---

[1] Il serait loisible de regarder, comme donnée toute autre classe de fonctions de x, par exemple la classe (T) formée par toutes fonctions de x qui sont des combinaisons algébriques de x, de la fonction $F(x)$ et d'un certain nombre de ses dérivées. Les équations (1) seraient alors toutes les équations $F = 0$ algébriques par rapport à y et ses dérivées, et dont les coëfficients appartiennent à la classe (T).

Toute transcendante $y(x)$ qui vérifie une telle équation sera dite du premier ordre et de la première classe: deux telles transcendantes seront dites réductibles l'une à l'autre si l'une s'exprime algébriquement en fonction de l'autre et de x. Deux équations (A), soit (A) et (A') seront dites réductibles l'une à l'autre si on passe de (A) à (A)' en changeant y en $R(y,x)$ où R est algébrique.[1] Il faut pour cela et il suffit qu'une des transcendantes définie par (A) et une des transcendantes définies par (A') soient réductibles l'une à l'autre.

D'une façon plus précise, je dirai que les transcendantes du premier ordre et de la première classe que je viens d'introduire sont de rang 1, et j'appellerai transcendante du premier ordre, de la première classe et de rang p toute combinaison algébrique de x et de p transcendantes $y_1, \ldots\ldots y_p$ de rang 1, [qui ne se confond pas avec une transcendante de rang $p-i$] Je représenterai par $\tau_{1,1,p}$ l'ensemble des transcendantes du premier ordre, de la première classe et de rang p, et par $\tau_{1,1}$ l'ensemble de toutes les transcendantes du premier ordre et de la première classe (en y comprenant, comme cas particulier, les fonctions algébriques).

Regardons maintenant comme connues les fonctions $\tau_{1,1}$, et soit:

$$(A_1) \qquad F_1(y', y, x) = 0,$$

une équation quelconque algébrique en y', y et dont les coëfficients sont des fonctions $\tau_{1,1}$. Toute solution $y(x)$ de (A_1) [qui ne se réduit pas à une fonction $\tau_{1,1}$] sera dite une transcendante du premier ordre de la seconde classe et de rang 1; soit $\tau_{1,2,1}$ une telle transcendante. Toute

[1] On pourrait encore introduire un changement algébrique de la variable: $x = \varrho(X)$.

combinaison algébrique de p transcendantes de l'ensemble $\tau_{1,2,1}$, [combinaison dont les coëfficients appartiennent à l'ensemble $\tau_{1,1}$] sera dite une transcendante $\tau_{1,2,p}$ du premier ordre, de la seconde classe et de rang p, pourvu du moins qu'elle ne se réduise ni à une fonction $\tau_{1,1}$ ni à une fonction $\tau_{1,2,p-1}$. Je représenterai par $\tau_{1,2}$, l'ensemble de toutes les transcendantes du premier ordre et de la seconde classe [en y comprenant comme cas particulier l'ensemble $\tau_{1,1}$].

Il est clair que la classification se laisse prolonger indéfiniment : une fois définies les fonctions $\tau_{1,i}$, on considère une équation quelconque

(A$_i$) $$F_i \ (y', y, x) = 0,$$

algébrique en y', y et dont les coëfficients sont des fonctions $\tau_{1,i}$. Toute solution $y(x)$ de (A$_i$) [pourvu qu'elle ne se réduise pas à une simple fonction $\tau_{1,i}$] est dite une transcendante du premier ordre, de la $(i+1)^e$ classe et de rang 1, soit $\tau_{1,i+1,1}$. Toute combinaison algébrique de p fonctions de l'ensemble $\tau_{1\ i+1,1}$ [combinaison dont les coëfficients sont des fonctions $\tau_{1,i}$] est dite une transcendante du premier ordre, de la $(i+1)^e$ classe et de rang p, soit $\tau_{1,i+1,}$ [pourvu du moins qu'elle ne se réduise ni à une fonction $\tau_{1,i}$ ni à une fonction $\tau_{1,i+1,p-1}$] L'ensemble des fonctions du premier ordre et de la $(i+1)^e$ classe sera représenté par $\tau_{1,i+1}$, [en y comprenant, comme cas particulier, les fonctions $\tau_{1,i}$].

n fonctions $\tau_{1,i+1}$ seront distinctes ou irréductibles entre elles s'il n'existe entre elles aucune relation algébrique dont les coëfficients soient des fonctions $\tau_{1,i}$. Toute équation (A$_i$) sera dite de la $(i+1)^e$ classe, et une équation irréductible de la $(i+1)^e$ classe si son

intégrale générale $y(x)$ n'est pas une fonction $\tau_{1,i}$. Deux équations (A_i) [de la $(i+1)^e$ classe] seront réductibles l'une à l'autre si on peut passer de l'une à l'autre en changeant y en $R(y,x)$, où R est algébrique en y et a comme coëfficients des fonctions $\tau_{1,i}$.

Nous représenterons par (τ_1) l'ensemble ainsi défini de toutes les fonctions du premier ordre $\tau_{1,1}, \tau_{1,2} \dots \tau_{1,j} \dots$

Dans une étude plus approfondie, cette classification devrait être poussée plus loin; c'est ainsi qu'il conviendrait de distinguer les fonctions $\tau_{1,2,1}$ en diverses espèces [espèces 1, 2, .. k . .], suivant que les coëfficients de (A_1) sont des fonctions $\tau_{1,1,1}$, ou $\tau_{1,1,2}$ ..... ou $\tau_{1,1,k}$ .... . Mais je me borne ici aux indications essentielles.

Transcendantes du second ordre

Considérons maintenant une équation du second ordre :

(B) $$F(y'', y', y, x) = 0$$

où F est une fonction algébrique en y'', y', y, dont les coëfficients sont des fonctions du premier ordre τ_1. Toute solution $y(x)$ de (1), qui ne se réduit pas à une fonction τ_1, est dite transcendante du second ordre, ou plus précisément transcendante du second ordre, de première classe, de première espèce et de rang 1, soit $\tau_{2,1,1,1}$. Toute combinaison algébrique de p fonctions $\tau_{2,1,1,1}$ [combinaison dont les coëfficients sont des fonctions τ_1] est dite de rang p et se représente par le symbole $\tau_{2,1,1,p}$ [pourvu du moins qu'elle ne coïncide pas avec une fonction $\tau_{2,1,1,p-1}$. L'ensemble de toutes les fonctions $\tau_{2,1,1,p}$ (où p est quelconque], autrement dit l'ensemble de toutes les fonctions du second ordre, de première classe et de première

espèce, est représenté par $\tau_{2,1,1}$.

En considérant une équation du premier ordre dont les coëfficients sont des fonctions $\tau_{2,1,1}$, on engendre les fonctions $\tau_{2,1,2,1}$ [du second ordre et de la première classe] d'espèce 2 et de rang 1; une combinaison algébrique [à coëfficients $\tau_{2,1,1}$] de p de ces fonctions $\tau_{2,1,2,1}$, sera une fonction $\tau_{2,1,2,p}$ et l'ensemble de toutes ces fonctions (pour p quelconque) sera représenté par $\tau_{2,1,2}$. Les équations du premier ordre à coëfficients $\tau_{2,1,2}$ engendrent les fonctions $\tau_{2,1,3,1}$, dont les combinaisons algébriques, à coëfficients $\tau_{2,1,2}$ engendrent les fonctions $\tau_{2,1,3,p}$. De l'ensemble $\tau_{2,1,3}$ on passe de même à l'ensemble $\tau_{2,1,4}$, et ainsi de suite. L'ensemble de toutes les fonctions $\tau_{2,1,j}$ [où j est quelconque] est représenté par $\tau_{2,1}$.

Les équations du second ordre:

(B$_1$) $$F_1 [y'', y', y, x] = 0.$$

dont les coëfficients sont des fonctions $\tau_{2,1}$, engendrent les fonctions du second ordre, de la seconde classe; d'espèce 1 et de rang 1, soit $\tau_{2,2,1,1}$; les combinaisons algébriques [à coëfficients $\tau_{2,1}$] de p fonctions $\tau_{2,2,1,1}$, engendrent les fonctions $\tau_{2,2,1,p}$, dont l'ensemble est représenté par $\tau_{2,2,1,p}$. Les équations du premier ordre, à coëfficients $\tau_{2,2,1}$, engendrent les fonctions $\tau_{2,2,2,1}$ dont les combinaisons algébriques engendrent $\tau_{2,2,2,p}$. De l'ensemble $\tau_{2,2,2}$ on passe de même à l'ensemble $\tau_{2,2,3}$ etc. L'ensemble de toutes les fonctions $\tau_{2,2,j}$ est représenté par $\tau_{2,2}$.

Les équations:

(B$_2$) $$F(y'', y', y, x) = 0,$$

à coëfficients $\tau_{2,2}$, engendrent de même les fonctions $\tau_{2,3,1,1}$, etc. On voit que les fonctions $\tau_{2,i,j,p}$ s'engendrent

ainsi de proche en proche, 2 désignant l'ordre, i la classe, j l'espèce, p le rang. L'ensemble (pour p quelconque) des fonctions $\tau_{2,i,j,p}$ est représenté par $\tau_{2,i,j}$; l'ensemble (pour j quelconque) des fonctions $\tau_{2,i,j}$ est représenté par $\tau_{2,i}$; l'ensemble (pour i quelconque) des fonctions $\tau_{2,i}$ est représenté par τ_2 et constitue toutes les transcendantes du second ordre.

Les transcendantes du troisième ordre les plus simples sont engendrées, de même par les équations

$$(C) \qquad F(y''', y'', y', y, x) = 0,$$

algébriques en y''', y'', y' et à coëfficients τ_2. Une telle équation est dite irréductible aux équations d'ordre inférieur si son intégrale générale $y(x)$ n'est pas une fonction τ_2. Cette définition s'applique en particulier aux équations (C) algébriques en x ou indépendantes de x. On peut montrer que, dans ce sens, la fonction modulaire n'est pas une fonction τ_2, et que l'équation (C) qu'elle vérifie [voir page 8] est par suite, irréductible. Mais je veux me limiter ici aux équations du second ordre algébriques en y'', y', y, x.

Équations du second ordre algébriques en y'', y', y, x. — Une telle équation est dite irréductible si son intégrale générale $y(x)$ n'est pas une fonction τ_1 ; elle est réductible au cas contraire. Établissons quelques propriétés des équations réductibles.

Soit $y(x)$ une solution de l'équation :

$$(1) \qquad F(y'', y', y, x) = 0 \,;$$

par hypothèse, $y(x)$ est une fonction $\tau_{1,i,k}$, c'est-à-dire une combinaison algébrique [à coëfficients $\tau_{1,i-1}$], soit $y = \varrho(u_1, \ldots\ldots u_k, x)$, de k fonctions $u_1 \ldots u_k$, qui vérifient

respectivement les k équations :

(2) $\quad f_1(u_1', u_1, x) = 0, \quad f_2(u_2', u_2, x) = 0, \quad \ldots\ldots f_k(u_k', u_k, x) = 0$

où f_j est un polynôme en u_j', u_j (irréductible pour x quelconque) et à coëfficients $\tau_{1,i-1}$.

Théorème Quand, dans $\varrho(u_1, \ldots u_k, x)$, on remplace $u_1 \ldots\ldots u_k$ par une solution <u>quelconque</u> de (2), la fonction $y(x)$ ainsi obtenue est une solution de (1).

En effet, exprimons que la fonction $y = \varrho[u_1(x) \ldots\ldots u_k(x), x]$ vérifie (1) ; nous formons un système de conditions algébriques entre les $u_j(x)$, leurs dérivées, les coëfficients de ϱ et leurs dérivées. Si ce système n'est pas une conséquence identique de (2), une au moins des fonctions u_j, soit u_k, s'exprime algébriquement en fonction des autres, des coëfficients des f_j, ϱ et de leurs dérivées ; autrement dit, u_k est une combinaison algébrique de $u_1 \ldots u_{k-1}$ à coëfficients $\tau_{1,i-1}$.[1] La fonction $y(x)$ ne serait donc pas de rang k, mais de rang $k-1$ au plus.

Corollaire — Si, de l'égalité $y = \varrho$, on tire u en fonction de y, on voit que y vérifie une équation différentielle

$$(1)' \qquad G(y', y, x) = 0$$

où G est un polynôme d'un certain degré en y', y, irréductible pour x quelconque, (et dont les coëfficients s'expriment algébriquement à l'aide des $u_1, \ldots u_{k-1}$ et de fonctions $\tau_{1,i-1}$). Toute solution de (1)' est solution de (1). Ceci posé, écrivons le polynôme G en y', y le plus général de degré n, en

---

[1] Quand une fonction est de la classe $\tau_{1,i}$, ses dérivées sont aussi de la classe $\tau_{1,i}$ [en renfermant dans la classe $\tau_{1,i}$ les classes $\tau_{1,i-1}$, etc].

laissant indéterminés ses coëfficients $\alpha(x)$ [dont un est pris égal à 1] et exprimons que l'équation différentielle (1) est une conséquence identique de l'équation différentielle (1)' Nous obtenons ainsi un système Σ de conditions algébriques entre x, les $\alpha(x)$ et leurs dérivées. Nous savons [voir page 467] que ce système Σ, ou bien est incompatible, ou bien détermine les $\alpha(x)$ algébriquement, ou enfin les définit en fonction de x d'un nombre limité de constantes arbitraires. Je dis que, pour une certaine valeur de n, ce dernier cas se trouve sûrement réalisé.

En effet, supposons qu'il en soit autrement soit $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0$ des valeurs quelconques; les solutions $y(x)$ de (1), définies par ces conditions initiales, doivent vérifier respectivement une équation (1)' correspondant à une certaine valeur de n. A chaque valeur de n ne correspond qu'un nombre fini d'équations (1)', donc un nombre fini i_n de valeurs de y'_0 vérifiant une des équations

$$G(y'_0, \bar{y}_0, x_0) = 0 .$$

Si on donne à n les valeurs 1, 2, 3, ... q, ..., l'ensemble des valeurs y'_0 ainsi obtenu est énumérable; y'_0 ne peut donc coïncider avec une valeur $\bar{y}'_0$ quelconque. C.Q.F.D.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

Théorème Quand l'équation (1) est réductible, son intégrale $y(x)$ est donnée par l'intégrale générale d'une équation du premier ordre:

$$(8) \qquad \Sigma \; \alpha(x) \, y^i \, y'^j = 0 ,$$

où les α sont déterminés en fonction de x et de r constantes arbitraires [$r \geq 1$] par un système différentiel algébrique par rapport à x, aux α et à leurs dérivées.

Il est facile de pousser plus loin l'étude

générale de la réduction d'une équation (1). Je me contenterai d'ici d'appliquer le théorème précédent aux équations (1) réductibles dont l'intégrale ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour des points critiques mobiles.

— . Equations réductibles dont l'intégrale générale n'acquiert qu'un nombre fini de branches autour des points critiques mobiles. —

Nous avons montré [voir pages 467-474] que si une telle équation se laisse intégrer sous la forme (3), ou bien $y(x)$ est une fonction algébrique des deux constantes, ou bien $y(x)$ est une fonction semi-transcendante des constantes: dans ce dernier cas [voir page 474], $y(x)$ est une fonction $\tau_{1,2,1}$ [en comprenant dans l'ensemble $\tau_{1,2,1}$ l'ensemble $\tau_{1,1}$].

Si $y(x)$ est une fonction algébrique des deux constantes, trois cas sont possibles [voir page 382]

1° ou bien $y(x)$ est une fonction $\tau_{1,2,1}$;

2° ou bien $y(x)$ s'expriment algébriquement en x, $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, ξ_1 et ξ_2 étant définies par le système:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \frac{d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}} &= h(x)\,dx \\ \frac{\xi_1\, d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \frac{\xi_2\, d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}} &= k(x)\,dx \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} R(\xi) &\equiv (\xi-\alpha_1)\dots(\xi-\alpha_5) \\ &(\alpha_i \neq \alpha_j) \end{aligned}$$

où h et k sont des fonctions algébriques de x, et les a_i des constantes numériques distinctes;

3° ou bien $y(x)$ s'exprime algébriquement en fonction de x, $t(x)$, $t'(x)$, où $t(x)$ vérifie l'équation:

$$(5) \qquad t'' + 3tt' + t^3 + At + B,$$

qui se déduit de l'équation linéaire:

(b) $$\theta''' + A\theta' + B\theta = 0$$

en posant $\frac{\theta'}{\theta} = t$; A et B sont des fonctions algébriques de x.

Il est aisé de démontrer que dans le cas 2º l'équation (1) est irréductible, ainsi que dans le cas 3º [si $A(x)$ et $B(x)$ ne sont pas choisis d'une manière exceptionnelle]

Nous arrivons donc à la conclusion suivante: Quand l'intégrale d'une équation (1) irréductible ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, ou bien cette équation se ramène algébriquement soit au système (4), soit à l'équation (5), ou bien $y(x)$ renferme les deux constantes sous forme transcendante.

Parmi les équations de la classe générale, les équations irréductibles dont l'intégrale $y(x)$ ne possède qu'un nombre fini de branches permutables autour des points critiques mobiles, se ramène algébriquement au système (4) ou au type (5).

Quant aux équations de la classe singulière dont l'intégrale $y(x)$ ne possède qu'un nombre fini de branches permutables autour des points critiques mobiles, elles sont <u>réductibles</u> ou <u>irréductibles</u> suivant que $y(x)$ est une fonction semi-transcendante ou transcendante des deux constantes.

Inversement, si l'intégrale $y(x)$ d'une équation (1) ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles et est une fonction transcendante des deux constantes [de quelque manière qu'on les choisisse], l'équation (1) est une équation irréductible de la

classe singulière

Ces théorèmes établis, je vais former un type d'équations à points critiques fixes dont l'intégrale $y(x)$ est une fonction transcendante des deux constantes.

Type d'équations (1) à points critiques fixes dont l'intégrale $y(x)$ est une fonction transcendante des deux constantes.

Considérons une surface algébrique de l'espace y, z, t, soit la surface :

$$S(y,z,t,x) = 0,$$

qui dépend analytiquement du paramètre x. Je suppose que deux surfaces S correspondant à deux valeurs quelconques de x ne sont pas transformables birationnellement, et que les coordonnées y, z, t de S sont exprimables en fonctions abéliennes dégénérées de deux paramètres u, v par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales à deux périodes, attachées à S, soit :

$$J(y,z,t,\bar{x}) \equiv \int P(y,z,t,\bar{x})\,dy + Q(y,z,t,\bar{x})\,dz = u,$$
$$K(y,z,t,\bar{x}) \equiv \int P_1(y,z,t,\bar{x})\,dy + Q_1(y,z,t,\bar{x})\,dz = v$$

Il est loisible d'admettre que J et K n'ont chacune qu'une période, et que cette période est égale à l'unité. Il existe alors une fonction rationnelle de y, z, t, soit $R(y,z,t,\bar{x})$, telle que l'expression :

$$P(y,z,t,x)\,dy + Q(y,z,t,x)\,dz + R(y,z,t,x)\,dx$$

soit une différentielle totale exacte à trois variables indépendantes x, y, z, [t désigne la fonction de x, y, z définie par $S = 0$]. La fonction R n'est déterminée d'ailleurs qu'à une fonction de x près, $h(x)$, qu'on peut ajouter à R. Les mêmes remarques s'appliquent à l'intégrale abélienne K.

Posons maintenant

$$\int P(y,z,t,x)\,dy + Q(y,z,t,x)\,dz + R(y,z,t,x)\,dx = \alpha$$
$$\int P_1(y,z,t,x)\,dy + Q_1(y,z,t,x)\,dz + R_1(y,z,t,x)\,dx = \beta,$$

α, β désignant deux constantes arbitraires. Les fonctions y, z de x, α, β, ainsi définies sont des fonctions méromorphes de α, β, et dans le champs des x leurs singularités non polaires sont fixes et font partie des points $x = \xi$ qui sont des singularités de P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, quels que soient y et z. De plus, les fonctions $y(x,\alpha,\beta)$. $z(x,\alpha,\beta)$, vérifient (quand on élimine α, β) un système différentiel algébrique en $y\,z$ [où x figure analytiquement] à savoir le système:

$$(1) \qquad \begin{cases} P\,dy + Q\,dz + R\,dx = 0 \\ P_1\,dy + Q_1\,dz + R_1\,dx = 0 \end{cases}$$

Enfin, l'intégrale générale $y(x), z(x)$ de ce système définit une correspondance biuniforme entre les deux surfaces:

$$S(y,z,t,\bar{x}) = 0, \qquad\qquad S(y_0,z_0,t_0,\bar{x}_0) = 0$$

correspondance qui ne saurait être birationnelle, d'après les hypothèses faites. L'intégrale $y(x), z(x)$ de (1) est donc une fonction semi-transcendante ou transcendante des deux constantes. Montrons que nous ne sommes pas ici dans le cas semi-transcendant.

La surface $S(y,z,t,x) = 0$, n'étant pas uniformément unicursale, correspond birationnellement au cylindre:

$$T^2 = Y(Y-1)(Y-\xi) \equiv \varrho(Y)$$

ξ dépendant de x, et une transformation birationnelle effectuée sur S ramène les intégrales J, K à une combinaison linéaire des deux intégrales:

$$\int \frac{dY}{\sqrt{\varrho(Y)}}\,, \qquad \int dZ + \frac{Y\,dY}{\sqrt{\varrho(Y)}}\,.$$

ou encore, si on veut, des deux intégrales:

$$\int \frac{dY}{\sqrt{\rho(Y)}} \quad , \int dZ + \frac{dY}{2(Y-\xi)\sqrt{\rho(Y)}} \quad .$$

Enfin il nous est loisible de prendre $\xi(x)$ comme nouvelle variable indépendante. Ces transformations substituent au système (1) un système (1)':

$$(1)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= A(y,z,x) + \sqrt{\rho(y,x)}\, B(y,z,x) \\ \frac{dz}{dx} &= A_1(y,z,x) + \sqrt{\rho(y,x)}\, B_1(y,z,x) \end{aligned} \right\}, \; \rho = t^2 = y(y-1)(y-x).$$

Ce système a ses points critiques fixes et son intégrale $y(x)$ est une fonction semi-transcendante ou transcendante des deux constantes en même temps que l'intégrale de (1)

Si l'intégrale $y(x)$ de (1)' est une fonction semi transcendante des constantes, la correspondance biuniforme entre y, z, t et y_0, z_0, t_0 transforme l'une dans l'autre deux familles de courbes algébriques des deux surfaces $S(y, z, t, \bar{x}) = 0$, $S(y_0, z_0, t_0, \bar{x}_0) = 0$. Autrement dit, on peut faire un changement algébrique de variables, soit $Y = g(y, z, \bar{x})$, $Y_0 = g(y_0, z_0, \bar{x}_0)$ tel que la correspondance biuniforme en question vérifie l'égalité: $Y = Y_0$ [voir page 482].

(D'autre part, l'intégrale de (1)' est donnée par les égalités:[1]

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda(x)\, z + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\rho(y,x)}} \left[\frac{\lambda(x)}{2(y-x)} + \mu(x) \right] &= h(x) + \alpha. \\ \lambda_1(x)\, z + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\rho(y,x)}} \left[\frac{\lambda_1(x)}{2(y-x)} + \mu_1(x) \right] &= h_1(x) + \beta. \end{aligned} \right.$$

---

(1) Soit $\omega_1(x), \omega_2(x)$ les périodes de $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\rho(y,x)}}$,

La correspondance entre y_0, z_0 et y, z, définie par cette intégrale, vérifie (pour $\bar{x}$ et $\bar{x}_0$ quelconques) les relations :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{\sqrt{\rho(y,\bar{x})}} \qquad \dfrac{dy_0}{\sqrt{\rho(y_0,\bar{x}_0)}}\left[a + \dfrac{b}{2(y_0 - x_0)}\right] + b\,dz_0, \\[2ex] dz + \dfrac{dy}{2(y(\bar{x})\sqrt{\rho(y,\bar{x})}} = \dfrac{dy_0}{\sqrt{\rho(y_0,\bar{x}_0)}}\left[a_1 + \dfrac{b_1}{2(y_0 - \bar{x}_0)}\right] + b_1\,dz_0, \end{cases}$$

a, b, a_1, b_1 dépendant de $\bar{x}, \bar{x}_0$.

Admettons que cette correspondance vérifie aussi une relation algébrique :

$$g(y, z, \bar{x}) = g(y_0, z_0, \bar{x}_0)$$

Tout d'abord, si $g(y, z, \bar{x})$ est indépendant de z, y est une simple fonction de y_0, b est nul, et on a :

$$(4) \qquad \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\bar{x})}} = \frac{a\,dy_0}{\sqrt{y_0(y_0-1)(y_0-\bar{x}_0)}},$$

la relation entre y et y_0 devant être algébrique, ce qui est absurde, quand $\bar{x}$ et $\bar{x}_0$ sont quelconques.

Si $g(y, z, \bar{x})$ dépend de z, substituons à z la variable $Y = g(y, z, \bar{x})$, soit $z = G(y, Y, \bar{x})$, et soit de même $z_0 = G(y_0, Y_0, \bar{x}_0) \equiv G_0(y_0, Y_0)$. La correspondance entre (y, Y) et (y_0, Y_0) est de la forme :

$$Y = Y_0, \qquad y = f(y_0, Y_0, \bar{x}, \bar{x}_0),$$

f étant algébrique en y_0 et transcendant en Y_0. On doit donc avoir :

$$\frac{dy}{\sqrt{\rho(y,\bar{x})}} = \frac{c\,dy_0}{\sqrt{\rho(y_0,\bar{x}_0)}} + H(Y_0)\,dY_0 .$$

(Suite) ω_1' et ω_2' leurs dérivées $\frac{d\omega_1}{dx}$, $\frac{d\omega_2}{dx}$, on voit aussitôt que les premiers membres de (2) n'auront qu'une période et que cette période sera égale à 1, si on prend :

$$\lambda = \frac{\omega_1}{\delta}, \quad \mu = -\frac{\omega_1'}{\delta}, \quad \lambda_1 = -\frac{\omega_2}{\delta}, \quad \mu_1 = \frac{\omega_2'}{\delta}, \quad \delta = \omega_1\,\omega_2' - \omega_1'\,\omega_2 .$$

(c et H pouvant dépendre de $\bar{x}, \bar{x}_0$) Mais, d'autre part, on a :

$$\frac{dy}{\sqrt{\varrho(y,\bar{x})}} = \frac{dy_0}{\sqrt{\varrho(y_0,\bar{x}_0)}}\left[a + \frac{b}{2(y_0-\bar{x}_0)}\right] + b\,\frac{\partial G_0}{\partial y_0}\,dy_0 + b\,\frac{dG_0}{dY_0}\,dY_0\,;$$

d'où l'identité :

$$(5) \qquad (a-c)\int_0^{y_0}\frac{dy_0}{\sqrt{y_0(y_0-1)(y_0-\bar{x}_0)}} + \frac{b}{2}\int_0^{y_0}\frac{dy_0}{(y_0-\bar{x}_0)\sqrt{y_0(y_0-1)(y_0-\bar{x}_0)}} + bG_0(y_0, Y_0) \equiv C,$$

C étant indépendant de y_0 ; la première intégrale qui figure dans le premier membre de (5) est l'intégrale elliptique de première espèce, la seconde est l'intégrale elliptique de seconde espèce ; G_0 est algébrique en y_0. L'identité (5) est donc impossible à moins qu'on n'ait $a=c$, $b=0$; y est alors une simple fonction algébrique de y_0 qui doit vérifier la relation (4), ce qui est absurde.

Nous avons donc bien montré que l'intégrale générale $y(x), z(x)$ du système (1) à points critiques fixes est une fonction transcendante des deux constantes, de quelque manière qu'on les choisisse.

Formons explicitement le système (1) : tout d'abord, il est loisible de supposer que, dans (2), les fonctions $h(x)$, $h_1(x)$ sont nulles ; car cela revient à effectuer sur y, z, t une transformation birationnelle [dont les coëfficients dépendent de x] Les équations (2) peuvent ensuite s'écrire :

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = \alpha L(x) + \beta M(x)$$

$$z + \int_0^y \frac{dy}{2(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = \alpha L_1(x) + \beta M_1(x)\,.$$

Les périodes de J, qui correspondent aux deux cycles distincts de la courbe $t^2 = y(y-1)(y-x)$, sont $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$; celles de J' sont $\omega_1'(x)$, $\omega_2'(x)$. D'autre part, quand y parcourt le premier cycle, α augmente de l'unité, β reprend la même valeur; quand y parcourt le second cycle, α reprend la même valeur, β augmente de l'unité. Il suit de là qu'on a.

$$L = \omega_1(x), \qquad M = \omega_2(x), \qquad L_1 = \omega_1'(x), \quad M_1 = \omega_2'(x).$$

Si maintenant nous dérivons les équations (6) pour éliminer les constantes α, β, il vient:

$$\frac{y'}{\sqrt{y(y-1)(y-1)}} + J' = \alpha\,\omega_1' + \beta\,\omega_2' = z + J',$$

d'où:

$$\frac{dy}{dx} = z\sqrt{y(y-1)(y-x)} \;;$$

puis:

$$z' + \frac{y'}{2(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}} + \frac{3}{4}\int_0^y \frac{dy}{(y-x)^2\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = \alpha\,\omega_1'' + \beta\,\omega_2'' \;;$$

mais le procédé classique de réduction des intégrales elliptiques donne aussitôt:

$$\int_0^y \frac{dy}{(y-x)^2\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = \frac{2}{3x(1-x)}\,\frac{y(y-1)}{(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}} + \frac{J}{3x(1-x)} + \frac{4(2x-1)}{2x(1-x)}\,J';$$

il nous faut donc éliminer α, β entre les trois équations

$$(7)\quad \begin{cases} J = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2 \\[2mm] z + J' = \alpha\,\omega_1' + \beta\,\omega_2' \\[2mm] z' + \dfrac{z}{2(y-x)} + \dfrac{1}{2x(1-x)}\,\dfrac{y(y-1)}{(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}} + \dfrac{J}{4x(1-x)} + \dfrac{2x-1}{x(1-x)}\,J' = \alpha\,\omega_1'' + \beta\,\omega_2'', \end{cases}$$

et nous savons que cette élimination conduit à une relation algébrique (E) entre z', z, y, (où figure x); or cette relation est évidemment de la forme:

$$P(z', z, y, x) + l(x)\,J + m(x)\,J' = 0,$$

où P est algébrique en z', z, y, et elle ne peut être algébrique

en z', z, y que si l et m sont identiquement nuls. Autrement dit, l'équation (E) peut s'obtenir en éliminant J, J' entre les équations (7), et α, β, se trouvent éliminés en même temps. Or pour éliminer J, J', il suffit de multiplier la première équation par $\frac{1}{4x(x-1)}$ la seconde par $\frac{2x-1}{x(x-1)}$, et d'additionner membre à membre les trois équations (7), ce qui donne :

$$\text{(E)} \qquad z'+z\left[\frac{1}{2(y-x)}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right]+\frac{1}{2x(1-x)}\,\frac{y(y-1)}{(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}}=0\,;$$

le second membre de E, homogène et linéaire en α, β, est nécessairement nul, puisque α, β doivent disparaître. On vérifie aussitôt ce résultat en remarquant que le coëfficient de α par exemple, est :

$$\omega_1''+\omega_1'\,\frac{(2x-1)}{x(x-1)}+\frac{\omega_1}{4x(x-1)}=0\,;$$

or ω_1, ω_2 sont, comme il est bien connu, deux solutions de l'équation linéaire :

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}+\frac{(2x-1)}{x(x-1)}\,\frac{d\omega}{dx}+\frac{\omega}{4x(x-1)}=0\,.$$

Le système (1)' est donc en définitive le suivant :

$$(1)' \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z\sqrt{y(y-1)(y-x)} \\ \frac{dz}{dx} &= z\left[\frac{1}{2(x-y)}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}\right]+\frac{1}{2x(x-1)}\,\frac{y(y-1)}{(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}}\,, \end{aligned}\right.$$

système algébrique non seulement en y, z, mais en x. A ce système, on peut substituer l'équation unique en y qui s'obtient en remplaçant z par $\frac{y'}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}}$; cette équation s'écrit :

$$\text{(A)} \qquad y''=\frac{y'^2\left[3y^2-2y(x-1)+x\right]}{2y(y-1)(y-x)}+y'\left[\frac{1}{x-y}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}\right]+\frac{1}{2x(x-1)}\,\frac{y(y-1)}{y-x}$$

Toutes les équations à points critiques fixes auxquels conduit

le procédé développé plus haut sont des transformées algébriques de l'équation (A); autrement dit s'obtiennent en substituant à $y(x)$ une fonction $Y = X(y', y, x)$, où X est algébrique en y', y et dépend de x d'une façon quelconque. L'intégrale de l'équation (A) est donnée par l'égalité:

$$\text{(a)} \qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2 .$$

Si on augmente respectivement les deux seconds membres des deux premières équations (7) de $u(x)$, $\frac{du}{dx}$ (u désignant une fonction de x arbitrairement choisie), rien n'est changé dans le calcul précédent, à cela près que le second membre de l'équation (E), au lieu d'être nul, est égal à

$$u'' + \frac{u'(2x-1)}{x(x-1)} + \frac{u}{4x(x-1)} \equiv X(x).$$

La fonction $y(x)$ vérifie l'équation:

$$\text{(B)} \qquad y'' = y'^2\,\frac{[3y^2-2y(x-1)+x]}{2y(y-1)(y-x)} + y'\left[\frac{1}{x-y}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}\right] + \frac{1}{2x(x-1)}\,\frac{y(y-1)}{y-x} + X(x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}.$$

Pour que cette équation soit algébrique en x, il faut et il suffit que $X(x)$ soit algébrique en x, c'est-à-dire que $u(x)$ soit solution de l'équation différentielle linéaire:

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{(2x-1)}{x(x-1)}\,\frac{du}{dx} + \frac{u}{4x(x-1)} = X(x)$$

où $X(x)$ est une fonction algébrique de x arbitrairement choisie. Si $u_1(x)$ est une solution de (C), son intégrale générale est:

$$u = u_1(x) + \alpha\,\omega_1(x) + \beta\,\omega_2(x).$$

Représentons par $y = \varpi(\xi)$ la fonction elliptique de ξ définie par l'égalité:

$$\xi = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}}\,;$$

l'intégrale générale de (B) est donnée par la formule $y = \varpi_x(u) \equiv \varpi[x, u]$, où u est l'intégrale générale de (C). Si on veut encore, l'équation (B) se déduit de l'équation (C) par la transformation transcendante $y = \varpi(x, u)$.

Soit $u_1(x)$ une solution particulière de (C); on passe de l'équation (A) à l'équation (B) en changeant y en $\varphi(y, x)$: φ désigne la fonction algébrique de y qui exprime $\varpi_x(\xi)$ en fonction de $y = \varpi_x(\xi + u_1)$; φ est une combinaison algébrique de y, de x et de la fonction transcendante $\varpi_x[u_1(x)]$. La transformation de passage entre les deux équations différentielles algébriques (A) et (B) est donc algébrique en y, mais transcendante en x.

Remarque sur l'équation (B)

L'équation (B) est un type d'équation du second ordre à points critiques fixes, irréductible (au sens que nous avons défini) et de la classe singulière. Mais il importe de remarquer qu'elle n'est pas irréductible au sens le plus général qu'on peut attacher à ce terme.

Tout d'abord, elle rentre dans cette classe si importante d'équations dites à systèmes d'intégrales fondamentaux, équations dont les équations linéaires sont le type le plus simple et qui ont fait l'objet des travaux bien connus de M.M. Sophus Lie, Vessiot, Guldberg, etc.[1] D'une façon précise, l'intégrale générale de (B) se laisse exprimer sous la forme:

$$y = \Psi(y_1, y_2, y_3, x, \alpha, \beta),$$

où Ψ est une certaine fonction analytique de $y_1, y_2, y_3, x, \alpha, \beta$; y_1, y_2, y_3 sont trois solutions quelconques de (B). α et β deux constantes arbitraires. Si on remplace y_1, y_2, y_3 par trois

[1] Je prends ici le terme « Systèmes d'intégrales fondamentaux » dans un sens un peu plus large, que M.M. Lie et Vessiot; mais les méthodes de ces auteurs s'étendent à une équation telle que B [voir pages 519-522]

solutions particulières de (B) prises au hasard, on obtient l'intégrale générale de (B) en faisant varier α, β ; si, laissant à α, β des valeurs numériques, on fait varier les trois solutions y_1, y_2, y_3 (ou seulement deux d'entre elles), on obtient encore l'intégrale générale de (B).

Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer que l'intégrale générale de (C) peut s'écrire :

$$u = u_1 + \alpha\,(u_2 - u_1) + \beta\,(u_3 - u_1),$$

u_1, u_2, u_3, étant trois quelconques de ses solutions particulière. D'autre part, on passe de l'équation (C) à l'équation (B) par la transformation $y = \varpi(u, x)$. Posons donc :

$$y_1 = \varpi\,(u_1, x),\ y_2 = \varpi\,(u_2, x),\ y_3 = \varpi\,(u_3, x)$$

$$y = \varpi\,(u_1 + \alpha\,(u_2 - u_1) + \beta\,(u_3 - u_1), x).$$

Si nous tirons des trois premières relations u_1, u_2, u_3 en fonction de y_1, y_2, y_3, (et de x), il vient :

$$y = \Psi\,(y_1, y_2, y_3, x, \alpha, \beta)$$

où u est une certaine fonction transcendante de y_1, y_2, y_3 x, α, β.

D'après les théorèmes généraux établis par M. S. Lie et par M. Vessiot, l'intégration de (B) doit se ramener à celle d'équations linéaires et à des quadratures. Or l'intégrale de (B) est donnée par la formule :

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = u,$$

où u est l'intégrale générale de l'équation linéaire (C). Si on veut encore, l'équation (C) admet deux intégrales premières de la forme :

$$(8)\qquad \frac{\lambda(x)\,y'}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} + \int\left\{\left[\frac{\lambda(x)}{2(y-x)} + \mu(x)\right]\frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} + R(y,x)\,dx\right\} = C^{te},$$

λ et μ représentant $\frac{\omega_1}{\delta}, -\frac{\omega_1'}{\delta}$, ou $\frac{\omega_2}{\delta}, -\frac{\omega_2'}{\delta}$, $[\delta = \omega_1\omega_2' - \omega_1'\omega_2]$. Si on exprime que (8) est une intégrale première de (B), il vient :

$$(9) \qquad R = \frac{-y'}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}}\left[\lambda\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) + \lambda' + \mu\right] - \frac{\lambda}{2x(x-1)}\,\frac{y(y-1)}{(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}} - \lambda X,$$

et comme R doit être indépendant de y', le coëfficient de y' dans (9) est nul,[1] et on a :

$$R = \frac{\lambda}{2x(1-x)}\,\frac{y(y-1)}{(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}} - \lambda X$$

L'équation (C) admet donc les deux intégrales premières :

$$C_1^{te} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} + \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}}\left(\frac{\lambda}{2(y-x)} + \mu\right) + \lambda\,dx\left[\frac{y(y-1)}{2x(1-x)(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}} - X\right],$$

où on a : $\lambda = \frac{\omega_1}{\delta}$, $\mu = -\frac{\omega_1'}{\delta}$, ou bien $\lambda = \frac{\omega_2}{\delta}$, $\mu = -\frac{\omega_2'}{\delta}$,

$\delta = \omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'$, $\qquad \omega_1 = 2\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}}$, $\quad \omega_2 = 2\int_1^\infty \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}}$, $\quad \omega_1' = \frac{d\omega_1}{dx}$, $\omega_2' = \frac{d\omega_2}{dx}$.

Au lieu de déterminer ω_1, ω_2 par des intégrales définies, on peut dire que ω_1, ω_2 sont deux solutions de l'équation linéaire et homogène :

$$\omega'' + \omega'\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right] + \frac{\omega}{4x(x-1)} = 0;$$

si on pose $\omega = \frac{v}{\sqrt{x(x-1)}}$, v vérifie l'équation :

$$(10) \qquad v'' + \frac{v}{4}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)}\right],$$

et on a (à un facteur constant près):

$\delta = \frac{1}{x(x-1)}$, $\lambda = \frac{\omega_1}{\delta} = v_1\sqrt{x(x-1)}$, $\quad \mu = \frac{-\omega_1'}{\delta} = -v_1'\sqrt{x(x-1)} + \frac{v_1(2x-1)}{2\sqrt{x(x-1)}}$;

---

[1] En remplaçant λ, μ par $\frac{\omega_1}{\delta}, \frac{-\omega_1'}{\delta}$, on trouve aussitôt

$$\lambda\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) + \lambda' + \mu \equiv \frac{\omega_1}{\delta}\left[\frac{\delta'}{\delta} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right],$$

or on sait que si ω_1, ω_2 sont deux solutions d'une équation: $\omega'' + p\omega' + q\omega = 0$, l'expression $\delta = \omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'$ est égale à $e^{-\int p(x)dx}$; dans le cas qui nous occupe, p est égal à $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$, et $\frac{\delta'}{\delta} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)$ est identiquement nul.

l'équation (B) admet donc l'intégrale première

(11)
$$C^{te} = \frac{y' v \sqrt{x(x-1)}}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} + \int dy \sqrt{\frac{x(x-1)}{y(y-1)(y-x)}} \left[\frac{v}{2}\left(\frac{1}{y-x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right) - v'\right] + dx \frac{v}{\sqrt{x(x-1)}}\left[\frac{y(1-y)}{2(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}} - x(x-1)X\right]$$

si v est une solution quelconque de (10). Autrement dit, une fois intégrée l'équation de Riccati :

$$\frac{dw}{dx} + w^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)}\right]$$

l'intégrale de (B) est définie par deux quadratures de différentielles totales [1].

Formation directe de l'équation (B).

On peut arriver à l'équation (B) par une voie plus directe : la fonction $y = \varpi(\xi, x)$ définie par l'égalité :

(12)
$$\int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = \xi$$

est une fonction uniforme [2] de x, ξ. Si dans l'égalité (12) je remplace ξ par une fonction $u(x, \alpha, \beta)$ dépendant de deux constantes α, β et à points critiques fixes, la fonction $y = \varpi(u, x) \equiv \varphi(x, \alpha, \beta)$ aura elle-même ses points critiques fixes. Est-il possible de choisir la fonction $u(x, \alpha, \beta)$ de façon

---

[1] v se calcule algébriquement en fonction de trois solutions w_1, w_2, w_3, de l'équation de Riccati [voir page 30].

---

[2] En effet, la transformation $y = 4\left(z + \frac{x+1}{3}\right)$ ramène la différentielle elliptique à la forme $\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$, où g_2, g_3 sont rationnels en x ; la fonction $\wp(\xi; g_2, g_3)$ et sa dérivée $\frac{d\wp}{d\xi}$ sont des fonctions uniformes de ξ, g_2, g_3, donc de ξ, x et il en est de même par suite de la fonction $y = \varpi(\xi, x)$

qu'en éliminant α, β entre l'équation (12) et les deux équations qui s'en déduisent par deux dérivations l'équation obtenue $F(y'', y', y, x) = 0$ soit algébrique en y'', y', y? Nous devons éliminer α, β entre les trois équations

$$(7)\left\{\begin{aligned} & J \equiv \int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = u(x, \alpha, \beta) \\ & \frac{y'}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} + \frac{1}{2}\int_\infty^y \frac{dy}{(y-x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = u'(x, \alpha, \beta), \\ & \frac{y''}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} - \frac{y'^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}}{\rho\sqrt{\rho}} + \frac{y'}{(y-x)\sqrt{\rho}} + \frac{3}{4}\int_\infty^y \frac{dy}{(y-x)^2\sqrt{\rho}} = u''(x, \alpha, \beta). \end{aligned}\right.$$

$$[\rho \equiv y(y-1)(y-x)].$$

La dernière intégrale $\int_\infty^y \frac{dy}{(y-x)^2\sqrt{\rho}}$, se ramène algébriquement aux intégrales $J, \frac{\partial J}{\partial x}$, et pour que l'élimination de α, β, conduise à une relation algébrique en y'', y', y, il faut que $J, \frac{\partial J}{\partial x}$ se trouvent éliminés en même temps (voir page 506); autrement dit, α et β doivent disparaître quand on additionne membre à membre les trois équations (7) après avoir multiplié la première par $\frac{1}{4x(x-1)}$, la seconde par $\frac{2x-1}{x(x-1)}$; la fonction u vérifie donc une relation:

$$(C) \qquad u'' + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) u' + \frac{u}{4x(x-1)} = X(x),$$

où X est indépendant de toute constante, et l'équation que vérifie $y(x)$ est l'équation déjà écrite (B). Pour que cette équation soit algébrique en x, il faut et il suffit que $X(x)$ soit algébrique.

On reconnait aussitôt, dans l'équation (C) sans second membre, l'équation que vérifient les périodes de la différentielle elliptique (12), en sorte que l'intégrale de (B) est déterminée par l'égalité:

$$(13) \qquad \int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}} = u_1(x) + \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2.$$

u_1 étant une solution particulière de (C). Si on fait $X=0$, l'équation (B) devient l'équation (A) dont l'intégrale est donnée par la formule (13) où on fait $u_1=0$, les équations (B) se déduisent toutes de (1) par un changement algébrique de la fonction y [où x figure sous forme transcendante.]

L'équation (B) une fois formée de cette manière synthétique, on peut montrer directement que son intégrale est une fonction transcendante des deux constantes de quelque manière qu'on les choisisse. Il suffit évidemment d'établir la proposition pour l'équation (A).

Tout d'abord, si l'intégrale $y(x)$ de (A) est une fonction algébrique des deux constantes, il en est de même pour l'équation (B), et l'intégrale de (B) définit entre les deux cylindres:

$$t^2=y(y-1)(y-\bar{x}), \qquad t_0^2=y_0(y_0-1)(y_0-\bar{x}_0)$$

de l'espace y, z, t, et de l'espace y_0, z_0, t_0, une correspondance birationnelle, ce qui est absurde (si $\bar{x}$ et $\bar{x}_0$ sont quelconques).

D'autre part supposons que l'intégrale $y(x)$ de (A) soit une fonction semi-transcendante des constantes. Elle est donnée par l'intégration d'une équation

$$(\alpha) \qquad f(y', y, u, x)=0,$$

algébrique en y', y, u, x, où u vérifie une équation:

$$(b) \qquad g(u', u, x)=0,$$

g étant algébrique en u', u, x. L'équation (b) a ses points critiques fixes, et il en est de même de l'équation (α) après qu'on y a remplacé u par l'intégrale générale de (b).

Ceci rappelé, observons que l'équation (A) possède une infinité de solutions algébriques, à savoir toutes les solutions obtenues en donnant dans l'intégrale générale $y=\varpi[\alpha\omega_1(x)+\beta\omega_2(x), x]$ des valeurs commensurables à α, β. Ces solutions sont d'ailleurs

les seules solutions algébriques de (A) et forment un ensemble énumérable au sens de M. Cantor. Il suit de là que pour aucune solution $u(x)$ de (b) l'équation (α) n'a son intégrale algébrique, car la famille des solutions algébriques de (A), dépendant au moins d'une constante arbitraire, ne serait pas énumérable. D'autre part si une équation (α) admet une solution algébrique $y_1(x)$, la fonction $u(x)$ correspondante [donnée par $f(y_1', y_1, u, x) = 0$,][1] est algébrique; enfin si la relation $f[y', y, u_1(\bar{x}), \bar{x}] \equiv f_1(y', y, \bar{x}) = 0$ entre y', y est (pour $\bar{x}$ arbitraire) de genre positif; elle ne saurait admettre une solution algébrique sans que son intégrale soit algébrique; elle doit donc être unicursale, et l'équation $f_1 = 0$ se ramène algébriquement à une équation de Riccati qui ne peut posséder plus de <u>deux</u> solutions algébriques. Il faut donc que l'équation (b) admette une infinité de solutions algébriques $u_1(x)$, et comme elle s'intègre algébriquement dès qu'elle en admet trois, son intégrale générale $u(x, c)$ est algébrique. Il faut ensuite que pour une infinité de solutions $u = u_1(x)$ de (b), la relation (α) ou $f_1(y', y, x) = 0$, entre y', y, soit unicursale; il suit de là aussitôt que, pour toute valeur de C, x, l'équation entre y', y (qui dépend algébriquement de C, x):

$$0 = f(y', y, u(x, C), x) \equiv f_2(y', y, C, x)$$

est unicursale; elle se ramène donc algébriquement à une équation de Riccati

$$(\alpha') \qquad \frac{dv}{dx} + v^2 + b(x, C) = 0,$$

et cette équation doit admettre pour une infinité de

---

[1] Les solutions $y = y_1(x)$ telles que $f(y_1', y_1, u, x)$ soit identiquement nul (quels que soient u, x) sont en nombre fini et nous les laissons de côté

valeurs (mais non pour toute valeur de C) au moins une solution algébrique, sans s'intégrer algébriquement. Soit q le nombre des valeurs de la fonction $h(x, C)$ (pour C quelconque): une solution algébrique d'une équation (α') a au plus $2q$ valeurs; autrement, pour une branche déterminée de $h(x)$, on connaîtrait plus de deux solutions particulières de (α') qui seraient algébriques, et l'intégrale générale de (α') serait algébrique. D'autre part considérons l'équation linéaire

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + h(x, C) w = 0;$$

les infinis $x = \xi$ de $h(x, C)$ qui sont variables avec C, doivent être des points algébriques de l'intégrale, et si on développe w suivant les puissances de $(x-\xi)$, soit:

$$w = d\,(x-\xi)^{\frac{\mu}{\nu}} + e\,(x-\xi)^{\frac{\mu+1}{\nu}} + \cdots,$$

le nombre commensurable (positif ou négatif) $\frac{\mu}{\nu}$ ne peut dépendre de C; on peut par suite [voir page 31] déterminer (pour C quelconque) une limite supérieure r du degré en x de la relation $H(v, x) = 0$, susceptible de définir une solution algébrique d'une équation (α'). Écrivons donc le polynôme H le plus général de degré $2q$ en v, de degré r en x, et exprimons que l'égalité $H = 0$ définit une solution de (α'). Les conditions ainsi obtenues ou bien sont compatibles quel que soit C, ou bien astreignent C à une certaine relation algébrique (à coëfficients numériques): il est donc impossible qu'elles soient compatibles pour une infinité de valeurs de C sans l'être pour C quelconque. L'intégrale $y(x)$ de (A) ne saurait être une fonction semi-transcendante des constantes.(1) C.Q.F.D.

(1) Le même raisonnement montre qu'aucune solution $y(x)$ de (A) ne saurait vérifier une équation d'ordre n dont l'intégrale générale renferme algébriquement ses constantes.

Nous avons ainsi montré par deux méthodes toutes différentes, que l'intégrale $y(x)$ de (A) est une fonction transcendante des deux constantes, de quelque manière qu'on les choisisse. La première méthode ressort de la théorie des transformations biuniformes des surfaces algébriques; la seconde ne s'appuie que sur des propriétés des équations différentielles.

Observons que nous avons formé, par le fait même, un exemple de correspondance biuniforme entre deux surfaces algébriques, à savoir les deux cylindres de l'espace y, z, t:

$$t^2 = y(y-1)(y-a), \qquad t_1^2 = y_1(y_1-1)(y_1-b):$$

cette correspondance ne transforme aucun faisceau de courbes algébriques en un faisceau de courbes algébriques; elle ne conserve pas la différentielle totale de première espèce attachée à chaque cylindre.

L'équation (A) a été formée pour la première fois par M. Picard, qui l'a signalée incidemment dans son Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables [page 165). J'ai indiqué les propriétés de cette équation que je viens de développer dans une note des Comptes-Rendus [Novembre 1893].

Considérations sur la recherche de toutes les équations du second ordre à points critiques fixes. — Nous venons de former un type d'équations du second ordre à points critiques fixes, irréductible et de la classe singulière. La question serait maintenant de former tous les types analogues. C'est là un problème de la plus profonde de difficulté et qui n'est pas résolu encore: les méthodes précédentes fournissent du moins sur sa solution des indications très importantes, dont j'énoncerai brièvement quelques-unes.

Tout d'abord, comme je l'ai dit déjà, ce méthodes permettent de déterminer toutes les équations: $y'' = R(y'y)$.

dont l'intégrale est uniforme : R désigne une fonction rationnelle de y', y, indépendante de x; R est nécessairement alors un polynôme du second degré en y'^2,

$$R \equiv A(y)\,y'^2 + B(y)\,y' + C(y).$$

Si $B(y)$ ou $C(y)$ est identiquement nul, le même problème est résolu en supposant seulement les deux autres coëfficients algébriques en y.

Soit maintenant :

$$(1) \qquad F\,(y'', y'\,; y,\ x) = 0\,,$$

une équation algébrique en y'', y', y, analytique en x. Si ses points critiques sont fixes, les diverses branches de la fonction $y''(y', y, x)$ définie par (1) sont, pour $y' = \infty$, de la forme :

$$y'' = y'^2\,[A(y,x) + \varepsilon]\,,$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{y'}$, [A peut être identiquement nul]. On montre d'abord que (pour une valeur fixe quelconque x_0 de x), l'équation :

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = A(y, x_0)\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2$$

doit avoir son intégrale $y(\xi)$ uniforme. Il suit de là que, moyennant un changement de variable effectué sur x, A coïncide nécessairement avec une des expressions :

$$A = 0\,, \qquad A = \frac{1}{y}\,, \qquad A = \frac{R'}{2R} \qquad A = \frac{R'}{2R} - \frac{\alpha(x)}{\sqrt{R}}$$

avec $R \equiv (1-y^2)(1-u\,y^2)$, $R' \equiv \frac{\partial R}{\partial y} \equiv -2\,(1+u)\,y + 4\,u\,y^3$, u désignant soit x, soit une constante numérique. En introduisant certaines transformations telles que $x = a\ \xi$, ou $y = \frac{z}{b}$, ou ces deux transformations combinées, et en étudiant les petites valeurs de a, b, on obtient d'autres conditions nécessaires pour que l'équation (1) ait ses points critiques fixes. Bien que je n'aie pas encore achevé

cette discussion, je pense déterminer bientôt toutes les équations à points critiques fixes:

$$y'' = f(y', y, x)$$

où f est rationnel en y', y, analytique en x. Les équations où f est algébrique en y', y, présentent d'autres difficultés : pour ces équations, j'ai du moins établi ce théorème, qui est une conséquence des propriétés des correspondances biuniformes entre surfaces algébriques :

Soit $F(y'', y', y, x) = 0$ une équation qui, pour x quelconque, est algébrique en y'', y', y, et de genre p plus grand que 1. Si l'intégrale générale $y(x)$ a toutes ses singularités non polaires fixes, $y(x)$ est une fonction algébrique ou semi-transcendante des constantes, et se calcule par des procédés connus.

Observons à ce propos que le type (B), formé plus haut, a toutes ses singularités non polaires fixes. On ne connaît pas jusqu'ici d'équations du second ordre irréductibles à points critiques fixes, dont l'intégrale présente des points essentiels mobiles, et il n'est pas certain qu'il en existe.

De tels exemples abondent au contraire dès que l'ordre différentiel dépasse 2 : ainsi les équations qui définissent les fonctions fuchsiennes, soit :

$$(2) \qquad \frac{y'''}{y'^3} - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^4} = G(y),$$

sont irréductibles au sens que nous avons défini et leur intégrale $y(x)$ peut présenter des singularités essentielles mobiles formant ou non des lignes.

Difficultés introduites par l'existence de singularités essentielles mobiles — C'est sur la différence qui sépare les équations à points critiques fixes, suivant qu'il existe ou non des singularités essentielles mobiles, que je voudrais insister maintenant

Cette différence apparaît aussitôt sur les équations du second ordre dont l'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. On est ramené, dans ce cas, à intégrer une équation du premier ordre à points critiques fixes qui dépend d'une constante c :

$$F(y', y, x, c) = 0 \qquad (3)$$

Les points singuliers $x = \xi$ de (3), variables avec c, sont des points algébriques de $y'(y, x)$. Si l'intégrale $y(x)$ a toutes ses singularités non polaires fixes, ces points $x = \xi(c)$ doivent être des pôles de $y(x)$, condition qu'on sait exprimer algébriquement. Au contraire, quand $y(x)$ présente des points essentiels mobiles, on ne sait pas reconnaître algébriquement si l'intégrale $y(x)$ de (3) est uniforme autour d'un point essentiel $x = \xi(c)$. Comme exemple très simple, prenons l'équation [voir page 12] :

$$y'' = y'^2 \left[\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} - \frac{1}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} \right], \qquad (4)$$

dont l'intégrale générale est $y = \wp[x + \log(x+b)]$; pour que cette intégrale soit uniforme, il faut et il suffit que $2i\pi$ soit une période $(2m\omega_1 + 2n\omega_2)$ de $\wp(u)$. On voit que la condition est de nature transcendante ; on ne peut exprimer, à l'aide d'un nombre fini de relations algébriques, que l'intégrale $y(x)$ de (4) est uniforme.

Il est très vraisemblable (et cela quel que soit l'ordre de l'équation différentielle considérée) que le cas où toutes les singularités non polaires sont fixes pourra être entièrement élucidé, à l'aide des seules ressources de la théorie des fonctions (théorie qui est tout entière du ressort du continu). On conçoit, en effet, qu'en poursuivant les résultats déjà obtenus plus haut, on arrive à former les conditions suffisantes pour qu'il n'existe ni singularités transcendantes, ni singularités essentielles mobiles. Au contraire, les

équations à points critiques fixes et à singularités essentielles mobiles; exigeront sûrement des recherches de haute arithmétique, où les méthodes du discontinu joueront un rôle fondamental.

Comment aborder l'étude de cette classe d'équations? Pour qu'une équation ait ses points critiques fixes, il faut d'abord que toute solution $y(x)$ continue, ainsi que ses premières dérivées dans le domaine de $x = x_0$, soit rationnelle dans ce domaine. Il faut ensuite que $y(x)$ soit uniforme autour de chacun de ses points essentiels, et c'est cette dernière condition qu'on n'a aucun moyen d'exprimer. Ces conditions, lors même qu'on saurait reconnaître qu'elles sont remplies, sont encore insuffisantes dans le cas où $y(x)$ présente des coupures mobiles : c'est ainsi qu'il arrive que $y(x)$ n'admette d'autres singularités que des coupures et soit cependant une fonction multiforme. Par exemple, il peut se faire, que $y(x)$ soit holomorphe en tout point d'une couronne comprise entre deux circonférences concentriques, qui sont lignes essentielles de $y(x)$, et qu'elle possède une infinité de branches qui se permutent autour du plus petit cercle. M. F. Klein a montré l'existence de telles singularités sur des équations du 3e ordre.

Il ne faut donc pas songer à former directement tous les types d'équations à points critiques fixes. La voie la plus sage consiste à s'attaquer d'abord aux classes d'équations intégrables ou réductibles[1] par un procédé quelconque, et à déterminer, parmi ces équations, celles qui ont leurs points critiques fixes. Par exemple, les équations de la forme (2) sont irréductibles au sens restreint que nous avons défini; mais elles se ramènent,

---

[1] Le mot <u>réductible</u> est pris ici dans son sens le plus large.

par des quadratures, à une équation de Riccati, si on prend y comme variable et x comme fonction.

De plus, on ne peut espérer obtenir en général, sous forme algébrique, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations étudiées aient leurs points critiques fixes. On doit tendre vers des énoncés dont le cas rudimentaire offert par l'équation (4) donne l'idée la plus simple. Pour les équations de la forme (2) notamment, ces conditions s'expriment ainsi : si on prend y comme variable, x comme fonction, et si x(y) est une solution de l'équation, 1° le groupe $x_i = \dfrac{a_i x_1 + b_i}{b_i x_1 + c_i}$ qui définit une branche de x(y) en fonction d'une autre $x_1(y)$, doit être un groupe automorphe ; 2° x(y) ne doit pas présenter de points essentiels ; etc.

Du rôle de la théorie générale des groupes. – Je crois nécessaire de signaler le rôle auxiliaire, très important que la théorie des groupes est appelée à jouer dans une telle étude. Cette théorie, en effet, met en évidence les classes d'équations intégrables ou réductibles d'une manière quelconque, en même temps que les propriétés de ces équations. Elle fournit, en général, d'importantes indications sur la manière dont l'intégrale d'une telle équation renferme les constantes, et c'est là un renseignement essentiel. Appliquée par exemple au type très simple (2), la théorie des groupes montre que l'intégrale de (2) est de la forme $y = \varphi\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$, a, b, c, d désignant des constantes, et c'est cette remarque qui ramène le problème de l'uniformité au problème de la formation des groupes fuchsiens et Kleinéens.[1]

---

[1] De plus, et c'est là un fait que les équations (2) mettent encore en évidence, les principes généraux de la doctrine des substitutions (continues ou discontinues) seront utiles, en général,

A ce point de vue, il sera souvent préférable de ne pas se limiter aux équations d'une seule variable indépendante, mais d'embrasser les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre fini de constantes. Parmi ces systèmes, les plus simples sont ceux de la forme :

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial u} = A(x,y), \quad \dfrac{\partial x}{\partial v} = B(x,y), \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} = A_1(x,y), \quad \dfrac{dy}{\partial v} = B_1(x,y), \end{array}\right.$$

où x, y sont deux fonctions des deux variables indépendantes u, v, et où les A, A_1, B, B_1 sont des fonctions algébriques de x, y qui satisfont identiquement aux deux conditions d'intégrabilité :

$$\frac{\partial A}{\partial x} B + \frac{\partial A}{\partial y} B_1 \equiv \frac{\partial B}{\partial x} A + \frac{\partial B}{\partial y} A_1, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial x} B + \frac{\partial A_1}{\partial y} B_1 \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x} A \frac{\partial B_1}{\partial y} A_1.$$

L'intégrale générale d'un tel système peut s'écrire :

$$x = \varphi(u+a,\ v+b), \qquad y = \psi(u+a,\ v+b),$$

a, b désignant deux constantes arbitraires. Si on veut encore, le système Σ, quand on prend x, y comme fonctions, s'intègre par deux quadratures de différentielles totales :

$$du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \qquad dv = P_1(x,y)\,dx + Q_1(x,y)\,dy.$$

<u>J'ai déterminé explicitement[1] tous les systèmes (Σ) dont l'intégrale est uniforme</u> ; il existe notamment un cas remarquable où cette intégrale est uniforme et possède quatre couples de périodes distincts

---

(Suite) à la recherche des conditions arithmétiques nécessaires pour que les points critiques soient fixes.

---

(1) Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 16 Mars 1896).

sans être méromorphe mais présente des singularités essentielles à distance finie (variables avec α, b).

Remarque. — Il convient d'observer que les types les plus remarquables, connus jusqu'ici, de systèmes différentiels à points critiques fixes, se rattachent étroitement à la théorie des groupes continus, et en particulier à la théorie des équations différentielles à systèmes d'intégrales fondamentaux. Tout d'abord, parmi les équations dont l'intégrale renferme algébriquement les constantes, les plus intéressantes sont celles qui se ramènent aux équations linéaires ou aux systèmes abéliens (voir page 364 et page 375); or ces équations jouissent de la propriété que leur intégrale générale $y = \varphi(x, c_1, \dots c_n)$ s'exprime algébriquement en fonction de q intégrales particulières $y_1(x) \dots y_q(x)$, de leurs dérivées, et des constantes $c_1 \dots c_n$:

$$y = \Phi(y_1, y_1', \dots y_1^{(n-1)}, \dots y_q, y_q', \dots y_q^{(n-1)}, x, c_1, \dots c_n);$$

x figure analytiquement dans Φ, et l'intégrale générale $y(x)$ s'obtient en remplaçant, dans la fonction bien déterminée Φ, les $y_1, \dots y_q$, par q intégrales particulières quelconques de l'équation.

Les équations du type (2) qui définissent les fonctions fuchsiennes, les systèmes différentiels qui définissent les fonctions hyperfuchsiennes, hyperabéliennes de M. Picard, rentrent tous dans la classe des équations à systèmes d'intégrales fondamentaux. Si même on prend comme fonctions les variables et réciproquement, l'intégrale générale du nouveau système s'exprime rationnellement en fonction d'une solution particulière quelconque (sans que les variables figurent): par exemple, si on regarde, dans (2), x comme la fonction, y comme la variable, et si on désigne par $x(y)$, $x_1(y)$ deux solutions quelconques de l'équation, on a : $x(y) = \dfrac{a x_1(y) + b}{c x_2(y) + d}$, où a, b, c, d sont des constantes.

On peut se proposer, d'une manière générale, d'étudier les systèmes différentiels à p fonctions et à p variables, dont l'intégrale générale s'exprime algébriquement en fonction de q solutions particulières quelconques, et dont l'inversion conduit à des fonctions uniformes. Malheureusement, les types les plus intéressants auxquels on est ainsi conduit se ramènent aux types abéliens, fuchsiens, hyperabéliens, hyperfuchsiens[1].

Enfin, l'équation irréductible du second ordre (A) que nous avons formée plus haut (page 507) admet également des systèmes d'intégrales fondamentaux, à condition toutefois de donner un sens un peu large à la terminologie de M. M. Lie et Vessiot. D'une façon précise, soit :

$$y''=f(y',y,x),$$

l'équation (A), et soit (A') le système :

$$(A')\qquad y''=f(y',y,x), \qquad z''=f(z',z,x);$$

si $y_1(x)$, $z_1(x)$ est une solution particulière quelconque de (A'), la solution générale est donnée par deux relations :

$$(r)\qquad y=\varphi(y_1,z_1,x,a,b), \qquad z=\varphi(y_1,z_1,x,a_1,b_1).$$

qui définissent un groupe de transformations du système (A') en lui-même, à quatre paramètres a, b, a_1, b_1.

Un des problèmes les plus simples qui se posent naturellement consisterait à déterminer, parmi les équations :

$$y''=f(y',y,x)$$

pour lesquelles le système (A') admet un groupe continu de la forme (r), toutes celles qui ont leurs points critiques fixes.

Conclusions. En définitive, il convient d'aborder l'étude des équations

---

[1] Voir à ce sujet ma note sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions. (Comptes-Rendus Avril 1894).

différentielles à points critiques fixes, mais à singularités essentielles mobiles, par une voie détournée, en s'attaquant d'abord aux classes d'équations réductibles, dans le sens le plus large de ce terme, j'entends aux équations dont la théorie des groupes facilite l'intégration, en particulier aux équations qui possèdent des systèmes fondamentaux d'intégrales.

Supposons, par exemple, qu'on ait déterminé, parmi toutes les équations du second ordre réductibles d'une manière quelconque, celles qui ont leurs points critiques fixes. Si, quand on poursuit d'autre part l'étude des conditions nécessaires pour qu'une équation du second ordre ait ses points critiques fixes, il se trouve (comme j'ai lieu de le penser) que les conditions ainsi obtenues entraînent forcément la réductibilité de l'équation, le problème de la formation de toutes les équations du second ordre à points critiques sera résolu.

Au contraire, s'il existe des équations du second ordre (ou d'ordre supérieur) à points critiques fixes et à singularités essentielles mobiles, qui ne soient réductibles d'aucune manière à des équations plus simples, la formation de ces équations ne pourra résulter que d'une étude très approfondie des systèmes de fonctions $y_1(x), \dots y_n(x)$ uniformes dans le voisinage d'une singularité essentielle et liées identiquement par une relation algébrique. C'est à cet ordre d'idées que se rattache la théorie des transformations biuniformes des surfaces algébriques (à trois ou à n dimensions)[1].

La théorie de ces transformations et celle des équations à points critiques fixes sont si étroitement liées que

---

[1] Voir les Comptes-Rendus (Avril 1896).

tout progrès de l'une constituera un progrès de l'autre. Les correspondances biuniformes qu'engendrent les équations différentielles sont plus ou moins compliquées suivant que l'intégrale générale de l'équation considérée est dénuée de singularités essentielles mobiles, ou possède au contraire comme singularités mobiles soit des points essentiels isolés, soit des ensembles parfaits de points essentiels, soit des lignes singulières. Dans le premier cas, la correspondance biuniforme ne présente, dans le plan de chaque variable complexe, que des points essentiels isolés, définis par une relation algébrique entre les variables; dans le second cas, si les points essentiels mobiles de l'intégrale sont isolés, la correspondance ne présente encore (dans le plan de chaque variable) que des points essentiels isolés, mais les affixes de ces singularités peuvent être définis par une relation transcendante. Il est clair que ce sont ces deux modes de correspondances biuniformes qu'il faut étudier tout d'abord, avant les modes de correspondances qui présentent (dans le plan de chaque variable) des ensembles parfaits (ponctuels ou linéaires) de singularités; pour ces dernières, toute tentative de théorie semble encore prématurée.

Equations dont l'intégrale ne possède que n branches permutables autour des singularités mobiles.

Il est clair que l'étude de ces équations (E_n) présente (pour n quelconque) des difficultées encore plus grandes que l'étude des équations à points critiques fixes.

Pour le bien comprendre, supposons en premier lieu que l'équation n'ait pas de singularités essentielles mobiles. Pour qu'elle soit de la classe en question, il faut que l'intégrale $y(x)$ ne présente, comme singularités mobiles

que des points algébriques. Mais ces conditions ne sont suffisantes que dans le cas de $n = 1$, c'est à dire dans le cas où tous les points singuliers mobiles se trouvent être des pôles: on n'a aucun moyen d'exprimer qu'une fonction, qui possède plusieurs points critiques algébriques distincts, ne prend autour de ces points qu'un nombre fini de valeurs.[1]

La même difficulté se présente avec plus de force si l'intégrale est affectée de points essentiels ou de coupures mobiles.

Il est loisible de chercher à former parmi les classes d'équations réductibles du second ordre (ou du troisième ordre, etc), toutes les équations de l'espèce E_n. Quant au problème qui consisterait à déterminer toutes les équations E_2 ou E_3....., d'un ordre donné, sa solution, si on l'obtient jamais, ne saurait résulter vraisemblablement que d'une étude approfondie des correspondances transcendantes de n points à n points entre deux surfaces algébriques.

---

(1) Si l'équation différentielle considérée est du second ordre par exemple, on sait former (par une voie détournée) les équations E_n dont l'intégrale est une fonction algébrique ou semi-transcendante des constantes; mais la méthode ne donne rien relativement aux équations (E_n) dont l'intégrale est une fonction transcendante des deux constantes.

Vingt-Deuxième Leçon

Conclusions générales sur les équations d'ordre quelconque. Applications au domaine réel.

Nous avons étudié, dans toutes les leçons précédentes, les transcendantes analytiques définies par les équations différentielles. Il n'est pas sans intérêt de comparer entre eux les différents modes de génération des fonctions analytiques.

Des divers modes de génération des fonctions analytiques.

Définition à l'aide de séries. Un premier mode de génération des transcendantes est offert par les séries à termes élémentaires. Il est clair que ce mode de définition est le plus général, puisque toute fonction analytique peut être représentée (au moins dans une certaine région de son domaine d'existence) par une série de Taylor. Mais d'une part, la représentation d'une transcendante par une série se prête mal en général à la découverte des propriétés de cette transcendante. D'autre part, comment choisir, parmi l'infinité de séries possibles, celles qui définissent une fonction nouvelle vraiment utile contribuant à l'intégration des équations différentielles, etc? Ce sont là deux grosses objections à l'emploi des séries comme procédé de définition.

Toutefois, dans certains cas simples, le développement même qui engendre la fonction, met en évidence les propriétés fondamentales de la fonction. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les séries classiques à l'aide desquelles on peut

définir e^z, $\theta(z)$, $\wp(z)$, $\Gamma(z)$, les fonctions θ-fuchsiennes, etc.

Définition par des conditions fonctionnelles.

Un autre procédé de définition consiste à imposer à la fonction cherchée certaines conditions fonctionnelles. C'est ainsi qu'on peut définir la fonction exponentielle en l'assujettissant à être une fonction holomorphe $u = f(z)$ qui admet la période $2i\pi$, et telle qu'à toute valeur de u ne correspondent que les valeurs $z_0 + 2ni\pi$. De même, les fonctions elliptiques se laissent définir par la condition d'être des fonctions méromorphes qui satisfont aux deux relations fonctionnelles:

$$f(z+2\omega_1) \equiv f(z), \qquad f(z+2\omega_2) \equiv f(z),$$

ω_1 et ω_2 étant deux constantes dont le rapport est imaginaire. Des remarques analogues s'appliquent aux fonctions abéliennes fuchsiennes, hyperabéliennes, hyperfuchsiennes, etc, ainsi qu'à la fonction Γ.

Des conditions fonctionnelles d'une autre nature sont celles par lesquelles M. Weierstrass définit les fonctions abéliennes et leurs dégénérescences (voir page 345). Dire en effet que deux fonctions $x(u, v)$ $y(u, v)$ admettent un théorème d'addition, c'est imposer à ces fonctions une condition fonctionnelle, à savoir la condition que $x(u+a, v+b)$ $y(u+a, v+b)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $x(u\, v)$, $y(u, v)$, $x(a, b)$, $y(a, b)$.

L'existence d'une relation fonctionnelle simple constitue évidemment une propriété très importante de la fonction. Mais la détermination et l'étude d'une fonction d'après des conditions fonctionnelles données, est en général un problème de la plus profonde difficulté. Comme travaux se rattachant, dans des cas particuliers, à ce genre de recherches, je citerai notamment

le mémoire de M. Appell sur les fonctions périodiques de deux variables (Journal de Mathématiques, 1891), celui de M. Picard sur une classe de transcendantes nouvelles (qui se rattachent aux transformations de M. Cremona (Acta Mathematica 1894), le mémoire de M. Poincaré sur les fonctions qui admettent un théorème de multiplication (Journal de Mathématiques, 1890.) etc. Sur la théorie générale des équations fonctionnelles, M. Kœnigs a publié d'importants résultats qui lui ont permis de résoudre certains problèmes avec une rare élégance; ses recherches ont été poursuivies par M. Grévy[1].

Définition à l'aide des équations différentielles.

Ce mode de définition apparaît comme le plus naturel puisque le but final de l'analyse doit être, en somme, d'intégrer les équations différentielles à une ou plusieurs variables. Les transcendantes T engendrées par les équations différentielles algébriques en $x, y, y', \ldots$,[2] comprennent la plupart des fonctions usuelles. Ces transcendantes T, comme nous l'avons remarqué déjà, n'épuisent pas toutes les transcendantes possibles; autrement dit, ce nouveau procédé de définition est moins général que le premier. C'est ainsi que la fonction Γ qui peut être définie soit par une série, soit par des conditions fonctionnelles, ne fait pas partie des transcendantes (T), non plus que la

---

[1] Voir les Annales de l'Ecole Normale Supérieur (1887-1894) ainsi que le Recueil des Savants Etrangers..... (1894).

---

[2] Il serait loisible, il est vrai, d'introduire des équations différentielles transcendantes, mais une étude générale de telles équations serait prématurée.

transcendante de M. Fredholm (engendrée par une série de Taylor). Une remarque analogue s'applique d'ailleurs au second procédé de définition comparé au premier: il est clair qu'une transcendante analytique, engendrée par une série de Taylor quelconque, ne jouira d'aucune propriété fonctionnelle simple.

A l'étude des transcendantes (T) se rattachent étroitement d'autres théories qui introduisent des transcendantes distinctes des (T): tout d'abord, cette étude conduit, comme on sait, à considérer l'intégrale générale d'un système différentiel non plus seulement comme fonction de x, mais comme fonction des constantes d'intégration. C'est ainsi que l'intégrale $y(x)$ de l'équation du second ordre (A) (voir page 507), est une fonction uniforme $y = \varphi(x, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$ des constantes y_0, y'_0, fonction qui jouit de propriétés intéressantes: les relations:

$$y = \varphi(\bar{x}, y_0, y'_0, \bar{x}_0), \qquad y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{x}, y_0, y'_0, x_0) \equiv \psi(\bar{x}, y_0, y'_0, \bar{x}_0)$$

établissent une correspondance biuniforme remarquable entre y, y' et y_0, y'_0. Il est vrai qu'ici les fonctions $y = \varphi(y_0, y'_0)$, $y'_1 = \psi(y_0, y'_{0})$ se laissent définir par un système différentiel algébrique (voir pages 502-506) et rentrent par suite, dans la classe (T) Mais il n'en sera pas ainsi en général.

Si maintenant l'équation différentielle considérée dépend analytiquement de paramètres, soit du paramètre α, il est loisible d'étudier l'intégrale comme fonction de α. Considérons, par exemple, l'équation différentielle linéaire du second ordre:

$$(E) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = P(x, \alpha)\frac{dy}{dx} + Q(x, \alpha)\, y,$$

où P, Q sont des polynômes en x, α: si x_0, y_0, y'_0 et α désignent des valeurs numériques, l'intégrale $y(x)$ définie par les conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ est une fonction holomorphe

de α, $y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}'_0, \bar{y}_0, \bar{x}_0, \alpha)$, ainsi qu'on le voit aisément, et cette fonction ne rentre pas en général dans la classe (T).

Considérons de même l'équation différentielle :

$$(e) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\,(y-1)\,(y-\alpha)$$

et soit $y = \varpi(x, \alpha)$ l'intégrale de cette équation qui s'annule avec x ; la fonction $\varpi(\bar{x}, \alpha)$ est une transcendante méromorphe en α, mais cette transcendante vérifie une équation différentielle du second ordre algébrique et de l'espèce (B) [voir page 508][1].

Plus généralement, soit :

$$(1) \qquad F(\alpha, x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

une équation algébrique en $\alpha, x, y, y', \dots y^{(n)}$, et soit $x(\alpha)$, $x_0(\alpha)$, $y_0(\alpha)$, $y'_0(\alpha)$, ... $y_0^{(n-1)}(\alpha)$ des fonctions données de α (algébriques par exemple). L'intégrale $y(x)$ de (1), définie par les conditions initiales $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, est une fonction de α, soit $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0, \dots\dots y_0^{(n-1)}, \alpha) \equiv \Phi(\alpha)$, fonction dont l'étude est intimement liée à celle de l'équation (1) les transcendantes $\Phi(\alpha)$ ainsi obtenues n'appartiennent à la classe (T) que dans des cas particuliers. C'est ainsi que, pour l'équation (e), quand on fait $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x = c_1\omega_1(\alpha) + c_2\omega_2(\alpha)$ [ω_1 et ω_2 désignant les périodes de $\varpi(x)$, c_1 et c_2 des constantes], la fonction $\varpi[c_1\omega_1(\alpha) + c_2\omega_2(\alpha), \alpha] \equiv \Phi(\alpha, c_1, c_2)$ est l'intégrale générale de l'équation différentielle algébrique (A) [voir page 503].

C'est à cet ordre d'idées que se rattachent les travaux si importants sur les fonctions qu'introduisent les intégrales définies, telles que la fonction Γ, les fonctions représentées par l'intégrale hypergéométrique :

$$y(x) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u-\alpha_1)^{b_1-1}(u-\alpha_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du\,;$$

---

(1) Il faut faire, dans (B), $x = \alpha$ et $X = \dfrac{x}{4\alpha(\alpha-1)}$.

ces dernières sont en même temps des fonctions (T) qui intègrent une équation linéaire du second ordre. Quant à la fonction Γ elle est représentée, comme on sait, dans un demi-plan, par l'intégrale:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx;$$

si on observe que la fonction $y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{x} x^{\alpha-1} dx$, vérifie l'équation

$$(1)' \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\left[-1 + \frac{\alpha-1}{x}\right]$$

on voit que $\Gamma(\alpha)$ se laisse définir de la manière suivante: dans le voisinage de $x=0$, toutes les solutions $y'(x)$ de (1)' sont de la forme:

$$y' = x^{\alpha-1}\left[C(\alpha) + \varepsilon\right],$$

ou ε tend vers zéro avec x et où $C(\alpha)$ est arbitraire. Soit $y(x,\alpha)$ la solution de (1)' définie par les conditions initiales $x_0=0$, $y_0=0$, $C(\alpha) \equiv 1$, la fonction $y(x\ \alpha)$, pour $x=\infty$, coïncide avec $\Gamma(\alpha)$.

J'ajoute qu'au lieu d'employer, comme mode de génération des fonctions, une seule opération de l'espèce précédente, on peut combiner de telles opérations d'une façon quelconque. Le mot combinaison doit être pris ici dans son sens le plus large, et implique des inversions, des itérations de fonctions, etc. Par exemple, la fonction modulaire $y=\varphi(x)$ est engendrée par l'inversion d'une fonction $x(y)$ représentée par le quotient de deux intégrales définies:

$$x = \frac{\displaystyle\int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3-27y(u+1)}}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3-27y(u+1)}}} \equiv \frac{\omega_2(y)}{\omega_1(y)};$$

la fonction $\varphi(x)$, ainsi que les fonctions $\omega_1(y)$, $\omega_2(y)$ rentrent d'ailleurs dans la classe des transcendantes T {voir page 8}.

Ces remarques suffisent à mettre en évidence les relations qui existent entre les diverses théories que nous venons d'énumérer (pages 529-534), et l'appui naturel qu'elles sont susceptibles de se prêter. L'étude des transcendantes les plus simples, les plus riches en propriétés, pourra être faite en partant soit de développements en séries, soit de propriétés fonctionnelles, soit d'équations différentielles (dépendant ou non de paramètres, etc).

Résumé des résultats obtenus. Problèmes à résoudre — C'est à l'étude des transcendantes (T), considérées comme fonctions soit de la variable, soit des constantes arbitraires, que nous avons consacré ces leçons. Nous avons établi, au sujet des singularités de ces transcendantes, quelques propositions générales, et mis en évidence certaines conditions qui sont nécessaires pour qu'il existe des singularités essentielles mobiles. Ces proposition conduisent à diviser les systèmes différentiels en deux classes, une classe générale et une classe singulière pour laquelle certaines conditions exceptionnelles sont remplies. Si maintenant on représente par E_n une équation d'ordre quelconque dont l'intégrale générale n'acquiert que n valeurs autour des points critiques mobiles, deux cas généraux sont à distinguer suivant que E_n appartient à la classe <u>générale</u> ou à la classe <u>singulière</u>: dans le premier cas, l'intégrale de E_n est une fonction <u>algébrique</u> des constantes y_0, y'_0 ....; dans le second cas, c'est une fonction <u>transcendante</u> des constantes (de quelque façon qu'on les choisisse), et cela qu'il existe ou non des singularités essentielles mobiles.

Les équations E_n de la classe générale (pour n quelconque) et les équations dont l'intégrale renferme algebriquement

les constantes se confondent donc. La nature de l'intégrale d'une telle équation E_n a été complètement élucidée dans ces leçons. Quant au problème qui consiste à reconnaître si l'intégrale d'une équation différentielle donnée dépend algébriquement des constantes, les méthodes que nous avons indiquées permettent de le traiter dans des cas très étendus (et notamment quand on se donne n). Mais pour résoudre ce problème dans tous les cas sans aucune donnée, il faudra surmonter certaines difficultés relatives à l'irréductibilité de la relation algébrique qui définit l'intégrale, difficultés du même ordre que celles que nous avons déjà signalées à propos de l'intégration algébrique des équations du 1er ordre (page 195 et page 215).

Passons aux équations E_n de la classe singulière en nous limitant au second ordre. Nous avons distingué ces équations en deux catégories suivant que leur intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes, (c'est-à-dire une fonction algébrique d'une des deux constantes convenablement choisies), ou est au contraire une fonction transcendante de l'une et de l'autre constante (de quelque façon qu'on les choisisse). Nous avons appris à intégrer les équations E_n de la première catégorie et défini la nature de leur intégrale. Quant au problème qui consiste à reconnaître si une équation du second ordre donnée rentre dans cette catégorie, il prête aux mêmes observations que le problème analogue du paragraphe précédent, à cela près qu'une nouvelle difficulté peut provenir de l'existence de points essentiels mobiles.

Enfin nous avons formé un type d'équations E_1 de la seconde catégorie, c'est-à-dire un type d'équations du second ordre à points critiques fixes dont l'intégrale est une fonction transcendante

de chaque constante (de quelque façon qu'on les choisisse). La question est maintenant de les former tous, autrement dit de déterminer sans aucune restriction toutes les équations du second ordre à points critiques fixes. C'est là un problème du plus haut intérêt, non seulement à cause de son importance intrinsèque, mais parce qu'il apportera, une fois résolu, de précieux renseignements sur le mécanisme par lequel s'introduisent les singularités essentielles mobiles, renseignements qui seront sûrement utiles à l'étude des ordres supérieurs.

Quand x ne figure pas explicitement, j'ai résolu ce problème pour les équations $y''=R(y',y)$, où R est rationnel en y', y, ainsi que pour les systèmes du second ordre qui proviennent de l'inversion de deux différentielles totales algébriques. De plus, j'ai déterminé toutes les équations $F(y'',y',y)=0$, de genre p plus grand que zéro, dont l'intégrale n'a comme singularités mobiles que des pôles. Dans ces différents cas, l'intégrale est une fonction algébrique ou semi-transcendante des constantes. Il est bien vraisemblable qu'il en est de même dans tous les cas où l'intégrale d'une équation $F(y'',y',y)=0$, est uniforme, et que la complication algébrique de cette équation ne fait (comme pour le premier ordre), que simplifier l'intégration. C'est là un résultat qu'il serait très intéressant de démontrer rigoureusement.

Quand x figure explicitement, les méthodes développées dans ces leçons fournissent d'importantes indications (qui peuvent être poussées plus loin encore); elles m'ont permis de former toutes les équations $F(y'',y',y,x)=0$ (algébriques en y'',y',y et de genre p plus grand que 1) dont l'intégrale n'a d'autres singularités mobiles que des pôles, et suffiront très probablement à déterminer toutes les équations E_1 qui n'ont pas de points essentiels mobiles. Quant à l'étude des équations E_1 à points essentiels mobiles, on peut l'aborder

par trois voies différentes : 1° en poursuivant le plus loin possible les conditions nécessaires pour que l'intégrale ait ses points critiques fixes ; 2° en développant la théorie des transformations biuniformes[1] des surfaces algébriques ; 3° en déterminant, parmi les classes d'équations du second ordre, réductibles, toutes celles qui ont leurs points critiques fixes. C'est seulement par une combinaison de ces trois méthodes (méthodes où interviendront la théorie des groupes continus, ainsi que des considérations arithmétiques) qu'on parviendra à épuiser la question.

En définitive, les problèmes qu'il semble à la fois le plus intéressant et le plus simple d'aborder actuellement sont la détermination 1° De toutes les équations du second ordre :

$$F(y'', y', y, x) = 0 \quad [\text{algébriques en } y'', y', y],$$

à singularités non polaires fixes ; 2° de toutes les équations $F=0$ intégrables ou réductibles, à points critiques fixes.

Des observations analogues s'appliquent, moyennant des complications nouvelles, aux équations E_1 (ou E_n) d'ordre quelconque.

Sur quelques applications des résultats précédents _

Ce sont surtout les équations de l'espèce E_n qui ont fait l'objet de ces leçons. Mais les méthodes appliquées à ces équations peuvent s'employer utilement à l'étude d'équations quelconques.

---

(1) Il semble que la méthode nouvelle introduite par M. Borel pour étudier les singularités essentielles des fonctions uniformes (Comptes Rendus, 1896) soit appelée à jouer, dans une telle théorie, un rôle important.

Considérons, par exemple, un système différentiel du second ordre:

$$(S)\qquad \frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)},$$

où X, Y, Z sont algébriques en x, y, z. Ce système définit une courbe gauche de l'espace complexe $Oxyz$, courbe qui dépend de deux constantes arbitraires. Si on regarde y et z comme les fonctions, x comme la variable, $y(x)$ et $z(x)$ n'admettront de singularités essentielles mobiles que si S possède (pour toute valeur de x_0) une solution de la forme:

$$x = x_0, \qquad X_1(x_0, y, z) = 0,$$

On voit aussitôt que quand on a préalablement effectué sur x, y, z une transformation homographique à coëfficients quelconques, la condition en question n'est pas remplie; l'intégrale $y(x)$, $z(x)$ de (S) peut présenter comme singularités mobiles, des singularités algébriques ou transcendantes, mais point de singularités essentielles.

Une proposition analogue s'étend aux systèmes S' d'ordre quelconque.

Considérons maintenant un système de la forme:

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} P_{11}(x_1, \dots x_n)\,dx_1 + P_{12}(x_1, \dots x_n)\,dx_2 + \dots + P_{1n}(x_1, \dots x_n)\,dx_n = du_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{n1}(x_1, \dots x_n)\,dx_1 + P_{n2}(x_1, \dots x_n)\,dx_2 + \dots\dots + P_{nn}(x_1, \dots x_n)\,dx_n = du_n. \end{cases}$$

où les premiers membres sont des différentielles exactes, algébriques et de première espèce. On établit bien aisément que l'intégrale générale $x_1(u_1, \dots u_n), \dots\dots x_n(u_1, \dots u_n)$ de (Σ) ne saurait, dans aucun cas, présenter de singularités essentielles mobiles. Cette

proposition permet de construire toute une théorie des fonctions méromorphes $2n$-fois périodiques de n variables, sans s'appuyer sur le théorème d'Abel ni sur la doctrine des courbes algébriques, mais en ayant recours aux seules propriétés des systèmes différentiels.[1] Ajoutons que la proposition énoncée cesse d'être exacte quand les différentielles totales $\sum_{j=1}^{j=n} P_{ij}\, dx_j$ sont de seconde ou de troisième espèce.

Application à la recherche des intégrales premières des systèmes différentiels.

Une application d'une toute autre nature est relative à la recherche des intégrales premières des systèmes différentiels. Considérons un système:

$$(S)\ \frac{dx}{X(x, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m)} = \frac{dx_1}{X_1(x, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x, x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m)}$$

$$= \frac{dy_1}{Y_1(x, x_1, \ldots x_n\, y_1 \ldots y_m)} = \cdots = \frac{dy_m}{Y_m(x, x_1, \ldots x_n\, y_1 \ldots y_m)},$$

où les X, Y sont algébriques en $y_1 \ldots y_m$, algébriques ou simplement analytiques en $x, x_1, \ldots x_n$. Je me propose de déterminer les intégrales premières de (S) algébriques en $y_1, \ldots y_m$.

Soit $\quad f(x, x_1 \ldots x_n, y_1, \ldots y_m, c) = 0,$

une intégrale première de (S) où f est un polynôme d'un certain degré μ en $y_1, \ldots y_m$, c (c désignant une constante). On peut toujours reconnaître, à l'aide d'un nombre fini de différentiations, si (S) possède effectivement une telle intégrale. Quand il en est ainsi, de quelles intégrations dépend le calcul de f? Deux cas sont ici à distinguer suivant que (S) admet ou non des intégrales premières $\varphi(x, x_1, \ldots x_n) = C^{te}$ indépendantes de $y_1, \ldots y_m$

---

(1) Voir les Comptes-Rendus, Avril 1896.

S'il n'existe aucune intégrale première $\varphi(x, x_1, \ldots x_n) = C^{te}$, l'intégrale $f=0$ ne saurait dépendre que d'un nombre <u>fini</u> de paramètres, et son calcul revient à l'intégration d'un système différiel ordinaire dont toutes les singularités non polaires sont fixes; en particulier, quand (S) n'admet pas deux intégrales premières $f=0$ (de degré μ) distinctes, f est donné par l'intégration d'une équation de Riccati ou par des quadratures.

S'il existe l intégrales premières $\varphi(x, x_1, \ldots x_n) = C^{te}$ qui soient distinctes $[l \leq n]$, leur détermination dépend d'un système différentiel d'ordre l qui peut être de nature quelconque. Ce système une fois intégré, la détermination des intégrales premières $f=0$ n'exige plus, comme plus haut, que l'intégration d'équations différentielles ordinaires à points critiques et essentiels fixes.

Je me borne à énoncer ici ces résultats dont la démonstration fera l'objet d'un mémoire étendu.

Intégrales premières des équations de la Dynamique algébriques par rapport aux vitesses. — Prenons, en particulier, un système (S) de la forme:

$$(S) \qquad \frac{dx_i}{dt} = x_i' \qquad \frac{dx_i'}{dt} = \frac{P_i\,(x_1' \ldots x_n', x_1, \ldots x_n)}{Q\,(x_1', \ldots x_n', x_1, \ldots x_n)}, \quad [i = 1, 2, \ldots n],$$

où Q et les P_i sont des polynômes en $x_1', \ldots x_n'$, et dépendent analytiquement de $x_1, \ldots x_n$.

Il est, d'abord, bien facile de voir que toute intégrale première, algébrique par rapport aux vitesses, peut être rendue rationnelle en $x_1', \ldots x_n'$. Comme le système (S) n'admet pas d'intégrale première de la forme $\varphi(x_1, \ldots x_n) = C^{te}$, toute intégrale première $R(x_1, \ldots x_n, x_1' \ldots x_n') = C^{te}$ de (S) [où R est une fraction rationnelle en $x_1', \ldots x_n'$ de degré ν] sera donnée par une équation différentielle ordinaire à singularité

non polaires fixes.

Soit p et ϖ le degré maximum et le degré minimum des termes des P_i en $x'_1, \dots x'_n$, et soit P'_i, P''_i l'ensemble des termes de P_i qui sont respectivement de degré p et de degré ϖ. Soit de même q et K le degré maximum et le degré minimum des termes de Q, et soit Q', Q'' l'ensemble des termes de Q qui sont de degré q et K. Si p est inférieur à $q+2$, ou si ϖ est supérieur à $K+2$, on montre que les intégrales de la forme $R = C^{te}$ sont données par de simples quadratures. Si p est égal à $q+2$, le calcul des intégrales $R = C^{te}$ de (S) revient, moyennant des quadratures, au calcul des intégrales analogues $\rho = C^{te}$ du système:

$$(S') \qquad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{P'_i\,(x'_1, x'_n, x_1, \dots x_n)}{Q'_1\,(x'_1 \dots x'_n, x_1, \dots x_n)};$$

[S' est rationnel et homogène en $x'_1, \dots x'_n$]: quand le système (S') s'intègre algébriquement, les intégrales premières $R = C^{te}$ de (S) sont données par des quadratures. — Si ϖ est égal à $K+2$, les mêmes propositions subsistent à condition de remplacer (S') par le système:

$$(S'') \qquad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{P''_i\,(x'_1, \dots x'_n, x_1, \dots x_n)}{Q''\,(x'_1 \dots x_n\ x_1 \dots x_n)}.$$

Ces théorèmes s'appliquent notamment aux équations de la dynamique qui définissent le mouvement d'un système matériel à liaisons indépendantes du temps, et soumis à des forces qui sont fonctions seulement de la position du système. Si notamment les géodésiques du système [trajectoires du mouvement sans forces] sont algébriques, les intégrales premières, algébriques par rapport aux vitesses, sont données par des <u>quadratures</u> quelles que soient les

forces : c'est ce qui a lieu, par exemple, pour les systèmes de points matériels libres. En m'appuyant sur ces propositions, j'ai pu généraliser le théorème de M. Bruns sur les intégrales premières du problème des n corps et montrer que ce problème n'admet pas d'intégrales premières algébriques par rapport aux vitesses, en dehors des intégrales classiques. Les mêmes propositions trouvent également une heureuse application dans la Dynamique du corps solide.

Applications au domaine réel.

Dans tout ce qui précède, nous avons constamment embrassé le champ réel et imaginaire des variables. Mais il est clair que les méthodes employées, subsistent à fortiori quand on se restreint au domaine réel, et que les résultats doivent même se simplifier, au moins dans bien des cas. C'est là un point important sur lequel je voudrais, en terminant ces leçons, donner quelques indications sommaires

— Courbes réelles définies par un système différentiel.

Soit d'abord un système différentiel :

(1) $$\frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)}$$

où X, Y, Z sont des polynômes en x, y, z à coëfficients réels. Ce système définit une famille à deux paramètres de courbes réelles C de l'espace $Oxyz$. Si (X n'étant pas identiquement nul), on regarde x comme la variable, y et z comme les fonctions, la condition pour que $y(x)$, $z(x)$ présentent des points essentiels mobiles $x=x_0$ s'interprète aussitôt de la façon suivante : il faut et il suffit que les courbes (C) renferment un faisceau à un paramètre de courbes planes (C') dont le plan varie en restant

parallèle à yOz, et que de plus ces courbes (C') soient des cycles limites (au sens de M. Poincaré) des courbes (C). Quand on a effectué préalablement sur x, y, z une transformation homographique réelle quelconque, la condition précédente n'est pas remplie, et $y(x)$, $z(x)$ ne deviennent indéterminés pour aucune valeur réelle de x (si ce n'est peut-être pour certaines valeurs fixes $x = \xi$). Des remarques analogues s'appliquent à un système (1) où X, Y, Z sont des fonctions algébriques de x, y, z, réelles dans un certain domaine D de l'espace réel $Oxyz$, ou plus généralement à un tel système (1) d'ordre quelconque.

Dans bien des cas, on est conduit à étudier les coordonnées x, y, z des courbes réelles (C) comme fonctions d'un paramètre réel t. Autrement dit, on considère un système :

$$(1)' \qquad dt = \frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)},$$

où X, Y, Z sont algébriques.

Supposons d'abord que X, Y, Z soient des polynômes (réels) en x, y, z, et soit x_0, y_0, z_0 les valeurs de x, y, z pour $t = 0$. Quand t croît à partir de zéro, les fonctions $x(t)$ $y(t)$, $z(t)$ sont holomorphes tant que t ne dépasse pas une certaine limite t_1. Quand t tend vers t_1, trois hypothèses sont possibles : ou bien, le point M (de coordonnées x, y, z) tend vers un point limite M_1 ; les fonctions x, y, z de t sont encore holomorphes pour $t \geqslant t_1$; — ou bien M s'éloigne indéfiniment ; — ou bien M ne tend ni vers l'infini, ni vers aucune position limite. Mais cette dernière hypothèse est à rejeter : car soit $\rho(t)$ la plus grande des quantités $|x(t)|$, $|y(t)|$, $|z(t)|$; si, quand t tend vers t_1, les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ne tendent pas respectivement vers des valeurs finies, les théorèmes de la 18e leçon (p. 419-423)

montrent que $\varrho(t)$ doit tendre vers l'infini. Si donc, pour $t = t_1$, les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ cessent d'être holomorphes, M s'éloigne indéfiniment lorsque t tend vers t_1. Le même résultat subsiste pour un système différentiel d'ordre quelconque:

$$dt = \frac{dx_1}{X_1(x_1 x_2 \ldots x_n)} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{dx_n}{X(x_1, x_2 \ldots x_n)},$$

où $X_1, X_2 \ldots, X_n$ sont des polynômes réels en $x_1, \ldots x_n$.

Mais il faut bien se garder de conclure de là que $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ tendent respectivement vers l'infini quand t tend vers t_1; tout ce que nous savons, c'est que $(x^2+y^2+z^2)$ tend vers l'infini, mais x, y, z peuvent être entièrement indéterminés pour $t = t_1$. Considérons, par exemple, le système,

(1)' $$dt = \frac{+dx}{y(x^2+y^2)^2 + \frac{x}{2}(x^2+y^2)} = \frac{-dy}{x(x^2+y^2)^2 - \frac{y}{2}(x^2+y^2)};$$

la courbe

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \sin\frac{1}{1-t}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \cos\frac{1}{1-t},$$

est une des courbes intégrales de (1'); quand t tends vers 1, $x^2+y^2 = \frac{1}{1-t}$ tend vers l'infini, mais x oscille indéfiniment (ainsi que y) entre des limites de plus en plus grandes.

Soit, de même le système:

$$dt = \frac{dx}{yz^2 + \frac{x}{2}(x^2+y^2)} = \frac{-dy}{xz^2 - \frac{y}{2}(x^2+y^2)} = \frac{-dz}{(x^2+y^2)^2};$$

ce système admet, comme courbe intégrale la courbe:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \sin\frac{1}{1-t}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \cos\frac{1}{1-t}, \quad z = \frac{1}{1-t}.$$

Lorsque, dans le système (1)', X, Y, Z ne sont plus des polynômes, il peut arriver que, t tendant vers t_1, le point x, y, z ne tende ni vers l'infini ni vers une position déterminée. Par exemple, le système:

$$dt = \frac{dx}{1} = \frac{dy}{\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{x^2}\right)}$$

admet la courbe intégrale

$$x = t-1 \qquad y \cos \frac{1}{t-1},$$

et quand t tend vers 1, x tend vers zéro, y oscille entre -1 et $+1$.

De même le système:

(2) $$dt = \frac{-dx}{\left(\frac{y}{z^2}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{x}{z^2}\right)} = dz$$

admet la courbe intégrale:

$$x = \sin\frac{1}{t-1}, \; y = \cos\frac{1}{t-1}, \; z = t-1.$$

Quand cette singularité se présente, soit $D(x,y,z)=0$ l'équation de la surface le long de laquelle X, Y, Z, deviennent infinis, et soit $\rho(t)$ la plus petite (à l'instant t) des quantités $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, $|D(x,y,z)|$. D'après les théorèmes de la 18ème leçon, $\rho(t)$ tend vers zéro quand t tend vers t_1.

Si on dispose du paramètre t, il est toujours loisible de multiplier X, Y, Z par un polynôme Δ tel que X, Y, Z restent finis en tout point (x, y, z) à distance finie. Dans ces conditions, quand t tend vers t_1, M tend vers une position M_1 déterminée ou tend vers l'infini. Les mêmes remarques s'appliquent à un système (1)' d'ordre quelconque.

D'une façon précise, on peut chercher à introduire un paramètre réel t, tel que la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0, z_0) soit représentée tout entière [quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$] par les fonctions $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, où φ, ψ, χ sont développables en séries qui convergent pour toute valeur réelle de t.

Un paramètre introduit par M. Poincaré est le suivant[1]: il est loisible d'admettre (en augmentant d'une

[1] Journal de Mathématiques, 1886

unité, s'il est nécessaire, le nombre des variables $x_1, \dots x_r$) que les X_i sont des polynômes en $x_1, \dots x_n$. Posons alors

$$\frac{dt}{1+X_1^2+\dots+X_n^2} = \frac{dx_1}{X_1(x_1,\dots x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1\dots x_n)} = \dots \frac{dx_n}{X_n(x_1,\dots x_n)}$$

Il résulte aussitôt des théorèmes généraux établis ci-dessus que les fonctions $x_i(t)$, définies par le nouveau système, sont holomorphes pour toute valeur réelle de t, ou plus précisément holomorphes dans une certaine bande B du plan des t comprise entre deux parallèles à l'axe réel des t, distantes de cet axe d'une certaine quantité a. En observant que la fonction $\theta = \frac{1-e^{\lambda t}}{1+e^{\lambda t}}$ $\left[\text{où } \lambda = \frac{\pi}{2a}\right]$ effectue la représentation conforme de la bande B sur un cercle de rayon 1 ayant l'origine comme centre, on voit que les fonctions $x_i(t)$ sont développables suivant les puissances croissantes de $\left(\frac{1-e^{\lambda t}}{1+e^{\lambda t}}\right)$, les séries ainsi obtenues convergeant pour toute valeur réelle de t.

Mais il faut bien se garder de croire qu'on a résolu de cette manière le problème qui consiste à représenter une courbe intégrale toute entière à l'aide d'un développement analytique unique. En effet, quand t variera de $-\infty$ à $+\infty$ le point $(x_1, \dots x_n)$ ne parcourra en général qu'une portion de la courbe intégrale étudiée.

Considérons, par exemple, les courbes définies par le système :

$$\frac{dx}{x^3} = \frac{dy}{2(x^4+x^2-y)},$$

courbes dont l'intégrale générale est : $y = x^2 + 1^{\frac{1}{x^2}}$, et cherchons à représenter, à l'aide du paramètre t introduit plus haut, les coordonnées x, y de la courbe intégrale

qui passe par le point $x=-1$, $y=1$. Posons :

$$\frac{dx}{x^3} = \frac{dy}{2(x^4+x^2-y)} = \frac{dt}{x^6+4(x^4+x^2-y)^2},$$

et soit $x(0)=-1$, $y(0)=1$. Quand t croît de 0 à $+\infty$, x croît de -1 à zéro ; quand t décroît de 0 à $+\infty$, x décroît de -1 à $-\infty$ le point (x, y), quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$ parcourt la demi-parabole $y=x^2$ située du côté des x négatifs ; or la courbe intégrale considérée se prolonge sans ambiguité par la demi-parabole située du côté des x positifs ; car il ne passe par l'origine qu'une seule courbe intégrale $y=x^2$.

Soit plus simplement à étudier les courbes intégrales du système :

$$\frac{dy}{y} = n\frac{dx}{x},$$

où n est un entier positif ou négatif. Si on se propose de suivre d'une façon continue la même courbe analytique réelle tant que la chose est possible (ou encore de suivre la même courbe réelle assujettie à avoir une tangente continue), on trouve qu'une courbe intégrale quelconque est représentée tout entière par la formule : $y=Cx^n$. Au contraire, le paramètre t introduit plus haut, ne définit qu'une portion de la courbe située du même côté de l'axe des y.

Observons d'ailleurs qu'il est évidemment possible d'introduire d'une infinité de manières un paramètre réel t telles que les fonctions $x_1(t), \dots x_n(t)$ soient holomorphes le long d'une certaine bande comprenant l'axe réel des t. Soit $x_1^0, \dots x_n^0$ des valeurs dans le domaine desquelles $X_1, \dots X_n$ soient holomorphes, et soit $X_1(x_1^0, \dots x_n^0) \neq 0$; les fonctions $x_2(x_1), \dots x_n(x_1)$ répondant à ces conditions initiales sont holomorphes entre des valeurs a et b de x_1 qui comprennent x_1^0. Si on

pose $x_1 - \frac{(a+b)}{2} = \mu$ artgt, μ étant une constante positive inférieure à $\frac{|b-a|}{\pi}$, et l'artg. étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, les fonctions $x_1(t), \ldots x_n(t)$ seront holomorphes pour des valeurs réelles quelconques de t, mais, quand t variera de $-\infty$ à $+\infty$, le point $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ne parcourra que la partie de la courbe correspondant aux valeurs de x_1 comprises entre $\frac{a+b}{2} \pm \mu\frac{\pi}{2}$.

Dans d'autres questions, le paramètre t est essentiellement donné. C'est ce qui a lieu notamment pour les équations de la Dynamique que nous allons étudier en dernier lieu.

Equations différentielles de la Dynamique — Soit S un système matériel à n degrés de liberté dont les liaisons sont indépendantes du temps ; je suppose S dénué de frottement et soumis à des forces données qui sont fonctions de la seule position du système. Le problème général de la Dynamique consiste à calculer la position du système à un instant t quelconque, connaissant la position et les vitesses de S à l'instant $t=0$.

La première question qui se pose est de savoir si la chose est théoriquement possible. Tout d'abord, quand S passe par certaines positions singulières il arrive, comme il est bien connu, que les équations de la Dynamique ne permettent plus de poursuivre l'étude du mouvement.

Soit, par exemple, M un point matériel de masse 1 repoussé par l'origine O proportionnellement à la racine cubique de la distance $OM = r$. Le point O est pour M une position singulière: quand on place le point M en O sans vitesse, les équations du mouvement sont vérifiées

que M reste au repos, ou que M décrive une demi droite issue de 0, suivant la loi : $r = k^3 t^3$, (k^2 désignant le coëfficient de répulsion). D'après cela, quand M (à l'instant $t = 0$) est lancé vers 0 avec une vitesse $r_0' = -3 k r_0^{\frac{2}{3}}$, le point M atteint l'origine au bout du temps $t_1 = \frac{r_0^{\frac{1}{3}}}{k}$ avec une vitesse nulle, et pour $t > t_1$ les équations de la Dynamique laissent le choix entre l'équilibre et une infinité de mouvements.

Soit de même M_1, M_2 deux points matériels qui s'attirent suivant les lois de Newton et qui à l'instant $t = 0$ sont lancés l'un vers l'autre. Au bout d'un temps fini t_1 les deux corps se choquent avec des vitesses infinies et de sens contraire : le mouvement subit forcément à l'instant t_1 une brusque discontinuité que les équations de la mécanique ne suffisent pas et ne sauraient suffire à calculer ; car cette discontinuité dépend de la constitution des deux corps, de leur élasticité, des phénomènes thermiques qui accompagnent le choc, etc. Si, en particulier, les deux corps sont parfaitement mous, il resteront en contact et parcourront la trajectoire rectiligne de leur centre de gravité. S'ils sont parfaitement élastiques, ils s'écarteront avec des vitesses infinies et de sens contraire.

Voici enfin un exemple où S tend vers une position singulière sans que les vitesses tendent vers une limite. Soit M un point matériel de masse 1, lancé dans le plan xoy, et soumis à la force :

$$X = \frac{y - x}{x^2 + y^2} \quad , \quad Y = \frac{-(y+x)}{x^2+y^2} .$$

l'origine est une position singulière pour M. Les équations :

$$x'' = \frac{y - x}{x^2 + y^2} \quad , \quad y'' = \frac{-(y+x)}{x^2+y^2} \quad ,$$

admettent les solutions:

$$x = (t_1 - t)\sin[\log(t_1 - t)], \quad y = (t_1 - t)\cos[\log(t_1 - t)],$$

où t_1 est une constante quelconque. Quand t tend vers t_1, le point M tend vers l'origine, sa vitesse est constamment égale à $\sqrt{2}$, mais la direction de cette vitesse ne tend vers aucune direction limite.

Singularités essentielles des équations de la Dynamique. Dans les exemples précédents, le système S (lorsque t tend vers t_1) tend vers une position déterminée pour laquelle les équations du mouvement cessent d'être régulières. Mais une singularité beaucoup plus inattendue peut arrêter la discussion du mouvement: il arrive que, t tendant vers t_1, S ne tende vers aucune position limite (sans pour cela s'éloigner indéfiniment)[1]

Exemples — I — Soit M un point libre de masse 1 soumis à la force:

$$X = \frac{-(x+y)}{z}, \quad Y = \frac{x-y}{z}, \quad Z = 2.$$

Les équations du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-(x+y)}{z}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{x-y}{z}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 2$$

---

[1] Il est très facile de former des exemples pour lesquels S (ou certains points de S) s'éloignent indéfiniment en un temps fini. Par exemple, soit M un point repoussé par l'origine proportionnellement au carré de la distance: M s'éloigne indéfiniment en un temps fini. Si de plus, M est repoussé par un autre point mobile M_1 en raison inverse du carré de la distance, quand t tend vers un certain instant t_1, M s'éloigne indéfiniment et pour $t > t_1$, M_1 est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

admettent les solutions:

$$x = \sin[\log(t_1 - t)], \quad y = \cos[\log(t_1 - t)], \quad z = (t_1 - t)^2 .$$

Quand t tend vers t_1, le point M tend vers la circonférence Γ de centre O et de rayon 1 située dans le plan $z=0$ (plan où la force est infinie), mais M ne tend vers aucun point déterminé de cette circonférence, sa projection sur le plan xoy parcourt Γ un nombre indéfini de fois quand t tend vers t_1.

II — Soit encore M un point libre et soumis à la force:

$$X = \frac{y-x}{x^2+y^2}, \quad Y = \frac{-(y+x)}{x^2+y^2}, \quad Z = \frac{x-3y}{(x^2+y^2)^2} :$$

Les équations du mouvement admettent la solution

$$x = (t_1-t)\sin[\log(t_1-t)], \quad y = (t_1-t)\cos[\log(t_1-t)], \quad z = \frac{1}{t_1-t}\sin[\log(t_1-t)].$$

Quand t tend vers t_1, le point M tend vers un point de l'axe oz (le long duquel la force est infinie), mais quand t varie entre $t_1 - e^{-n\pi}$ et $t_1 - e^{-(n+1)\pi}$, le z du point M oscille entre $(-1)^n e^{n\pi}$ et $(-1)^{n+1} e^{(n+1)\pi}$, et ses oscillations sont par suite de plus en plus grandes quand l'entier n croît indéfiniment.

III — Soit M_1 et M_2 deux points de masse 1, respectivement mobiles sur les deux axes rectangulaires ox_1, ox_2; la force qui s'exerce sur M_1 a comme composante selon $0x_1$ l'expression:



$$X_1 = r^{-2}\ (3x_1 + x_2) \ ;$$

la force X_2 qui s'exerce sur M_2 a comme composante selon $0x_2$ l'expression:

$$X_2 = r^{-2}\ (3x_2 - x_1),$$

r désignant la distance $M_1 M_2$

Les équations du mouvement admettent les

solutions :

$$x_1 = \sin [\log (t_1 - t)], \quad x_2 = \cos [\log. (t_1 - t)] ;$$

IV — Soit M_1, M_2 deux points de masse 1, mobiles dans le plan xoy et soumis aux forces :

$$X = X_1 = \frac{-(x+y)}{r^2}, \quad Y = Y_1 = \frac{x-y}{r^2}.$$

Les équations du mouvement admettent les solutions

$$x_1 = \sin [\log (t_1 - t)], \; y_1 = \cos [\log (t_1 - t)],$$

$$x_2 = \sin [\log (t_1 - t)] + t_1 - t, \; y_2 = \cos [\log (t_1 - t)].$$

Quand t tend vers t_1, la distance r des points M_1, M_2 tend vers zéro, mais ces points ne tendent pas vers une position limite : M_1 parcourt un nombre indéfini de fois la circonférence de centre o et de rayon 1.

V — Considérons enfin un système de n points libres qui s'attirent ou se repoussent, les forces qui s'exercent entre deux quelconques des n points satisfaisant au principe de l'action et de la réaction et ne dépendant que des distances respectives des n points.

Soit, par exemple, $n = 4$, et soit r_{ij} la distance des deux points M_i, M_j $(i, j = 1, 2, 3, 4)$. Je suppose que M_1, M_2, M_3, M_4 sont tous de masse égale à 1, que M_1 et M_2 d'une part, M_2 et M_3 d'autre part, enfin M_3 et M_4 se repoussent, les forces de répulsion étant respectivement :

$$F_{12} = \frac{1}{32} [r_{12} + r_{13} + r_{14}]^3$$

$$F_{23} = \frac{1}{16} [r_{12} + r_{13} + r_{14}]^2 [r_{12} + r_{13}],$$

$$F_{34} = \frac{1}{16} [r_{12} + r_{13} + r_{14}]^2 \left[2 r_{13} - \frac{(r_{12} + r_{13} + r_{14})}{4} - 2\right].$$

Si, à l'instant $t=0$, les 4 points sont situés sur ox et lancés suivants cette droite, ils restent constamment sur ox et les équations des mouvements admettent les solutions:

$$x_1 = \frac{1}{t_1 - t}, \quad x_2 = 1 + \sin[\log(t_1 - t)], \quad x_3 = -1 + \cos[\log(t_1 - t)],$$

$$x_4 = -\frac{1}{t - t_1} - \sin[\log(t_1 - t)] - \cos[\log(t_1 - t)],$$

(où t_1 est une constante positive moindre que $\frac{1}{4}$)

Supposons maintenant que, parmi les 4 points, les points M_1, M_2 d'une part, les points M_1, M_3 d'autre part se repoussent, et que les points M_4, M_2 d'une part, M_4, M_3 d'autre part s'attirent, les valeurs absolues des forces $F_{1,2}, F_{1,3}, F_{4,1}, F_{4,3}$, ayant les expressions:

$$F_{1,2} = \frac{r_{31} + r_{32} + r_{34}}{4 r_{14}^2}, \quad F_{13} = \frac{3}{r_{14}^2},$$

$$F_{4,1} = \frac{r_{21} + r_{23} + r_{24}}{4 r_{14}^2}, \quad F_{4,3} = \frac{r_{32} - 3}{r_{14}^2}$$

Les mouvements des quatre points sur l'axe ox comprennent en particulier les suivants:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 - t - \frac{1}{2}\left\{\sin[\log(t_1 - t)] + \cos[\log(t_1 - t)]\right\} \\ x_2 = 3 + \sin[\log(t_1 - t)], \quad x_3 = -3 + \cos[\log(t_1 - t)] \\ x_4 = t - t_1 - \frac{1}{2}\left\{\sin[\log(t_1 - t)] + \cos[\log(t_1 - t)]\right\} \end{cases}$$

où t_1 est une constante positive (moindre que 1). Quand t tend vers t_1, les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, demeurent compris sur l'axe ox entre les points $+4$ et -4, et chacun d'eux oscille un nombre indéfini de fois entre des positions extrêmes dont la distance reste supérieure à $\frac{1}{4}$. Dans l'intervalle de temps $t=0$, $t=t_1$, les quatre points ne se rencontrent jamais, mais la distance $\overline{M_1 M_4}$ décroît et tend vers zéro quand t

tend vers t_1.

Première remarque. — On serait porté à croire que les équations de Lagrange qui présentent les singularités de l'espèce précédente sont tout à fait exceptionnelles. C'est le contraire qui est vrai, et cela à cause de la forme même des équations de la Dynamique. Considérons par exemple l'équation :

$$(\alpha) \qquad x'' = A(x)\, x'^2 + B(x),$$

où A et B sont algébriques en x : cette équation peut être considérée comme l'équation de Lagrange à un paramètre (algébrique par rapport à ce paramètre) la plus générale, la force vive étant $T = e^{-2\int A(x)dx}$, et la fonction de force : $U = \int B(x) e^{-2\int A dx} dx$.

Etudions pour un instant l'équation (α) dans le domaine complexe t : son intégrale $x(t)$ présente, en général des singularités essentielles mobiles. En effet, si $A(x)$ n'est pas une fonction particulière, l'intégrale $\int A(x)dx$ admet au moins une période ω dont la partie réelle est différente de zéro, positive par exemple. Représentons par L un contour fermé du plan des t, tel que si on le parcourt dans le sens direct, $\int A(x)\,dx$ s'augmente de ω.

Soit :

$$\alpha(x) = e^{2\int A(x)dx}, \quad \beta(x) = \int \frac{B(x)}{\alpha(x)} dx,$$

et soit $B_1(x)$ ce que devient $B(x)$ quand on décrit une fois le contour L ; on a :

$$\frac{d\beta_1}{dx} = e^{-2\omega} \times \frac{d\beta}{dx}, \quad \text{d'où : } \beta_1 = \beta e^{-2\omega} + c,$$

c désignant une certaine constante ; il suit de là que si on parcourt n fois le contour L, la fonction β_n à laquelle on arrive vérifie la relation :

$$\beta_n(x) = \beta_1(x) e^{-2n\omega} + c\left[1 + e^{-2\omega} + e^{-4\omega} + \dots + e^{-2(n-1)\omega}\right]$$

D'autre part, t est donné en fonction de x par la quadrature :

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{e^{2\int A(x)dx}\left[\beta(x) + h\right]}},$$

t_0, h désignant des constantes, et x_0 un point de L. Si nous faisons parcourir à x le contour L n fois, nous aurons

$$(b)\quad t_n - t_0 = \int_L \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)\,[\beta(x)+h]}} + \int_L \frac{dx}{\sqrt{e^{2\omega}\alpha(x)\,[\beta(x)e^{-2\omega}+c]}} + \cdots + \int_L \frac{dx}{\sqrt{e^{2n\omega}\alpha(x)\,[\beta(x)e^{-2n\omega}+c(1+e^{-2\omega}+\cdots+e^{-2(n-1)\omega})]}}$$

La partie réelle de ω étant positive, le second membre de (b) quand n croît indéfiniment, converge comme une progression géométrique: il suit de là que, si x décrit L un nombre indéfini de fois, t tend vers un point limite τ du plan des t sur un certain chemin λ; inversement, quand t tend vers τ sur λ, $x(t)$ est indéterminé, et l'intégrale $x(t)$ de (α) admet la singularité essentielle mobile $t=\tau$.

Par exemple, l'équation

$$x'' = \frac{-x'^2}{1-x^2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+\sqrt{1-x^2}$$

admet comme intégrale générale la fonction:

$$x(t) = \sin\left[\log(ae^{t}+be^{-t})\right],$$

où a, b sont deux constantes arbitraires; cette fonction a comme singularités essentielles mobiles les valeurs de t données par: $ae^{2t}+b=0$. Si a et b sont réels et de signes contraires, la fonction $x(t)$ admettra, dans le champ réel de t, une singularité essentielle $t_1 = \frac{1}{2}\log\frac{-b}{a}$. Mais une autre difficulté se présentera dans l'étude du mouvement: soit (pour fixer les idées) $a=-1$, $b=2$; quand t croît à partir de zéro jusqu'à $\frac{1}{2}\log 2$, l'expression $u=(2e^{-t}-e^{t})$ décroît de 1 à zéro, $\log u$ décroît de zéro à $-\infty$; soit t' la valeur de t pour laquelle $\log u$ est égal à $-\frac{\pi}{2}$; pour $t=t'$, x est égal à -1, $\frac{dx}{dt}$ est nul; or la fonction:

$$x = \sin\left[\log(2e^{t-t'}-e^{t'-t})\right]$$

satisfait aux conditions initiales $x(t'_1)=-1, x'(t'_1)=0$; en sorte qu'au bout du temps t'_1 on a le choix entre deux mouvements possibles, [le second mouvement n'étant pas, pour $t > t'$, représenté par la même fonction analytique que pour $t < t'$] La difficulté se représente chaque fois que $\cos(\log u)$ s'annule : en particulier, si on fait rebrousser $u(t)$ chaque fois que $x = \pm 1$, on obtient un mouvement périodique compatible avec les équations du mouvement et les conditions initiales.

Mais le fait que j'ai voulu surtout mettre en évidence, c'est l'existence de singularités essentielles mobiles pour une équation (α) prise au hasard. Ces singularités existent à fortiori pour une équation de la forme :

$$x'' = A(x)x'^2 + B(x)x' + C(x).$$

Considérons, d'après cela, une équation de Lagrange algébrique, à un paramètre, et où la force X est soit une simple fonction de x, soit un polynôme du second degré par rapport aux vitesses : $X = \lambda(x)x'^2 + \mu(x)x' + \nu(x)$. Si l'équation ne satisfait pas à certaines conditions particulières, son intégrale générale $x(t)$ deviendra indéterminée pour des valeurs de t variables avec les constantes. Au contraire, si le coëfficient différentiel de l'équation était un polynôme du troisième degré ou du m^e degré ($m>2$) en x', soit :

$$x'' = A(x)x'^3 + B(x)x'^2 + C(x)x' + D(x), \qquad A \not\equiv 0,$$

$x(t)$ ne saurait devenir indéterminé pour aucune valeur de t.

Ce qui est vrai pour un paramètre est vrai à plus forte raison, pour n paramètres. L'intégrale $x_1(t), \dots x_n(t)$, d'un système :

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = P_i\left(\frac{dx_1}{dt}, \dots \frac{dx_n}{dt}, x_1, \dots x_n\right), \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

(où les P_i sont des polynômes du second degré en $x'_1, \dots x'_n$, algébriques en $x_1, \dots x_n$), présente en général des singularités essentielles mobiles. Cette remarque s'applique notamment aux systèmes de Lagrange (T, X_i) où les X_i sont des fonctions de $x_1, \dots x_n$, ou plus généralement des polynômes du premier ou du second degré en $x'_1, \dots x'_n$ (algébriques en $x_1, \dots x_n$). A ces derniers systèmes s'étendent, sans modification, les considérations et la plupart des résultats que nous développerons en supposant les X_i fonctions seulement de $x_1, \dots x_n$

Pour donner un exemple d'un tel système et de ses singularités possibles, soit M un point de masse 1, lancé dans le plan xoy et soumis à la force $X = (x+y)v^2$, $Y = (x-y)v^2$, v désignant la vitesse de M. Les équations du mouvement comportent les solutions :

$$x = \sin[\log(t_1 - t)], \qquad y = \cos[\log(t_1 - t)],$$

Quand t tend vers t_1, le point M décrit indéfiniment, dans le sens inverse, le cercle de centre O et de rayon 1; v tend vers l'infini.

Deuxième remarque. — On pourrait penser que les singularités que nous venons d'énumérer ne se présentent jamais dans les problèmes naturels, puisqu'un système matériel occupe toujours à un instant donné une position déterminée. L'objection ne serait fondée que si les formules de la Dynamique correspondaient rigoureusement à la réalité. A ce compte, deux points matériels s'attirant suivant les lois de Newton, ne devraient jamais se rencontrer, par la raison que la vitesse d'un élément de matière ne saurait devenir infinie. Qu'arrive-t-il donc cependant dans ce cas particulier ? C'est que les deux corps, n'étant jamais réduits à des points mathématiques, se choquent avant l'instant t_1 marqué par le calcul, avec des

vitesses finies. D'une façon précise, les lois de Newton étant admises, pour mettre le problème en équations nous assimilons les deux corps à deux points géométriques: cette assimilation n'entraîne pas d'erreur sensible tant que les dimensions des deux corps sont négligeables par rapport à leur distance, mais elle cesse d'être légitime dès que les deux corps deviennent suffisamment voisins. Si donc les équations du mouvement expriment que pour $t = t_1$ les deux corps se choqueront avec des vitesses infinies, cela signifie simplement qu'avant l'instant t_1 les deux corps seront trop rapprochés pour que l'hypothèse sur laquelle reposent les formules soit suffisamment exacte, mais les deux corps se choqueront en un instant t' d'autant plus voisins de t_1 et avec des vitesses d'autant plus grandes que les dimensions des deux corps seront plus petites.

C'est la même explication, mot pour mot, qui rend compte des singularités essentielles des équations de la Dynamique. Soit $x_i(t)$ les fonctions qui définissent le mouvement de S, placé à l'instant $t = 0$ dans certaines conditions initiales. Si, pour $t = t_1$, les fonctions $x_i(t)$ deviennent indéterminées, cela signifie que S, avant l'instant t_1, passe par un état où les hypothèses et lois de forces, qui ont permis de mettre le problème en équations, cessent d'être suffisamment exactes; mais S n'atteint cet état qu'après une période d'affolement d'autant plus accentuée que ces hypothèses et lois sont plus près de la réalité.

Il y a donc le plus grand intérêt à savoir reconnaître, sur un système donné d'équations de Lagrange, que ces singularités existent ou non. Si on montre qu'elles existent, on met en évidence la particularité la plus remarquable du mouvement[1]: de plus, il ne sera pas possible de calculer la

[1] Absolument comme le choc de deux planètes, s'il doit avoir lieu, est la circonstance la plus importante de leur mouvement.

position de S au delà d'un certain instant t_1, ni de représenter les $x_i(t)$ par des algorithmes quelconques (des séries convergentes par exemple) valables quel que soit t. Si on montre au contraire que les $x_i(t)$ sont déterminés pour toute valeur de t, on est certain, comme nous l'allons montrer, de pouvoir suivre indéfiniment le mouvement du système, au moins tant que S ne passera pas par une position singulière.

Discussion générale du mouvement d'un système.

Il est toujours loisible d'admettre que les n paramètres $x_1, \dots x_n$ ont été choisis de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

1º ils ont une valeur unique, réelle et finie pour toute position de S à distance finie;

2º pour n'importe qu'elle position de S la force vive $2T$ ne s'annule que si $x'_1, \dots x'_n$ sont tous nuls.

La première condition est évidemment remplie si on prend, pour $x_1, \dots x_n$, n des coordonnées cartésiennes (indépendantes) des éléments matériels de S. Il en est de même de la seconde condition. En effet, (si on suppose, pour abréger, S formé de K points $M_1, \dots M_K$ de masses $m_1, \dots m_k$), on a, en appelant μ la plus petite des masses:

$$2T = \sum m(x'^2+y'^2+z'^2) \geqslant \mu(x_1'^2+x_2'^2+\dots+x_n'^2).$$

Il suit de là que le discrimant $\Delta(x_1, \dots x_n)$ de T ne s'annule pour aucune position de S; car soit: $\Delta(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0) = 0$; les égalités $\frac{\partial T}{\partial x'_i}(x'_1, \dots x'_n, x_1^0, \dots x_n^0) = 0$ seraient compatibles pour des valeurs des x'_i qui ne seraient pas toutes nulles, et qui annuleraient:

$$\sum x'_i \frac{\partial T}{\partial x'_i}(x'_1 \dots x'_n, x_1^0, \dots x_n^0) \equiv 2T(x'_1 \dots x'_n, x_1^0, \dots x_n^0).$$

Ceci posé, soit $2T \equiv \Sigma A_{ij} (x_1, \dots x_n) \; x'_i \; x'_j$ la force vive de S; pour une position quelconque de S, les A_{ij} ont une valeur unique. Nous supposons de plus que, pour une position quelconque de S, les forces qui s'exercent sur les divers éléments du système sont bien déterminées: si le travail virtuel de ces forces (pour un déplacement virtuel $\delta x_1, \dots \dots \delta x_n$ de S) est représenté par $\sum X_i \, \delta x_i$, les $X_i (x_1, \dots x_n)$ ont, pour toute position de S, une valeur unique. Soit S_0 une certaine position de S; si on peut choisir les paramètres $x_1, \dots x_n$ (assujettis aux restrictions énoncées) de façon que, quand S reste voisin de S_0, les valeurs correspondantes des A_{ij} $(x_1, \dots x_n)$, X_i $(x_i, \dots x_n)$ soient des fonctions holomorphes de $x_1, \dots x_n$ dans le domaine de $x_1^0, \dots x_n^0$ (valeur de $x_1, \dots x_n$ pour S_0), nous dirons que S_0 est une position régulière de S;[1] sinon, S_0 sera une position singulière de S.

Cette définition admise, plaçons S à l'instant $t=0$ dans une position régulière, avec des vitesses données: nous dirons que le mouvement se poursuit régulièrement dans l'intervalle de temps $t=0$, $t=t_1$, si, pour toute valeur positive de t moindre que t_1, S occupe une position bien déterminée, régulière, avec des vitesses finies et déterminées; quand il en est ainsi, deux hypothèses sont possibles lorsque t tend vers t_1: ou bien S tend vers une position limite S_1, ou bien certains éléments

---

[1] Il suffirait même, pour ce qui va suivre, d'admettre que les fonctions A_{ij} sont réelles et continues et possèdent des dérivées premières et secondes continues dans le domaine des valeurs $x_1^0, \dots x_n^0$, et que les X_i sont réels, continus et possèdent des dérivées premières continues. On appliquerait alors les théorèmes de Cauchy, relatifs aux intégrales des équations différentielles réelles.

de S ne tendent vers aucune position à distance finie. Discutons la première hypothèse.

1er Cas. La position S_1 de S est régulière. Admettons d'abord que la position S_1 vers laquelle tend S soit régulière : les équations de Lagrange, résolues par rapport aux dérivées secondes x''_i, conduisent à un système différentiel de la forme :

$$(A) \quad x''_i = f_i\,(x'_1, \dots x'_n, x_1, \dots x_n) \equiv \sum \alpha^{(i)}_{j,k}(x_1, \dots x_n)\, x'_j x'_k + \beta^{(i)}(x_1, \dots x_n)$$
$$(i = 1, 2, \dots n),$$

et on a pu choisir les paramètres $x_1, \dots x_n$ de façon que, dans le voisinage de S_1, les coëfficients $\alpha^{(i)}_{jk}$, $\beta^{(i)}$ soient holomorphes. Cela étant, si les $x'_i(t)$ tendent vers des limites finies quand t tend vers t_1, le système (A) définit sans ambiguité le mouvement de S et ce mouvement reste régulier pour $t > t_1$.... Il en serait tout autrement si les $x'_i(t)$ ne tendaient pas tous vers des limites finies. Mais cette circonstance ne peut se présenter d'après le théorème suivant :

Théorème — Si, quand t tend vers t_1, S tend vers une position <u>régulière</u> S_1, <u>les vitesses</u> $x'_1, \dots x'_n$ <u>de</u> S <u>tendent vers des limites finies (qui ne sont pas toutes nulles.)</u>

Pour démontrer ce théorème, il suffit d'employer, sans modification le procédé de raisonnement appliqué aux équations du second ordre (18e leçon, pages 403-411). Cette démonstration se trouve d'ailleurs développée dans un mémoire du Bulletin de la Société Mathématique de France (Septembre 1894).

Ce théorème se complète par un corollaire (loc. cit.).

Corollaire. — Si quand t croît indéfiniment, S tend vers une position régulière S_1, S_1 est nécessairement une position d'équilibre et les $x'_i(t)$ tendent tous vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

Inversement, si quand t croît et tend vers t_1, S

tend vers une position régulière d'équilibre avec des vitesses qui tendent vers zéro; t_1 est nécessairement infini.

2ème Cas - La position S_1 est singulière. - Si, t tendant vers t_1, les $x'_i(t)$ tendent vers des limites finies, les équations du mouvement ne détermineront pas en général (la position de S pour $t > t_1$ (voir l'exemple de la page 550). La même conclusion subsiste si les vitesses x'_i deviennent infinies, ou restent finies mais sans tendre vers des valeurs limites, quand t tend vers t_1. Nous avons donné des exemples où ces diverses singularités se rencontrent.

Conclusions - Cette discussion conduit aux conclusions suivantes:

Le système S occupant à l'instant $t=0$ une position régulière avec des vitesses finies, le mouvement de S se poursuivra régulièrement tant que t ne dépassera pas une certaine limite. Le cas où le mouvement se poursuit régulièrement quel que soit t ne donne lieu à aucune difficulté. Dans le cas contraire, il existe une certaine valeur positive t_1 telle que le mouvement soit régulier pour $t < t_1$ et cesse de l'être pour $t \geqslant t_1$. Plusieurs circonstances sont alors possibles, quand t tend vers t_1.

1° - S tend vers une position singulière. - Les $x'_i(t)$ peuvent tendre vers des limites finies, ou vers l'infini, ou ne tendre vers aucune limite (finie ou non). Lors même que tous les x'_i ont des limites finies pour $t = t_1$, les équations du mouvement ne déterminent pas, en général, le mouvement de S pour $t > t_1$

2° - Certains éléments S' de S s'éloignent indéfiniment[1],

---

[1] J'entends par là que les points S' restent extérieurs

les autres éléments S'' tendant vers des position limites à distance finie.

Si l'influence des éléments matériels S' sur les éléments matériels S'' s'annule quand S' s'éloigne indéfiniment, le problème sera, pour $t > t_1$, d'étudier le mouvement du système S'', ce qui ne présentera point de difficulté (dans le voisinage de t_1) pourvu que la position limite S''_1 de S'' pour $t = t_1$ soit une position régulière de S''. C'est ce qui arrive si S se compose de deux points M et M_1 qui se repoussent en raison inverse du carré de la distance, le point M étant attiré et le point M_1 repoussé par l'origine proportionnellement au carré de la distance: pour des conditions initiales quelconques (exception faite de certaines conditions particulières), M_1 s'éloignera à l'infini en un temps fini t_1; pour $t = t_1$, M occupera une position M_0 avec une vitesse finie et déterminée, et pour $t > t_1$ son mouvement sera celui d'un point libre attiré par O proportionnellement au carré de la distance.

3° Certains éléments de S ne tendent vers aucune position à distance finie (sans pour cela s'éloigner indéfiniment).

Les équations de la Dynamique ne sauraient alors permettre de calculer le mouvement pour $t > t_1$.

— Ces diverses circonstances se trouvent réalisées dans les exemples que nous avons énumérés. Mais ce qu'il est essentiel de remarquer, c'est qu'il n'y a pas d'autres circonstances possibles.

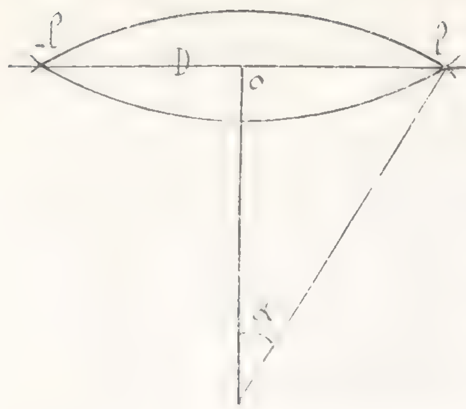
(Suite)
à une sphère de centre fixe O et de rayon R (si grand que soit le rayon donné R) dès que $(t_1 - t)$ est inférieur à une quantité suffisamment petite ε.

On conçoit l'importance de cette remarque en constatant les graves erreurs que peut entraîner l'omission d'une des singularités possibles du mouvement. Considérons, par exemple, un point M de masse 1 mobile sans frottement dans un tube circulaire de rayon 1 et soumis à une résistance égale au carré de la vitesse. Toutes les positions de M sont ici régulières. Soit O le centre du cercle C ; Ox et Oy deux axes rectangulaires, x et y les coordonnées de M ; si on prend x comme paramètre, le mouvement de M est défini par l'équation :

$$(1) \qquad x'' + \frac{x x'^2}{y^2} = \frac{\varepsilon x'^2}{y}, \qquad \left[y^2 = 1 - x^2, \ \varepsilon = \pm 1, \ \frac{\varepsilon x'}{y} < 0 \right].$$

Pour $x_0 \neq 1$, la solution $x(t)$ de (1) déterminée par les conditions initiales t_0, x_0, x'_0, est holomorphe pour $t = t_0$. Pour $x_0 = \pm 1$, on évite toute difficulté en prenant y comme variable indépendante ; pour $t = t_0$, $y(t)$ est nul et holomorphe ; $x(t)$ ou $\sqrt{1-y^2}$ est donc aussi holomorphe pour $t = t_0$.

Ceci posé, admettons pour un instant qu'on ait négligé ou rejeté comme absurde l'hypothèse où, t tendant vers t_1, M ne tendrait vers aucune position limite. Soit pour $t = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$, $x'_0 > 0$ les conditions initiales de M ; le mouvement de M est régulier tant que t ne croît pas au delà d'une certaine limite t_1. Quand t tend vers t_1, M ne peut que tendre vers une position limite M_1 ; mais comme cette position est régulière, la vitesse de M tend vers une limite finie, et le mouvement se poursuit régulièrement au delà de t_1. Il suit de là que $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions holomorphes de t pour les valeurs positive de t. Si on change t en $-t$, on voit que la même conclusion s'applique aux valeurs négatives de t. Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ seraient donc holomorphes tout le long de l'axe réel du plan des t.



D'après cela, soit l une quantité quelconque (plus grande que $\frac{1}{x'_0}$). Traçons dans le plan complexe des t les deux cercles de rayon R qui passent par les deux points réels $+l$ et $-l$. Si R a été pris suffisamment grand, $x(t)$ et $y(t)$ sont holomorphes dans l'aire D commune aux deux cercles. Soit d'autre part α l'angle (compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$) dont la tangente est égale à $\frac{l}{R}$; la fonction :

(2) $$z = \frac{(l+t)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - (l-t)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(l+t)^{\frac{\pi}{2\alpha}} + (l-t)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}$$

représente point par point l'aire D sur le cercle du plan des z qui a l'origine comme centre et l'unité pour rayon : de plus, les valeurs $t=0$, $z=0$ se correspondent. Si donc on fait, dans l'équation (1) le changement de variable :

(3) $$t = l \, \frac{(1+z)^{\frac{2\alpha}{\pi}} - (1-z)^{\frac{2\alpha}{\pi}}}{(1+z)^{\frac{2\alpha}{\pi}} + (1-z)^{\frac{2\alpha}{\pi}}},$$

on peut calculer, par dérivations successives, les valeurs pour $z=0$ de $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^3x}{dz^3}$, ..., en fonction de $x(0)=0$, $\frac{dx}{dz}(0) = \frac{2\alpha}{\pi}x'_0$, et la série de Mac-Laurin :

(4) $$x(z) = az + bz^2 + cz^3 + \ldots\ldots$$

converge dans le cercle de rayon 1. Si on remplace z en fonction de t d'après (2), la série (4) converge pour toutes les valeurs réelles de t.

En réalité, intégrons l'équation du mouvement en posant $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, il vient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad \left[\theta_0 = -\frac{\pi}{2},\ \theta'_0 = x'_0 > 0\right],$$

et $$\theta = -\frac{\pi}{2} + \log\,(1 + x'_0 t).$$

Quand t décroît de 0 à $-\frac{1}{x'_0}$, $x(t)$ ne tend vers aucune limite ; la valeur $t = -\frac{1}{x'_0}$ est une singularité essentielle de $x(t)$, et (si petite que soit la quantité réelle α), la série (4) ne peut converger pour des valeurs de t supérieure en modules à $\frac{1}{x'_0}$.

Si la force F_t qui s'exerce sur M était accélératrice au lieu d'être retardatrice, rien ne serait changé dans la discussion précédente, à cela près que les signes de ε devraient être renversés dans l'équation (1), et qu'on aurait :

$$\theta = -\frac{\pi}{2} - \log(1 - x'_0 t) ;$$

quand t croît de 0 à $\frac{1}{x'_0}$, $x(t)$ ne tend vers aucune limite, x' tend vers l'infini.[1]

Dans le cas où la force F_t est une fonction du troisième degré de la vitesse (ou de degré supérieur),

---

[1] Dans cet exemple, on est averti de l'erreur commise par l'intégration de l'équation du mouvement qui est immédiate. Mais il n'en serait pas ainsi en général. Soit notamment M un point mobile sur une sphère Σ de centre O et de rayon 1, PQ un diamètre fixe de Σ, MM' la perpendiculaire abaissée de M sur PQ. Je suppose que M soit soumis d'une part à une force dirigée selon MM' et proportionnelle à $\overline{MM'}^2$, d'autre part à une force tangentielle égale au carré de la vitesse de M. On verrait, comme ci-dessus, qu'une fois rejetée l'hypothèse où la position de M devient indéterminée, les coordonnées de M, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont des fonctions holomorphes de t pour toute valeur réelle de t, et par suite sont développables en séries de la forme (4). Or si on lance M suivant le grand cercle de Σ dont P, Q sont les pôles, on a (en prenant PQ comme axe des z et en supposant $x_0 = 0$, $y_0 = -1$, $x'_0 > 0$ et la force tangentielle accélératrice) : $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $\theta = -\frac{\pi}{2} \cdot \log(1 - x'_0 t)$.

soit $F_t = a v^3 + b v^2 + c v + d$, le point M tend nécessairement vers une position déterminée. En rejetant à priori l'hypothèse contraire, on arriverait ici à des résultats exacts; mais quand M tend vers une position régulière, sa vitesse peut tendre vers l'infini.

En résumé, la forme même des équations de la Dynamique entraîne les deux conséquences suivantes :

1° Les fonctions $x_1(t), \ldots x_n(t)$ définies par ces équations, quand on les étudie dans le champ complexe des t, présentent en général des singularités essentielles mobiles, singularités qui, suivant les cas, interviennent ou non dans le domaine réel.

2° Quand, t tendant vers t_1 les fonctions $x_1(t), \ldots x_n(t)$ tendent vers des valeurs régulières, les dérivées $x'_1(t), \ldots x'_n(t)$ tendent vers des valeurs finies.

De la première proposition résulte une complication; de la seconde une simplification de l'étude du mouvement.

Sur plusieurs classes importantes de problèmes de la Dynamique.

Nous allons appliquer les généralités précédentes à plusieurs classes très étendues des problèmes de la Dynamique.

Je suppose d'abord que les paramètres réels $x_1, x_2, \ldots x_n$ qui définissent la position de S étant assujettis aux restrictions de la page 561, à un système de valeurs $x_1, \ldots x_n$ ne correspondent qu'un nombre fini de position de S. D'une façon précise, soit (x, y, z) les coordonnées d'un des points M de S, et soit

$$x_{n+1} = \Sigma\,(ax + by + cz).$$

où a, b, c sont des facteurs numériques quelconques et où la somme Σ est étendue à tous les points de S[1] la variable

---

[1] Pour fixer les idées, nous considérons un système

x_{n+1} vérifie une relation:

$$H\ (x_1, x_2, \ldots\ x_n,\ x_{n+1}) = 0,$$

où H est un polynôme en x_{n+1} dont les racines réelles restent finies pour tout système $x_1, \ldots x_n$ réel. Représentons par μ ou $(x_1, \ldots x_n, x_{n+1})$, un point réel à distance finie de la surface $H = 0$ de l'espace à $(n+1)$ dimensions; à tout point μ correspond une position unique de S (à distance finie). Les coordonnées (x, y, z) du point M de S sont des fonctions uniformes et continues des variables réelles $(x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1})$ liées par $H = 0$, soit:

$$x = \varphi\ (x_1, x_2 \ldots\ x_{n+1}), \qquad y = \psi\ (x_1, \ldots\ x_{n+1}), \quad z = \chi(x_1, \ldots x_{n+1}),$$

Nous admettons que H d'une part, les φ, ψ, χ d'autre part sont des fonctions holomorphes des $(n+1)$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots\ x_n, x_{n+1}$, dans le voisinage de tout point μ.

Nous pouvons écrire les équations du mouvement ainsi:

$$(\Sigma)\quad x_i'' = P_i(x_1', \ldots x_n', x_{n+1}', x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) + Q_i\ (x_1, \ldots x_n, x_{n+1}),$$
$$(i = 1, 2, \ldots\ (n+1))$$

les P étant des formes quadratiques en $x_1', \ldots x_n', x_{n+1}'$, dont les coëfficients sont des fonctions holomorphes de $x_1, \ldots x_n, x_{n+1}$ dans le voisinage de tout point (μ). Il en est de même des fonctions Q_i, sauf aux positions μ' de S pour lesquelles les forces données sont infinies ou indéterminées. La relation $H = 0$ est une conséquence de (Σ) si, pour $t = 0$, on a $H(t) = 0$, $\frac{dH}{dt} = 0$.

Soit μ_0 un point de la surface $H = 0$ distinct des points μ'. Si, en ce point, $\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}$, n'est pas nul, on prend,

---

(Suite).
S formé de K points matériels distincts; mais tout ce qui va suivre s'applique sans aucune modification à un système matériel qui renferme des corps continus dont la position dépend d'un nombre fini de paramètres.

dans (Σ) $x_1, \dots x_n$ comme variables indépendantes; les fonctions $x_1(t), \dots x_n(t)$, définies par la position initiale μ_0 et des vitesses initiales finies, sont holomorphes pour $t=0$; il en est de même de $x_{n+1}(t)$, puisque la fonction $x_{n+1}(x_1, \dots x_n)$ définie par $H=0$ est holomorphe dans le domaine de μ_0. Si, au point μ_0, $\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}$ est nul, mais $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ différent de zéro, on prend $x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_{n+1}$ comme variables indépendantes. Nous joignons aux points μ' les points μ'' où toutes les dérivées premières de H s'annulent. Les positions singulières de S seront donc les positions où les forces deviennent infinies ou indéterminées, et les positions qui correspondent à un point multiple de la surface $H=0$.

Soit μ_0, ou $(x_1^0, \dots x_n^0, x_{n+1}^0)$ une position régulière de S, et $x_1'^0, \dots x_n'^0, x_{n+1}'^0$ des valeurs finies [vérifiant la condition $\sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x_1^0 \dots x_{n+1}^0)\, x_i'^0 = 0$]. La solution $x_1(t), \dots x_{n+1}(t)$ du système (Σ), définie par ces conditions initiales, est holomorphe dans le voisinage de t_0. Si, quand t tend vers t_0, S tend vers la position μ_0, les $x_1' \dots x_{n+1}'$ tendent vers des limites finies et déterminées.

Les positions singulières de S sont définies par certains systèmes de conditions (α), ou (β), ...:

$$(\alpha) \qquad g_1(x_1 \dots x_n, x_{n+1}) = 0, \dots\dots\dots\dots g_l(x_1, \dots x_n, x_{n+1}) = 0$$

$$(\beta) \qquad h_1(x_1, \dots x_n, x_{n+1}) = 0, \dots\dots\dots\dots h_m(x_1, \dots x_n, x_{n+1}) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

nous admettons que les fonctions $g_1, \dots g_l$ [ou $h_1, \dots h_m$ etc] sont uniformes et holomorphes(1) quand μ varie sur la

---

(1) Toutes ces restrictions, très larges d'ailleurs, se trouvent remplies dans les problèmes de Mécanique qui se posent naturellement.

surface $H=0$. Il nous est loisible de remplacer les divers systèmes (α), (β), ... par une condition unique $F=0$ obtenue en posant :

$$F = [g_1^2 + g_2^2 + \cdots g_l^2]\,[h_1^2 + h_2^2 + \cdots h_m^2] \cdots$$

La fonction F est uniforme et holomorphe sur la surface $H=0$.

Ceci posé, plaçons S à l'instant $t=0$ dans des conditions initiales régulières, et admettons que, t tendant vers t_1, S ne tende pas vers une position limite à distance finie. Soit $2T$ la force-vive de S, M sa masse, MK^2 son moment d'inertie par rapport à l'origine des axes : à chaque instant $t, (t<t_1)$, les quantités T, K, F ont une valeur bien déterminée (qui est positive); soit $\rho(t)$ la plus petite des trois quantités $\frac{1}{T}, \frac{1}{K}, F$ à l'instant t. Les théorèmes de la 18e leçon (p. 421-433) montrent aussitôt que $\rho(t)$ doit tendre vers zéro avec $(t_1 - t)$. Autrement dit, on peut énoncer ce théorème :

Théorème I – Quand t tend vers t_1, ou bien S tend vers une position déterminée à distance finie, avec des vitesses finies et déterminées, ou bien le minimum $\rho(t)$ des trois quantités $\frac{1}{T}, \frac{1}{K}, F$ tend vers zéro.

Supposons maintenant que les forces X_i dérivent d'un potentiel $U(x_1, \dots x_{n+1})$ qui soit une fonction uniforme d'un point $(x_1, \dots x_{n+1})$ de la surface $H(x_1, \dots x_n, x_{n+1}) = 0$ (1)

(1) Les forces, par hypothèse, sont bien déterminées pour une position (μ) de S, et par suite les $X_i \equiv \frac{\partial U}{\partial x_i}$ sont des fonctions uniformes de $x_1, \dots x_{n+1}$. Si U admet plusieurs déterminations $U_1, U_2, \dots$ correspondant à la même position de S, la différence $U_2(x_1, \dots x_n, x_{n+1}) - U_1(x_1, \dots x_n, x_{n+1})$ est une constante. Si donc U n'est pas une fonction uniforme de

Je dis que, dans ce cas, on peut, dans l'énoncé précédent, remplacer $\rho(t)$ par le minimum $\rho_1(t)$ des deux quantités $\frac{1}{K}$, F. En effet, si $\rho_1(t)$ ne tend pas vers zéro avec $t_1 - t$, il existe des valeurs de t, aussi voisines qu'on veut de t_1, pour lesquelles $\rho_1(t)$ est supérieur à une certaine quantité positive α. Mais, pour ces valeurs de t, $|U|$ reste inférieur à une certaine limite β, et comme T est égal à $U + h$, $\frac{1}{T}$ reste supérieur à $\frac{1}{|\beta| + |h|}$. La quantité $\rho(t)$ ne tendrait donc pas zéro

Admettons de plus que, pour les grandes valeurs de K^2, $\frac{U}{K^2}$ reste inférieur à un nombre fini A. Je dis que le théorème subsiste quand on remplace $\rho(t)$ par $F(t)$.

En effet, supposons que $F(t)$ ne tende pas vers zéro avec $(t_1 - t)$. Considérons, à l'instant t le point P de S qui est le plus éloigné de l'origine, et soit $R(t)$ la distance OP. Si α désigne un nombre positif (pris aussi grand qu'on veut), il existe des valeurs de t aussi voisines de t_1 qu'on veut pour lesquelles $R(t)$ dépasse α, ou 2α, etc. D'une façon plus précise, j'envisage toutes les valeurs de t pour lesquelle $R(t)$ est compris entre α et 2α. Ces valeurs sont comprises[1] entre t' et t_1, t' désignant une valeur pour laquelle R est égale à α, et qui tend vers t_1 quand α tend vers l'infini.

Représentons par m la plus petite masse des points

(Suite)
$(x_1, \dots x_n, x_{n+1})$ sur la surface réelle $H = 0$, U admet une infinité de déterminations, lesquelles ne diffèrent que par des constantes d'addition; c'est ce qui a lieu pour le système de Lagrange:

$$2T = x'^2 + y'^2, \quad U = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

---

[1] Mais ces valeurs n'épuisent pas nécessairement tout l'intervalle t' t_1.

de S. La quantité MK^2 est comprise entre mR^2 et MR^2; $K^2(t)$ est donc supérieur à $\frac{m\alpha^2}{M}$ pour les valeurs de t considérées, et $U(t)$ est inférieur à AK^2, inférieur par suite à AR^2.

Ceci posé, soit V la vitesse maxima (à l'instant t) des points de S; $\left|\frac{dR}{dt}\right|$ est évidemment inférieur à V. D'autre part, T étant au moins égal à $\frac{m}{2}V^2$, on a:

$$\frac{m}{2}V^2 \leqslant U + h < AR^2 + h,$$

d'où on déduit

$$\left|\frac{dR}{dt}\right| < BR,$$

B désignant une certaine constante numérique. Écrivons maintenant l'équation:

$$\text{(i)} \qquad \frac{dr}{dt} = Br.$$

et étudions l'intégrale $r(t)$ qui pour $t = t'$ est égale à α. Il est clair qu'on a:

$$R(t) < r(t), \ (\text{pour } t > t' \text{ et } < t_1);$$

mais, d'après (i), r est égal à $\alpha e^{B(t-t')} = \alpha(1+\varepsilon)$, ε tendant vers zéro avec $(t-t')$ et par suite avec $\frac{1}{\alpha}$. Pour une certaine valeur t'' de t comprise entre t_1 et t', on doit donc avoir à la fois

$$R(t'') = 2\alpha, \text{ et } R(t'') < \alpha(1+\varepsilon),$$

ce qui est absurde. C. Q. F. D.

Enfin, toutes les conditions précédentes étant remplies, admettons que les positions singulières de S soient toutes <u>isolées</u>. L'égalité $F = 0$ ne définissant que des positions isolées S_1, F ne peut tendre vers zéro sans que S tende vers une de ces positions S_1. D'où ce théorème:

Théorème II. – Si S n'a que des positions singulières isolées et si les forces dérivent d'un potentiel U qui n'a qu'une détermination pour une position de S; si de plus $\frac{U}{K^2}$ reste inférieur à une quantité fixe pour les grandes valeurs de K^2, le système S tend

nécessairement vers une position limite quand t tend vers t_1 [1].

Il suit de là que, S étant placé à l'instant $t = 0$ dans des conditions initiales régulières, le mouvement se poursuit régulièrement quand t croît indéfiniment, à moins qu'à un instant t_1, S n'atteigne une des positions singulières isolées.

Passons aux systèmes S qui n'admettent pas de positions singulières.

1ère Catégorie. – Il n'existe pas de positions singulières de S, et les forces dérivent d'un potentiel U dont la valeur (pour une position quelconque de S) est unique et inférieure à une quantité finie A.

Le théorème II montre que les conditions initiales

---

[1] Ce théorème serait en défaut si les restrictions imposées plus haut à S [page 569] n'étaient pas remplies, c'est-à-dire si T et U n'étaient pas des fonctions à un nombre fini de branches des variables réelles $x_1, \dots x_n'$. Par exemple, soit :

$$T = e^{[2\,\mathrm{artg}\frac{y}{x} - \log(x^2+y^2)]} \times \left\{ \begin{array}{l} \cos[2\,\mathrm{artg}\frac{y}{x} + \log(x^2+y^2)](x'^2 - y'^2) \\ + 2\sin[2\,\mathrm{artg}\frac{y}{x} + \log(x^2+y^2)]\,x'y' \end{array} \right\}$$

et $U = -e^{2\,\mathrm{artg}\frac{y}{x}} \cos\log(x^2+y^2)$. La seule position singulière du système est la position isolée $x = 0$, $y = 0$. L'intégrale générale des équations du mouvement est :

$$x = e^{-\mathrm{artg}\frac{d}{t+c}}\left[a\cos\left(\log\sqrt{(t+c)^2+d^2}\right) - b\sin\left(\log\sqrt{(t+c)^2+d^2}\right)\right],$$

$$y = e^{-\mathrm{artg}\frac{d}{t+c}}\left[a\sin\left(\log\sqrt{(t+c)^2+d^2}\right) + b\cos\left(\log\sqrt{(t+c)^2+d^2}\right)\right],$$

qui peut s'écrire encore : $x + iy = (a+bi)[t+c+di]^i$, où a, b, c, d sont quatre constantes arbitraires. Si $d = 0$, x et y sont indéterminées pour $t = -i$. Le théorème II ne s'applique donc pas ici, mais T, U sont des fonctions des variables réelles x, y à un nombre infini de branches.

étant quelconques) le mouvement de S se poursuit régulièrement quel que soit t. D'une façon précise, soit h la valeur de la constante de l'intégrale des forces vives : $h = T - U$. La relation :

$$T = U + h < A + h$$

montrent que les x' ont (quel que soit t) des modules inférieurs à une limite fixe $\lambda\sqrt{A+h}$, λ désignant une certaine quantité indépendante de h. En appliquant le théorème de Cauchy aux équations de Lagrange, on déduit de là bien aisément que les $x_i(t)$ sont holomorphes, pour toute valeur réelle t_1 de t, à l'intérieur d'un cercle de centre t_1 et de rayon fixe l, l étant d'autant plus petit que la limite $\lambda\sqrt{A+h}$ des (x') est plus grande, c'est-à-dire que h est plus grand, (l tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$.) A toute valeur de h correspond donc une valeur $l(h)$ telle que les fonctions $x_i(t)$ soient holomorphes dans la bande du plan des t comprise entre les deux parallèles à l'axe réel des t, menées à la distance l de cet axe.

Dans cette catégorie rentrent tous les problèmes intéressant le corps solide fixé par un de ses points, pourvu que les forces données dérivent d'un potentiel qui, pour toute position du corps, ait une valeur unique et continue.

2ème Catégorie. — Il n'existe pas de positions singulières de S, et les forces dérivent d'un potentiel U dont la valeur (pour une position quelconque de S) est unique et reste inférieure à AK^2 (A désignant une certaine quantité fixe.)

Le théorème II montre que (les conditions initiales étant quelconques), le mouvement se poursuit régulièrement quel que soit t ; les fonctions $x_i(t)$ sont holomorphes pour toute valeur réelle de t.

3ème Catégorie — Il n'existe pas de positions

singulières de S, et les forces données F_i qui s'exercent sur chaque point de S restent, en grandeur, inférieures à AK, (A désignant une quantité fixe).

Le mouvement se poursuit régulièrement quel que soit t. En effet, supposons qu'il soit régulier pour $t < t_1$, et point au delà. Quand t tend vers t_1, le maximum $\mathcal{K}(t)$ de T, K devrait tendre vers l'infini. Montrons que cela est impossible.

Soit $s_1(t), \dots s_q(t)$ les arcs de trajectoires parcourus entre les instants 0 et t par les q points $M_1, \dots\dots M_q$ de S; soit $\mathcal{S}(t)$ la plus grande (à l'instant t) des quantités $s_1, \dots s_q$. Soit, de plus, $m_1, \dots m_q$ les masses de $M_1, \dots M_q$; et m la plus petite de ces masses. Soit enfin $r_1^0, \dots\dots r_q^0$ les distances initiales $r_1^0 = \overline{OM_1}, \dots\dots r_q = \overline{OM_q}$, et r_0 la plus grande de ces distances. On a :

$$r_1 \leqslant r_1^0 + s_1 \dots\dots\dots\dots r_q \leqslant r_q^0 + s_q,$$

et par suite :

$$K \leqslant (r_0 + \mathcal{S}).$$

D'autre part, l'inégalité :

$$\frac{dT}{dt} \leqslant F_1 \frac{ds_1}{dt} + \dots + F_q \frac{ds_q}{dt}$$

entraîne la suivante :

$$(1) \qquad T \leqslant qA(r_0 + \mathcal{S})\,\mathcal{S},$$

et, comme $m\left(\frac{d\mathcal{S}}{dt}\right)^2$ est au plus égal à $2T$, on peut écrire (en posant $r_0 + \mathcal{S} = \sigma$, et $\frac{2qA}{m} = B$) :

$$\frac{d\sigma}{dt} \leqslant B\sigma.$$

Si maintenant on considère l'équation :

$$\frac{du}{dt} = Bu$$

et l'intégrale $u(t)$ de cette équation qui, pour $t = 0$ est égale à r_0, on a constamment (t variant de 0 à t_1) :

$$\sigma(t) \leqq u(t),$$

et comme $u(t)$ reste inférieur à $\lambda = r_0 \, e^{Bt_1}$, il en est de même à fortiori de $K(t)$; par suite, d'après (i), T reste inférieur à le maximum $K(t)$ de T; K ne saurait donc croître indéfiniment quand t tend vers t_1. C. Q. F. D.

(Dans cette troisième catégorie rentrent notamment les systèmes où T est de la forme :

$$T = x'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2,$$

et où les X sont des fonctions de $x_1 \cdots x_n$, holomorphes pour toutes les valeurs finies de $x_1, \ldots x_n$ et telles que les $\dfrac{X_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2}}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ restent inférieurs à une limite fixe A pour toutes les valeurs réelles de $x_1, \ldots x_n$.

De l'intégration des équations de la Dynamique à l'aide de séries.[1]

Admettons que (pour des conditions initiales quelconques) on sache représenter les paramètre $x_1(t), \ldots x_n(t)$ par des séries convergentes:

(1) $\quad x_i\,(t, x_1^0, \ldots x_n^0, \; x_1'^0, \ldots x_n'^0) = \varphi_1(t) + \cdots + \varphi_j(t) + \cdots\cdots,$

séries qui convergent uniformément le long de tout segment fini de l'axe réel des t, et dont les coëfficients successifs se calculent en

---

[1] Tout ce qui précède subsiste, comme je l'ai remarqué déjà, si on suppose seulement que les coëfficients A_{ij}, X_i des équations de Lagrange au lieu d'être analytiques, sont des fonctions réelles de $x_1, \ldots x_n$ qui admettent les dérivées partielles continues, les A_{ij} jusqu'au second ordre inclusivement, les X_i jusqu'au premier; [exception étant faite des positions singulières]. Ce qui va suivre suppose au contraire les A_{ij}, X_i analytiques, à cause de la restriction essentielle que les coëfficients des séries (1) se calculent en fonction des x_i^0, $x_i'^0$, à l'aide de simples différentiations.

fonction des conditions initiales à l'aide de simples différentiations comme ceux d'une série de Taylor. Nous supposons de plus que les séries (1) sont dérivables terme à terme indéfiniment, et que les séries ainsi obtenues sont encore uniformément convergentes sur l'axe réel des t. Nous supposons enfin qu'on ait limité l'erreur commise en arrêtant les séries (1) au p^e terme : d'une façon précise, j'entends que pour tout système de deux quantités positives ε, t_1, on connaît explicitement[1] un entier ν tel que, pour toute valeur de p supérieure à ν, les restes $R_p(t)$ des séries (1) soient moindres (en module) que ε, tant que t reste compris entre $-t_1$ et $+t_1$ - Quand ces conditions sont remplies, nous convenons de dire, pour abréger, que les séries (1) jouissent (dans le domaine réel) des propriétés fondamentales des séries de Taylor.

Quand on connaît un développement tel que (1), ce développement effectue évidemment l'intégration (au sens moderne du mot) des équations de la Dynamique considérée.

Il convient toutefois de bien mettre en évidence ce que le problème de l'intégration ainsi entendu comporte d'indéterminé. On conçoit aussitôt que, si une telle intégration est possible, elle soit possible d'une infinité de façons. Chaque mode de développement (1), permettant de calculer numériquement les $x_i(t)$ avec une approximation indéfinie, constitue une solution du problème, mais cette solution sera d'autant plus parfaite que les séries (1) seront plus rapidement convergentes.

Cette raison est la principale qui puisse faire

---

[1] Par exemple, ν est le plus grand entier supérieur aux deux quantités αt_1^2, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, où α et β sont deux fonctions positives connues de : $x_1^0, \dots x_n^0$, $x_1'^0, \dots x_n'^0$.

préférer un mode de développement à un autre; lorsqu'on se préoccupe uniquement du calcul numérique des $x_i(t)$, c'est-à-dire, pour parler comme M. Poincaré, quand on se place au point de vue quantitatif. Il en va tout autrement quand on se place au point de vue qualitatif, c'est-à-dire quand on veut prévoir l'aspect du mouvement, reconnaître si le mouvement est périodique ou reste sensiblement périodique, etc. Pour bien le comprendre, admettons qu'on sache représenter le mouvement d'un système à l'aide de deux développements (1) distincts, le premier mal convergent mais qui montre que le mouvement est périodique, le second très convergent mais ne mettant pas en évidence la périodicité. Il est clair que le premier sera de beaucoup le plus intéressant au point de vue qualitatif.

Considérons, par exemple, le problème des trois corps, et supposons qu'on ait appris à définir le mouvement à l'aide de séries (1), bien convergentes quel que soit t pour des conditions initiales quelconques, exception faite de certaines conditions initiales singulières nettement déterminées. Supposons de plus que ces séries ne mettent en évidence aucune solution périodique. La solution, parfaite au point de vue quantitatif, sera insuffisante au point de vue qualitatif et exigera de nouvelles recherches.

Il n'en est pas moins vrai que l'intégration, sous une forme (1) quelconque, d'un problème de Dynamique non encore intégré, constituera toujours un progrès très important, et il n'est pas douteux qu'une telle intégration n'entraîne en général d'utiles conséquences, même au point de vue qualitatif.

Ces remarques faites, je vais montrer qu'on peut toujours intégrer sous une forme (1) les problèmes des trois catégories énumérées plus haut.

Je m'appuierai, pour cela, sur deux théorèmes de la théorie des fonctions, dont le premier est bien connu.

1er Lemme — Toute fonction $x(t)$ holomorphe dans le plan complexe des t entre deux parallèles à l'axe réel distantes de cet axe de la longueur α, est développable à l'intérieur de cette bande B suivant les puissances entières de : $\theta = \frac{1-e^{\lambda t}}{1+e^{\lambda t}}$ $\left[\lambda = \frac{\pi}{2\alpha}\right]$.

Comme je l'ai rappelé (voir page 547), ce théorème est évident si on observe que la fonction $\theta = \frac{1-e^{\lambda t}}{1+e^{\lambda t}}$, effectue la représentation conforme de B sur le cercle de rayon 1 du plan des θ qui a l'origine pour centre.

2e Lemme — Une fonction $x(t)$ holomorphe pour toute valeur réelle de t est développable en série de polynômes :

$$x(t) = P_0(t) + P_1(t) + \dots + P_j(t) + \dots,$$

où les coëfficients de chaque polynôme P_j sont des fonctions linéaires et homogènes de $x(0)$, $\frac{dx}{dt}(0)$, ... $\frac{d^l x}{dt^l}(0)$. Cette série converge uniformément, ainsi que toutes les séries dérivées, le long de tout segment fini de l'axe réel. De plus, si on connaît explicitement pour toute valeur réelle de t une limite inférieure $\rho(t)$ du rayon du cercle ayant t comme centre et dans lequel $x(t)$ est holomorphe, on possède par le fait même, un moyen de limiter le module maximum du reste R_p de la série. D'une façon précise, on peut alors choisir les polynômes P de telle façon que, si ν désigne le plus grand entier supérieur à $|t_1|$ et à $\frac{1}{\varepsilon}$, on ait :

$$|R_\mu(t)| < \varepsilon \qquad \text{pour } \mu > \nu,$$

quand t varie de $-t_1$ à $+t_1$.

Je me borne à énoncer ici ce théorème qui est une conséquence des modes de développements en séries de polynômes que j'ai indiqués autrefois pour les fonctions holomorphes

dans une aire convexe (voir mon mémoire sur les lignes singulières des fonctions analytiques, Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse 1887).[1]

Appliquons le premier lemme aux problèmes de la première catégorie. Nous obtenons aussitôt le théorème suivant :

Théorème — Dans tout problème de la première catégorie, à chaque valeur de la constante des forces vives correspond une quantité λ telle que (les conditions initiales étant d'ailleurs quelconques) les $x_i(t)$ se laissent développer suivant les puissances croissantes de : $\theta = \frac{1-e^{\lambda t}}{1+e^{\lambda t}}$:

(2) $$x_i(t) = x_i^0 + \alpha_1^{(i)}\theta + \alpha_2^{(i)}\theta^2 + \dots \quad , (i = 1, 2, \dots n);$$

les coëfficients $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)} \dots$ se calculent élémentairement en fonction de $x_1^0, \dots x_n^0, x_1'^0, \dots x_n'^0$. Les développements (2) jouissent de toutes les propriétés imposées aux séries (1) et intègrent les problèmes de la première catégorie, (catégorie qui, comme je l'ai dit, comprend notamment les problèmes intéressant le corps solide).

Si nous appliquons maintenant le second lemme aux problèmes des trois catégories, on parvient aisément à ce théorème :

---

[1] Quand une fonction $x(t)$ est holomorphe dans l'intervalle a, b de l'axe réel des t, on peut encore la représenter dans cet intervalle à l'aide d'une série jouissant des propriétés fondamentales des séries de Taylor, et notamment on peut toujours la développer en série de polynômes en t, composés linéairement avec les valeurs de $x(t)$ et de ses dérivées successives pour un point réel $t = c$ pris arbitrairement entre a et b.

Théorème. — Dans tout problème d'une des trois catégories énumérées, les $x_i(t)$, pour des conditions initiales quelconques, se laissent développer en séries de polynômes convergentes quel que soit t,

$$(3) \qquad x_i(t) = P_0^{(i)}(t) + P_1^{(i)}(t) + \ldots + P_l^{(i)}(t) + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

séries qui jouissent, au point de vue du calcul des coëfficients, de la dérivation, etc, des propriétés fondamentales des séries de Taylor

Je ne développerai pas davantage ici ces indications, mais je dirai, en terminant, quelques mots du problème des trois corps qui ne rentre dans aucune des trois catégories précédentes.

Du problème des trois corps et des n corps.

Appliqué au problème des n corps, le théorème I (page 571) montre aussitôt que le mouvement se poursuit régulièrement quand t croît, à moins que, t tendant vers un certain instant t_1, le minimum $\rho(t)$ des distances mutuelles $r_{ij}(t)$ des n corps ... M_i ..., M_j .... ne tende vers zéro.

En effet, si (t tendant vers t_1), le minimum $\rho(t)$ [à l'instant t] des r_{ij} ne tend pas vers zéro, il existe des valeurs t' de t, aussi voisines de t_1 qu'on veut, pour lesquelles les r_{ij} sont tous supérieurs à une certaine quantité positive α; les vitesses V_i des points M_i sont (pour les mêmes valeurs t' de t) inférieures à une quantité fixe β, d'après le théorème des forces vives. Il suit de là que les fonctions $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ [coordonnées cartésiennes d'un point M_i du système] sont holomorphes à l'intérieur d'un cercle de centre t' et de rayon fixe λ : il suffit de prendre t' entre $t_1 - \lambda$ et t_1 pour voir que le mouvement est régulier pour $t > t_1$.

Nous pouvons donc, d'une façon précise, énoncer ce théorème :

Soit $\rho(t)$ la plus petite des distances r_{ij} à l'instant t. Si le mouvement est régulier pour $t < t_1$ mais point au delà, $\rho(t)$ tend vers zéro quand t tend vers t_1 : c'est-à-dire que pour t suffisamment voisin de t_1, $\rho(t)$ <u>reste</u> inférieur à toute quantité donnée à l'avance ε.

C'est là une proposition bien connue : on en déduit d'ordinaire que le mouvement reste régulier tant qu'il n'y a pas choc, autrement dit tant que deux ou plusieurs points M_i n'arrivent pas (au même instant t_1) en un même point déterminé de l'espace. Cette conclusion n'est pas légitime : elle le serait s'il était certain que (t tendant vers t_1) tous les points M_i dussent tendre vers des positions limites à distance finie. Mais, à priori, il est possible que (quand t tend vers t_1), plusieurs des points M_i ne tendent vers aucune position limite, et $\rho(t)$ peut tendre vers zéro sans qu'aucune des distances r_{ij} tende constamment vers zéro. On conçoit, par exemple, que, t tendant vers t_1, la distance $M_1 M_2$ soit très petite, pour certaines valeurs de t, et la distance $M_3 M_4$ supérieure à l'unité ; que pour d'autres valeurs de t la distance $M_1 M_2$ soit supérieure à l'unité, et la distance $M_3 M_4$ très petite, etc.

Dans le cas de trois corps (mais dans ce cas seulement) nous allons montrer que cette singularité ne saurait se présenter.

— Du problème des trois corps —

Si le mouvement étudié cesse d'être régulier, le minimum $\rho(t)$ des trois distances $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$ tend vers zéro avec $t - t_1$. Deux hypothèses sont possibles :

1ère Hypothèse — Les quantités $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$ tendent respectivement vers zéro avec $(t - t_1)$.

Pour t voisin de t_1, les trois corps sont très voisins de leur centre de gravité G, et comme G tend vers une position limite G_1

quand t tend vers t_1, les trois corps tendent vers G_1.

2e Hypothèse — $R(t)$ reste supérieur à une certaine quantité positive α, [$R(t)$ désignant la plus grande des distances $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$, à l'instant t].

Cette hypothèse comporte elle-même deux cas : 1° ou bien une au moins des distances $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$, soit $r_{1,2}$, reste supérieure à une certaine quantité positive α ; 2° ou bien quand t varie de t' à t_1 (si petit que soit $t_1 - t'$), $r_{1,2}$ est supérieure à une quantité fixe α ($\alpha > 0$) pour certaines valeurs de t, et, pour d'autres valeurs de t, inférieure à toute quantité positive donnée ε.

1° — Traitons d'abord le premier cas. — Puisque $r_{1,2}$ reste supérieure à α, le minimum de $r_{1,3}$, $r_{2,3}$ tend vers zéro avec $(t - t_1)$, et l'inégalité $r_{1,2} \leqq r_{1,3} + r_{2,3}$ montre aussitôt qu'une (et une seule) de ces deux quantités, soit $r_{2,3}$, doit tendre vers zéro. — Étudions alors le mouvement de M_1 : l'attraction qui s'exerce sur M_1 reste finie, par suite sa vitesse ; M_1 tend donc vers une position limite P_1 quand t tend vers t_1, et comme le centre de gravité G du système tend vers une position G_1, le centre de gravité Γ de M_2, M_3, par suite M_2, M_3, tendent vers une position limite Γ_1. Les deux corps M_2, M_3 se choquent à l'instant t_1 au point Γ_1.

2° — Dans le second cas, considérons entre t' et t_1 un intervalle θ_1, θ_2 où $r_{1,2}$ soit supérieure ou égale à α, et un intervalle θ, θ' (comprenant le précédent) où $r_{1,2}$ soit supérieure ou égale à $\frac{\alpha}{2}$. On a : $r_{1,2}(\theta_1) = r_{1,2}(\theta_2) = \alpha$, $r_{1,2}(\theta) = r_{1,2}(\theta') = \frac{\alpha}{2}$. La dérivée $\frac{dr_{1,2}}{dt}$ s'annule pour une valeur τ de t comprise entre θ_1, θ_2 ; quand t varie de τ à θ', $r_{1,2}$ reste supérieure à $\frac{\alpha}{2}$; la plus petite des distances $r_{2,3}$, $r_{1,3}$ est très petite, et l'inégalité $\frac{\alpha}{2} \leqq r_{1,2} \leqq r_{1,3} + r_{2,3}$ montre que c'est la même distance ($r_{2,3}$) qui doit rester très petite, inférieure par exemple à $\frac{\alpha}{4}$,

dans l'intervalle de temps considéré. Étudions alors le mouvement de M_1 quand t croît de τ à θ'; la force qui s'exerce sur M_1 est moindre que $fm_1(m_2+m_3)\frac{16}{\alpha^2}$; je considère d'après cela l'équation :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{16f(m_1+m_2)}{\alpha^2} = -\lambda$$

et l'intégrale $r(t)$ de cette équation définie par les conditions initiales : $t=\tau$, $r(\tau)=r_{1,2}(\tau)$, $r'(\tau)=0$; on voit immédiatement qu'on a :

$$r_{1,2}(t) > r(t) \qquad (\tau \leq t \leq \theta').$$

Mais d'autre part $r(t)$ vérifie l'inégalité :

$$r(t) = r_{1,2}(\tau) - \frac{\lambda}{2}(t-\tau)^2 > \alpha - \frac{\lambda}{2}(t-\tau)^2,$$

et si on a pris t' assez voisin de t_1 pour que $t_1 - t'$ soit moindre que $\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}}$, $r(t)$ sera, pour $t=\theta'$, supérieur à $\frac{\alpha}{2}$.
On aura donc à la fois :

$$r_{1,2}(\theta') = \frac{\alpha}{2}, \text{ et } r_{1,2}(\theta') > r(\theta') > \frac{\alpha}{2},$$

ce qui est absurde.
Le cas 2° ne saurait donc se présenter.

Conclusion. — Quand le nombre des corps est égal à 3, trois cas seulement peuvent se présenter :

1°. — Les trois distances $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$ restent (quel que soit t) supérieures à une quantité positive α. —

Les coordonnées x, y, z de chaque point du système se laissent alors développer en séries de la forme (2), voir p. 581, convergentes quel que soit t. Ce mode de développement a déjà été indiqué par M. Poincaré.

II°. — Soit $\rho(t)$ la plus petite (à l'instant t) des trois

distances $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$. Quand t croît de zéro à ∞, $\varrho(t)$ tend vers zéro sans s'annuler jamais.

Le mouvement est régulier quel que soit t. Les coordonnées (x, y, z) des points se laissent développer en séries de polynômes de la forme (3), voir p. 582.

III. – Deux au moins des corps se choquent, à un instant t_1, en un point déterminé de l'espace.

Le mouvement ne peut être calculé pour $t > t_1$.

D'après ce qui précède, le problème des trois corps se laisse intégrer à l'aide de séries convergentes qui jouissent des propriétés fondamentales des séries de Taylor, exception étant faite toutefois pour les conditions initiales telles que deux des corps ou les trois corps se choquent au bout d'un temps fini. Il serait donc extrêmement important de définir avec précision les conditions initiales qui correspondent à un choc. J'ai commencé pour cela l'étude des trajectoires réelles du système qui satisfont aux conditions initiales:

$$x_1 = x_1^0, \quad y_1 = y_1^0, \quad z_1 = z_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad y_2 = y_2^0, \quad z_2 = z_2^0,$$

$$x_3 = x_3^0, \quad y_3 = y_3^0, \quad z_3 = z_3^0,$$

dans l'hypothèse où deux au moins des trois points (x_1^0, y_1^0, z_1^0), (x_2^0, y_2^0, z_2^0), (x_3^0, y_3^0, z_3^0) coïncident. Cette discussion me donne lieu de penser que les conditions initiales qui entraînent un choc au bout d'un temps fini satisfont à deux relations analytiques distinctes (qui se réduisent à une dans le cas du mouvement plan): d'une façon précise, donnons nous arbitrairement les 18 conditions initiales du système, sauf deux qu'on laisse variables x_1^0, y_1^0 par exemple; les points (x_1^0, y_1^0) du plan (x_1, y_1) pour lesquels il y a choc, seraient des points isolés. Mais ce sont là des présomptions dont je ne possède pas encore la démonstration rigoureuse.

— Du problème des n corps —

Quand le nombre des corps est quelconque, à quels résultats conduit la discussion que nous venons d'appliquer au problème des trois corps? C'est ce que je vais indiquer brièvement.

Je suppose encore que le mouvement ne soit régulier que jusqu'à l'instant t_1. Tout d'abord, quand t tend vers t_1, il peut se faire que les distances du point M_1 de S à d'autres points (soit $M_2, \ldots M_q$) tendent constamment vers zéro : je conviens de dire alors que les q points $M_1, \ldots M_q$ forment un système partiel. Les n points de S se partagent donc en ν systèmes partiels $(\nu \leq n)$, dont les centres de gravité sont respectivement $G_1, G_2, \ldots G_\nu$. Si $R_{i,j}$ est la distance des deux points G_i, G_j, aucune des quantités $R_{i,j}$ ne tend constamment vers zéro.

Ceci posé, j'admets que, t tendant vers t_1, un au moins des points G, soit G_1, ne tende vers aucune position limite. Je sépare les points G en deux classes : la première formée des points $G_1, G_2, \ldots G_\mu$, la seconde des points $G_{\mu+1} \ldots G_\nu$ par exemple, et définies par la condition suivante : soit $\rho_i(t)$ la plus petite (à l'instant t) des distances du point G_i de la première classe aux autres points G de la même classe, et soit $R_i(t)$ la plus petite des distances du même point G_i aux points G de la seconde classe ; quand t tend vers t_1, $\rho_i(t)$ tend vers zéro et $R_i(t)$ reste supérieur à une quantité fixe α, $(\alpha > 0)$, et cela quel que soit le point G_i de la première classe. Si μ est inférieur à 4, le raisonnement indiqué pour le cas de trois corps montre (avec quelques modifications) que G_1 tend vers une position limite. La première classe doit donc renfermer au moins quatre points G, dans l'hypothèse où nous nous plaçons. De là ce théorème :

Théorème — Quand t tend vers t_1, ou bien tous les

points du système tendent vers des positions limites à distance finie, ou bien il existe au moins quatre points du système, soit $M_1, \ldots M_\mu$ $(\mu \geqslant 4)$ qui ne tendent vers aucune position limite à distance finie, et qui de plus sont tels que le minimum $\rho(t)$ de leurs distances mutuelles tende vers zéro avec $t-t_1$, sans qu'aucune de ces distances tende constamment vers zéro.

La discussion précédente ne montre pas que cette dernière singularité puisse se produire; elle montre seulement que cette singularité, si elle se présente, ne pourrait provenir que des croisements des astres entre eux, croisements qui, quand t tend vers t_1, deviennent de plus en plus fréquents et de plus en plus semblables à des chocs.(1) Ces pseudo-chocs ont déjà été signalés par M. Poincaré comme pouvant donner naissance (dans le cas de $n > 3$) à des solutions périodiques d'une nature particulière, qui n'apparaissent pas dans le problème des trois corps.

J'insiste, en terminant, sur la différence qui sépare, au point de vue où nous nous sommes placés, le problème des n corps et celui des trois corps. Quel que soit n, on peut distinguer les conditions initiales en trois catégories, suivant que (pour ces conditions

---

(1) On trouve ici une confirmation de la remarque faite plus haut (page 558). S'il arrive que, pour des conditions initiales données, les coordonnées des n corps ne tendent pas, quand t tend vers t_1, vers des limites finies, le minimum $\rho(t)$ des distances mutuelles des n corps tend vers zéro avec $(t-t_1)$; comme les astres dans la réalité, ont des dimensions finies, deux des astres se choqueront avant l'instant t_1, mais après une période d'affolement d'autant plus accentuée que les dimensions des astres seron plus petites.

initiales) le minimum $\rho(t)$ des distances mutuelles des n corps, reste supérieur à une quantité positive α, ou tend vers zéro sans s'annuler quand t tend vers l'infini, ou enfin tend vers zéro quand t tend vers t_1. Les équations du mouvement se laissent intégrer à l'aide des séries (2) pour les conditions initiales de la première catégorie[1], à l'aide des séries (3) pour celles de la seconde. Enfin, pour les conditions initiales de la troisième catégorie, le mouvement ne saurait être calculé au delà de l'instant t_1.

Les conditions initiales pour lesquelles deux au moins des corps se choquent au bout d'un temps t_1 en un point déterminé de l'espace, appartiennent à la troisième catégorie. Mais (à l'inverse de ce qui se passe pour $n=3$) il n'est pas certain que ce soient les seules.

D'après cela, admettons qu'on ait discuté les trajectoires réelles du système qui satisfont aux conditions :

$$x_i = x_i^0 \quad , \quad y_i = y_i^0 \quad , \quad z_i = z_i^0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

dans l'hypothèse où deux au moins des points x_i^0, y_i^0, z_i^0 coïncident ; admettons par exemple qu'on ait montré que les conditions initiales qui définissent ces trajectoires vérifient deux relations analytiques. On n'aura plus le droit d'en conclure (comme dans le cas de $n=3$) que, pour toutes les conditions initiales qui ne vérifient pas ces deux relations exceptionnelles, le mouvement reste régulier quel que soit t et est représentable à l'aide de séries (2) ou (3).

Je me borne ici à ces indications qui permettent aisément d'ailleurs de rétablir dans le détail, les résultats énoncés.

Fin.

---

[1] Si les forces étaient répulsives, le mouvement se laisserait représenter par les séries (2), quelles que fussent les conditions initiales.